math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Wiener-Hopfova faktorizacija

slučajni procesi   vjerojatnost

Marijo Alilović, Miljenko Huzak

U spomen na docenta Antu Mimicu

Sažetak

U ovom radu pomoću dualnih vremena zaustavljanja dokazana je Wiener-Hopfova faktorizacija slučajne šetnje na $\mathbb{R}$ te je primijenjena u dokazu Baxterovih jednakosti.

Uvod

Osnovni matematički objekt koji ćemo proučavati je slučajna šetnja na $\mathbb{R}$. Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada za slučajni proces $\{S_n : n \geq 0\}$ definiran sa:

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n \quad n \geq 1,$$

kažemo da je *slučajna šetnja* na $\mathbb{R}$. Neka je:

$$N_1 = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}, \text{ uz dogovor } \inf \emptyset = \infty.$$

N_1 je prvi trenutak u kojem je vrijednost slučajne šetnje strogo pozitivna, a S_{N_1} je vrijednost slučajne šetnje u trenutku N_1. Ako stavimo $N_0 = 0$ tada N_1 možemo promatrati kao prvo vrijeme u kojem je prirast slučajne šetnje strogo pozitivan od trenutka N_0, tj:

$$N_1 = \inf\{n > N_0 : S_n - S_{N_0} = X_{N_0+1} + X_{N_0+2} + \ldots + X_n > 0\}.$$

Kao interesantno pitanje vezano za slučajnu šetnju nameće se pitanje distribucije slučajnog vektora $(N_1 - N_0, S_{N_1} - S_{N_0})$. Nadalje, na izmjerivom prostoru:

$$(\Omega \cap \{N_1 < \infty\}, \mathcal{F} \cap \{N_1 < \infty\})$$

možemo definirati:

$$N_2 = \inf\{n > N_1 : S_n > S_{N_1}\}, \text{ uz dogovor } \inf \emptyset = \infty.$$

N_2 je prvi trenutak od trenutka N_1 u kojem je prirast slučajnoj šetnji strogo pozitivan, a $S_{N_2} - S_{N_1}$ je prirast slučajne šetnje od trenutka N_1 do trenutka N_2. Ponovno kao interesantno pitanje nameće se poznavanje distribucije slučajnog vektora $(N_2 - N_1, S_{N_2} - S_{N_1})$. Potpuno analogno na izmjerivom prostoru:

$$(\Omega \cap (\cap_{i=1}^{k-1}\{N_i < \infty\}), \mathcal{F} \cap (\cap_{i=1}^{k-1}\{N_i < \infty\}))$$

možemo definirati $N_k = \inf\{n > N_{k-1}: S_n > S_{N_{k-1}}\}$, uz dogovor $\inf \emptyset = \infty$, $k \geq 1$.

N_k je prvo vrijeme od trenutka N_{k-1} u kojem je prirast slučajnoj šetnji strogo pozitivan, a $S_{N_k} - S_{N_{k-1}}$ je prirast slučajne šetnje od trenutka N_{k-1} do trenutka N_k. Zanima nas distribucija slučajnog vektora $(N_k - N_{k-1}, S_{N_k} - S_{N_{k-1}})$. Pokazat ćemo da za $n \in \mathbb{N}$ na vjerojatnosnom prostoru:

$$(\Omega \cap (\cap_{i=1}^{n}\{N_i < \infty\}), \mathcal{F} \cap (\cap_{i=1}^{n}\{N_i < \infty\}), P(\cdot \mid \{ \cap_{i=1}^{n}\{N_i < \infty\}))$$

vrijedi:

$$(N_k - N_{k-1}, S_{N_k} - S_{N_{k-1}}) \overset{\mathcal{D}}{=} (N_1, S_{N_1}), \quad k \leq n$$

pa pitanje distribucije slučajnog vektora (N_1, S_{N_1}) postaje jedno od najvažnijih pitanja vezanih za slučajnu šetnju. Glavni rezultat koji vodi ka određivanju distribucije slučajnog vektora (N_1, S_{N_1}) je Baxterov teorem u čijem dokazu ključnu ulogu igra Wiener-Hopfova faktorizacija.

1 Konvolucija

Definicija 1. *Neka su μ i ν σ-konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Tada definiramo konvoluciju mjera μ i ν na sljedeći način:*

$$(\mu * \nu)(A) := \int_{x+y \in A} d(\mu \times \nu)(x, y), \quad A \in \mathcal{B}. \tag{1}$$

Budući da su mjere σ-konačne, iz definicije konvolucije primjenom Fubinijevog teorema odmah slijedi:

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - y) d\nu(y), \quad A \in \mathcal{B}. \tag{2}$$

Iz (2) koristeći Beppo-Levijev teorem i σ-aditivnost mjere μ pokaže se da je konvolucija $\mu * \nu$ mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Također, σ-konačnost, odnosno konačnost mjera μ i ν povlači σ-konačnost, odnosno konačnost mjere $\mu * \nu$.

Definirajmo funkciju $\Delta: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\Delta(A) := \begin{cases} 1 & , 0 \in A \\ 0 & , 0 \notin A \end{cases}, \quad A \in \mathcal{B}. \tag{3}$$

Sa (3) definirana je mjera na $\mathcal{B}$. Za konačnu mjeru χ na izmjerivom prostoru $(\mathrm{R}, \mathcal{B})$ definiramo Fourierovu transformaciju od χ kao kompleksnu funkciju realne varijable:

$$\hat{\chi}(\zeta) := \int_{\mathrm{R}} e^{i\zeta x} d\chi(x), \quad \zeta \in \mathrm{R}. \tag{4}$$

Teorem 2. *Neka su μ, ν i $\lambda \sigma$-konačne te χ i ψ konačne mjere na $(R, \mathcal{B})$. Neka je f Borelova funkcija. Tada vrijedi:*

(1) $\Delta * \mu = \mu$
(2) $\mu * \nu = \nu * \mu$
(3) $(\mu + \nu) * \lambda = \mu * \lambda + \mu * \lambda$
(4) $(\mu * \nu) * \lambda = \mu * (\nu * \lambda)$
(5) $\widehat{\chi * \psi} = \hat{\chi}\hat{\psi}$

Definicija 3. *Neka su $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ konačne mjere na $(R, \mathcal{B})$. Stavimo, $\alpha = \mu_1 - \nu_1$ i $\beta = \mu_2 - \nu_2$. Definiramo konvoluciju realnih mjera α i β na sljedeći način:*

$$\alpha * \beta = (\mu_1 - \nu_1) * (\mu_2 - \nu_2) := \mu_1 * \mu_2 - \mu_1 * \nu_2 - \nu_1 * \mu_2 + \nu_1 * \nu_2. \tag{5}$$

Konačnost mjera u definiciji je bitna jer izraz $\infty - \infty$ nije definiran.

Za $\alpha = \mu - \nu$, gdje su μ i ν konačne mjere na $(\mathrm{R}, \mathcal{B})$, definiramo:

$$\int_{\mathrm{R}} f d\alpha := \int_{\mathrm{R}} f d\mu - \int_{\mathrm{R}} f d\nu, \tag{6}$$

gdje je f Borelova funkcija integrabilna u odnosu na μ i ν. Iz (4) i (6) slijedi:

$$\hat{\alpha}(\zeta) = \hat{\mu}(\zeta) - \hat{\nu}(\zeta), \quad \zeta \in \mathrm{R}. \tag{7}$$

Lebesgueovom indukcijom pokaže se da je integral u odnosu na zbroj mjera jednak zbroju integrala, tj.:

$$\int_{\mathrm{R}} f d(\mu + \nu) = \int_{\mathrm{R}} f d\mu + \int_{\mathrm{R}} f d\nu, \tag{8}$$

u smislu da ako jedan od integrala postoji, tada postoji i drugi te su jednaki.

Teorem 4. *Neka su $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ konačne mjere na $(R, \mathcal{B})$. Definiramo $\alpha = \mu_1 - \nu_1$, $\beta = \mu_2 - \nu_2$* te *$\gamma = \mu_3 - \nu_3$. Tada vrijedi:*
a

(1) $\alpha * \beta = \beta * \alpha$
(2) $(\alpha + \beta) * \gamma = \alpha * \gamma + \alpha * \gamma$
(3) $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$
(4) $\widehat{\alpha * \beta} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$

Ako je funkcija $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monotono rastuća te neprekidna zdesna tada postoji jedinstvena Lebesgue-Stieltjesova mjera μ_F na $\mathcal{B}$ takva da vrijedi:

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a), \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad a < b. \tag{9}$$

Relacija (9) opravdava izraze oblika: F generira mjeru μ_F. Integriranje na prostoru mjere $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mu_F)$ integrabilne Borelove funkcije f često označujemo $\int_{\mathbb{R}} f dF$, a oznaku interpretiramo na sljedeći način:

$$\int_{\mathbb{R}} f dF := \int_{\mathbb{R}} f d\mu_F. \tag{10}$$

Neka je funkcija $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ograničena, rastuća i neprekidna zdesna. Tada definiramo:

$$\hat{F}(\zeta) := \hat{\mu}_F(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Definicija 5. *Neka su funkcije $F, G: R \to R$ ograničene, rastuće i neprekidne zdesna. Tada definiramo konvoluciju od F i G, u oznaci $F * G$, na sljedeći način:*

$$(F * G)(x) := (\mu_F * \mu_G)((-\infty, x]) = \int_R F(x-y)dG(y), \quad x \in R, \tag{12}$$

gdje je mjera μ_F inducirana sa F te mjera μ_G inducirana sa G u smislu relacije (9).

Pokaže se da je funkcija $F * G$ nenegativna, ograničena, rastuća i neprekidna zdesna te stoga generira mjeru μ_{F*G}, a zbog relacije (12) slijedi $\mu_{F*G} = \mu_F * \mu_G$. Također, zbog relacije (12), svojstva konvolucije mjera iz teorema 2 preslikavaju se na svojstva konvolucije rastućih i zdesna neprekidnih funkcija. Ulogu neutralnog elementa ima funkcija koju generira mjera Δ, a to je funkcija $F_\Delta = 1_{[0,\infty)}$. Funkciju F_Δ označavamo sa δ.

Definicija 6. *Neka su funkcije $F_1, F_2, G_1, G_2: R \to R$ ograničene, rastuće i neprekidne zdesna. Definiramo:*

$$(F_1 - G_1) * (F_2 - G_2) := F_1 * F_2 - F_1 * G_2 - G_1 * F_2 + G_1 * F_2. \tag{13}$$

Zbog relacije (13), svojstva konvolucije iz teorema 4 preslikavaju se na svojstva operacije definirane sa (13). Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable sa funkcijama distribucije F i G. Iz Fubinijevog teorema i (10) slijedi:

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= P\{X+Y \le t\} = \int_\Omega 1_{\{X+Y\le t\}} dP = \int_{x+y\le t} dP_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} 1_{\{x+y\le t\}} dP_X(x)dP_Y(y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{t-y} dP_X(x)dP_Y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-y)dG(y) = (F*G)(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{14}$$

Dakle, konvolucija funkcija distribucije je funkcija distribucije zbroja dviju nezavisnih slučajnih varijabli kojima su faktori konvolucije funkcije distribucije. Induktivno se ta tvrdnja može generalizirati.

Korolar 7. *Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable s funkcijama distribucije $F_1, \ldots, F_n$, tada je:*

$$F_{X_1 + \cdots + X_n} = F_1 * \cdots * F_n. \tag{15}$$

Neka je F funkcija distribucije. Zbog korolara 7 dobro je definirano potenciranje:

$$F^{0*} = \delta, \quad F^{n*} = F^{(n-1)*} * F, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{16}$$

Korolar 8. *Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s distribucijom F, tada je:*

$$F_{X_1 + \cdots + X_n} = F^{n*}. \tag{17}$$

Propozicija 9. *Neka je F funkcija distribucije. Za svaki $n \in N$ vrijedi:*

$$\hat{F}(\zeta)^n = \widehat{F^{n*}}(\zeta), \quad \zeta \in R. \tag{18}$$

Dokaz. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije F. Tada je:

$$\hat{F}(\zeta)^n = (\int_{\mathrm{R}} e^{i\zeta x} dF(x))^n = \mathrm{E}[e^{i\zeta X_1}]^n.$$

Iz korolara 8 slijedi:

$$\widehat{F^{n*}}(\zeta) = \int_{\mathrm{R}} e^{i\zeta x} dF^{n*}(x) = \mathrm{E}[e^{i\zeta(X_1 + \cdots + X_n)}] = \mathrm{E}[e^{i\zeta X_1}]^n.$$

∎

Neka je funkcija $F : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ rastuća i neprekidna zdesna te neka je μ_F pripadna generirana mjera. Neka je $q > 0$. Budući da je $\mu_{qF} = q\mu_F$, Lebesgueovom indukcijom pokaže se da za Borelovu funkciju f vrijedi:

$$\int_{\mathrm{R}} f d\mu_{qF} = q \int_{\mathrm{R}} f d\mu_F, \tag{19}$$

u smislu da ako jedan od integrala u (19) postoji da tada postoji i drugi te da su jednaki. Jednakost (19) pomoću (10) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\int_{\mathrm{R}} f d(qF) = q \int_{\mathrm{R}} f dF. \tag{20}$$

Iz (20) slijedi:

$$\widehat{qF} = q\hat{F}. \tag{21}$$

Propozicija 10. *Neka je F funkcija distribucije te $q \in (0, 1)$. Tada vrijedi:*

$$(\sum_{n=0}^{\infty} q^n F^{n*}) * (\delta - qF) = \delta. \tag{22}$$

Dokaz. Vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n F^{n*} = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} q^n F^{n*}.$$

Za dokaz jednakosti (22) dovoljno je dokazati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n F^{n*} = (\sum_{n=0}^{\infty} q^n F^{n*}) * qF. \tag{23}$$

Iz Beppo-Levijevog teorema, relacije (20) te (16) slijedi:

$$\begin{aligned}
[(\sum_{n=0}^{\infty} q^n F^{n*}) * qF](x) &= \int_{\mathrm{R}} \sum_{n=0}^{\infty} q^n F^{n*}(x-y) d(qF)(y) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \int_{\mathrm{R}} F^{n*}(x-y) d(qF)(y) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} \int_{\mathrm{R}} F^{n*}(x-y) dF(y) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} F^{(n+1)*}(x) \\
&= (\sum_{n=1}^{\infty} q^n F^{n*})(x), \quad x \in \mathrm{R}.
\end{aligned}$$

■

Neka je $\{\mu_n : n \geq 1\}$ niz mjera na $(\mathrm{R}, \mathcal{B})$. Definiramo:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{B}. \tag{24}$$

Može se pokazati da je sa (24) zadana mjera na izmjerivom prostoru $(\mathrm{R}, \mathcal{B})$. Sljedeća propozicija je generalizacija tvrdnje (8).

Propozicija 11. *Neka je f Borelova funkcija. Tada vrijedi:*

$$\int_R f d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_R f \mu_n, \tag{25}$$

u smislu, da ako jedan integral u (25) postoji da tada postoji i drugi te da su jednaki.

Neka je $\{F_n : n \geq 1\}$ niz rastućih funkcija koje su neprekidne zdesna. Neka je $\{q_n : n \geq 1\}$ niz nenegativnih realnih brojeva. Za svaki $n \in \mathrm{N}$ sa μ_{F_n} označimo pripadnu generiranu mjeru. Može se pokazati da je funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} q_n F_n$ rastuća te neprekidna zdesna pa stoga generira pripadnu mjeru $\mu_{\sum_{n=1}^{\infty} q_n F_n}$. Također, može se pokazati:

$$\mu_{\sum_{n=1}^{\infty} q_n F_n} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \mu_{F_n}. \tag{26}$$

Iz (20), (25) te (26) slijedi:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f d\Big(\sum_{n=1}^{\infty} q_n F_n\Big) &= \int_{\mathbb{R}} f d\mu_{\sum_{n=1}^{\infty} q_n F_n} = \int_{\mathbb{R}} f d\Big(\sum_{n=1}^{\infty} q_n \mu_{F_n}\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n \int_{\mathbb{R}} f d\mu_{F_n} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \int_{\mathbb{R}} f dF_n. \end{aligned} \tag{27}$$

2 Vremena zaustavljanja

2.1 Niz iteracija

Definicija 12. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjerivi prostor. Familija $F = \{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}\sigma$ - podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da je $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ za svaki $n \geq 0$ zove se filtracija.*

Definicija 13. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjerivi prostor s filtracijom F. Za slučajnu varijablu $\alpha : \Omega \to N \cup \{\infty\}$ kažemo da je vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju F ako vrijedi:*

$$\{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n, \text{ za sve } n \geq 1. \tag{28}$$

Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Neka je α konačno vrijeme zaustavljanja $(P\{\alpha < \infty\} = 1)$ obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n) : n \geq 1\}$. Budući da je $\mathcal{F}_n = (X_1, \ldots, X_n)^{-1}(\mathcal{B}^n)$, za svaki $n \in \mathrm{N}$ postoji $B_n \in B^n$ takav da vrijedi:

$$\{\alpha = n\} = \{(X_1, \ldots, X_n) \in B_n\}. \tag{29}$$

Definiramo: $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = \alpha$, $\beta(1) = \alpha(1)$. Neka je $\alpha(2)$ neka slučajna varijabla definirana na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ sa svojstvom:

$$\{\alpha(2) = n\} = \{(X_{\beta(1)+1}, \ldots, X_{\beta(1)+n}) \in B_n\}, \quad n \geq 1.$$

Definiramo: $\beta(2) := \beta(1) + \alpha(2)$. Za $k \geq 1$ i zadano $\beta(k)$: neka je $\alpha(k+1)$ neka slučajna varijabla definirana na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ sa svojstvom:

$$\{\alpha(k+1) = n\} = \{(X_{\beta(k)+1}, \ldots, X_{\beta(k)+n}) \in B_n\}, \quad n, k \geq 1. \tag{30}$$

Definiramo: $\beta(k+1) := \beta(k) + \alpha(k+1)$. Slijedi: $\beta(k) = \alpha(1) + \ldots + \alpha(k)$, $k \geq 1$, uz dogovor $\beta(0) = 0$.

Definicija 14. *Niz slučajnih varijabli $\{\beta(n) : n \geq 0\}$ zovemo niz iteracija generiran vremenom zaustavljanja α.*

U uvodu smo na izmjerivom prostoru $(\Omega \cap \left(\cap_{i=1}^{k-1} \{N_i < \infty\} \right), \mathcal{F} \cap \left(\cap_{i=1}^{k-1} \{N_i < \infty\} \right))$ definirali:

$$N_k = \inf \{n > N_{k-1} : S_n > S_{N_{k-1}}\}, \ k \geq 1, \text{ uz dogovor } \inf \varnothing = \infty \text{ i } N_0 := 0,$$

gdje je:

$$N_1 \equiv N := \inf \{n > 0 : S_n > 0\}.$$

Budući da je:

$$\{N = n\} = \{X_1 \leq 0, \ldots, X_1 + \ldots + X_{n-1} \leq 0, X_1 + \ldots + X_n > 0\}, \tag{31}$$

slijedi da je N vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n), n \in \mathbb{N}\}$ pa postoji $B_n \in \mathcal{B}^n$ takav da je:

$$\{N = n\} = \{(X_1, \ldots, X_n) \in B_n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Iz (31) i (32) slijedi:

$$\{X_1 \leq 0, \ldots, X_1 + \ldots + X_{n-1} \leq 0, X_1 + \ldots + X_n > 0\} = \{(X_1, \ldots, X_n) \in B_n\} \tag{33}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz (33) slijedi:

$$\begin{aligned}
\{N_k - N_{k-1} = n\} &= \{N_k = N_{k-1} + n\} = \bigcup_{l=0}^{\infty} \{N_{k-1} = l, N_k = n + l\} \\
&= \bigcup_{l=0}^{\infty} \{N_{k-1} = l, X_{l+1} \leq 0, \ldots, X_{l+1} + \ldots + X_{l+n-1} \leq 0, X_{l+1} + \ldots + X_{l+n} > 0\} \\
&= \bigcup_{l=0}^{\infty} \{N_{k-1} = l, (X_{l+1}, \ldots, X_{l+n}) \in B_n\} \\
&= \{(X_{N_{k-1}+1}, \ldots, X_{N_{k-1}+n}) \in B_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Vidimo da slučajna varijabla $N_k - N_{k-1}$ zadovoljava jednakost (30) pa stoga slijedi da je niz slučajnih varijabli $\{N_k : k \geq 0\}$ niz iteracija generiran vremenom zaustavljanja N. Dakle, dokazali smo sljedeću lemu.

Lema 15. *Niz slučajnih varijabli $\{N_k : k \geq 0\}$ je niz iteracija generiran vremenom zaustavljanja N.*

Sljedeći teorem kaže da se niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli pomoću konačnog vremena zaustavljanja razlaže na nezavisne i jednako distribuirane slučajne elemente. Dokaz teorema može se pronaći u [1].

Teorem 16. *Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Neka je α konačno vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\sigma(X_1, \ldots, X_n) : n \geq 1\}$, a $\{\beta(k) : k \geq 0\}$ niz iteracija generiran s α. Tada su slučajni elementi:*

$$\{(\beta(k) - \beta(k-1), X_{\beta(k-1)+1}, \ldots, X_{\beta(k)}) : k \geq 1\}$$

nezavisni i jednako distribuirani.

U slučaju da α nije gotovo sigurno konačno vrijeme zaustavljanja, tj. $P\{\alpha = \infty\} > 0$, iz teorema 16 slijedi da su:

$$\{(\beta(k) - \beta(k-1), X_{\beta(k-1)+1}, \ldots, X_{\beta(k)}) : k \leq n\}$$

nezavisni i jednako distribuirani slučajni elementi na vjerojatnosnom prostoru:

$$\left(\{\beta(n) < \infty\}, \mathcal{F} \cap \{\beta(n) < \infty\}, P(\,\cdot \mid \{\beta(n) < \infty\})\right)$$

Posljedice teorema 16 su značajne, a iznosimo ih u sljedeća tri korolara čiji dokazi se mogu pronaći u [1].

Korolar 17. *Slučajni 2-dimenzionalni vektori*

$$\{(\beta(k) - \beta(k-1), S_{\beta(k)} - S_{\beta(k-1)}) : k \geq 1\}$$

su nezavisni i jednako distribuirani.

Korolar 18. *Neka je $\varphi : R \to R$ Borelova funkcija. Tada je:*

$$\{Y_k := \sum_{\beta(k-1)+1}^{\beta(k)} \varphi(X_n) : k \geq 1\}$$

niz nezavisnih i jednako distriburianih slučajnih varijabli.

Korolar 19. *Vrijede sljedeće tvrdnje:[label={(\roman*)}]*

(1) $\{\beta(k) - \beta(k-1) : k \geq 1\}$ je niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

(2) $\{S_{\beta(k)} - S_{\beta(k-1)} = X_{\beta(k-1)+1} + \ldots + X_{\beta(k)} : k \geq 1\}$ je niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli $(S_0 = 0)$.

(3) $\{\beta(k) : k \geq 0\}$ je proces obnavljanja.

2.2 Dualna vremena zaustavljanja

Neka je $\mathcal{H} = \{X_n : n \geq 1\}$ slučajan proces, gdje je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\mathrm{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, P)$. Ovdje su:

$$P(A) \equiv P\{\mathcal{H} \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}^\infty,$$
$$X_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n, \quad (x_1, x_2, \ldots) \in \mathrm{R}^\infty, n \in \mathrm{N}.$$

Neka je α vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n) : n \geq 1\}$. Neka je $\{\beta(n) : n \geq 0\}$ pripadni niz iteracija. Definiramo:

$$M_\alpha(\omega) := \{\beta(n)(\omega) : n \geq 0\}, \quad \omega \in \mathrm{R}^\infty. \tag{34}$$

M_α zovemo slučajni skup niza iteracija generiranog vremenom zaustavljanja α, a $M_\alpha(\omega)$ nije ništa drugo nego vrijednosti niza iteracija $\{\beta(n) : n \geq 0\}$ izračunatih u ω. Definirajmo preslikavanja $r_n : \mathrm{R}^\infty \to \mathrm{R}^\infty$ za $n \in \mathrm{N}$ na sljedeći način:

$$r_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_{n+1}, \ldots), \quad (x_1, x_2, \ldots) \in \mathrm{R}^\infty. \tag{35}$$

Definicija 20. *Neka su τ i η vremena zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$. Za vrijeme zaustavljanja τ kažemo da je dualno za η ako za svaki $n \in N$ vrijedi:*

$$\{\omega : n \in M_\tau(\omega)\} = \{\omega : n < \eta \circ r_n(\omega)\}. \tag{36}$$

Neka je ω fiksirana točka. Tada je n vrijednost neke varijable niza iteracija generiranog vremenom zaustavljanja τ izračunate u točki ω ako i samo ako gledajući prvih n trenutaka promatranog procesa unatrag (obzirom na točku ω) ne opažamo fenomen kojeg prati vrijeme zaustavljanja η.

Budući da je definicija dualnosti komplicirana, od izuzetne je važnosti naći neku jednostavniju karakterizaciju. U tu svrhu za fiksni $n \in \mathrm{N}$ definiramo:

$$L(\tau, n)(\omega) := \max\{i \leq n : i \in M_\tau(\omega)\}. \tag{37}$$

Iz korolara 19 slijedi da je niz iteracija proces obnavljanja pa $L(\tau, n)$ možemo promatrati kao vrijeme početka zadnjeg obnavljanja do trenutka n koje nije završilo.

Sljedeći teorem daje jednostavniju karakterizaciju dualnosti i ključan je za daljnja razmatranja. Dokaz teorema moguće je pronaći u [2].

Teorem 21. *Neka su τ i η vremena zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$. Tada je τ dualno za η ako i samo ako vrijedi:*

$$n - L(\tau, n) = L(\eta, n) \circ r_n, \quad \forall n \in N. \tag{38}$$

Prva značajna i pomalo neočekivana posljedica teorema 21 kaže da je definicija dualnosti simetrična.

Korolar 22. *Ako je τ dualno vrijeme zaustavljanja za η tada je i η dualno vrijeme zaustavljanja za τ.*

Dokaz. Iz teorema 21 i $r^{-1} = r_n$, $n \in \mathrm{N}$, slijedi:

$$
\begin{aligned}
\tau \text{ je dualno za } \eta \iff & n - L(\tau,n) = L(\eta,n)\circ r_n, \quad n \in \mathrm{N}\\
\iff & n - L(\tau,n)\circ r_n = L(\eta,n), \quad n \in \mathrm{N}\\
\iff & n - L(\eta,n) = L(\tau,n)\circ r_n, \quad n \in \mathrm{N}\\
\iff & \eta \text{ je dualno za } \tau.
\end{aligned}
$$

■

Iz nezavisnost i jednake distribuiranosti varijabli $\{X_n : n \geq 1\}$ slijedi:

$$\mathcal{H} \overset{\mathcal{D}}{=} r_n \circ \mathcal{H}, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{39}$$

Iz relacije (39) dobivamo:

$$P = P \circ r_n^{-1}, n \in \mathrm{N}. \tag{40}$$

Direktna posljedica teorema 21 i jednakosti (40) je sljedeći korolar.

Korolar 23. *Neka su τ i η dualna vremena zaustavljanja. Za svaki $n \in N$ vrijedi:*

$$L(\eta,n) \overset{\mathcal{D}}{=} n - L(\tau,n). \tag{41}$$

Lema 24. *Neka su τ i η dualna vremena zaustavljanja. Za svaki $n \in N$ vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{L(\tau,n)} X_i \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=L(\eta,n)+1}^{n} X_i. \tag{42}$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathrm{N}$ fiksan. Iz relacije (40) i teorema 21 slijedi:

$$\sum_{i=1}^{L(\tau,n)} X_i \overset{\mathcal{D}}{=} \Big(\sum_{i=1}^{L(\tau,n)} X_i\Big)\circ r_n = \sum_{i=1}^{L(\tau,n)\circ r_n} X_i \circ r_n = \sum_{i=1}^{n-L(\eta,n)} X_i \circ r_n. \tag{43}$$

Budući da za $i = 1, \ldots, n$ vrijedi $X_i \circ r_n = X_{n-i+1}$, iz (43) slijedi:

$$\sum_{i=1}^{n-L(\eta,n)} X_i \circ r_n = \sum_{i=1}^{n-L(\eta,n)} X_{n-i+1} = \sum_{i=L(\eta,n)+1}^{n} X_i. \tag{44}$$

Iz (43) i (44) slijedi tvrdnja leme. ■

Propozicija 25. *Neka su τ i η dualna vremena zaustavljanja. Tada za $u \in (0, 1)$ vrijedi:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} E[u^\eta]^n, \tag{45}$$

odnosno:

$$\frac{1 - E[u^\tau]}{1 - u} = \frac{1}{1 - E[u^\eta]}. \tag{46}$$

Dokaz.

Iz relacije (40) slijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{r_n^{-1}\left(\tau^{-1}((n,\infty))\right)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau \circ r_n > n\} \tag{47}$$

Iz (36) te korolara 22 slijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau \circ r_n > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{n \in M_\eta\}. \tag{48}$$

Budući da je $u \in (0, 1)$, za proizvoljno vrijeme zaustavljanja κ vrijedi:

$$\mathrm{E}[u^\kappa] = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\kappa = n\} + u^\infty P\{\kappa = \infty\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\kappa = n\}. \tag{49}$$

Definirajmo funkcije f_n na N_0 na sljedeći način:

$$f_n(k) := u^n P\{\eta_k = n\}, \quad k, n \in \mathrm{N}_0,$$

gdje je $\{\eta_k : k \in \mathrm{N}_0\}$ proces iteracija generiran vremenom zaustavljanja η. Neka je ν brojeća mjera na $(\mathrm{N}_0, \mathcal{P}(\mathrm{N}_0))$. Koristeći Beppo-Levijev teorem, definicijsko svojstvo niza iteracija primijenjeno na $\{\eta_n : n \geq 0\}$, korolar 19 (da su $\alpha_n := \eta_n - \eta_{n-1}$, $n \geq 1$, nezavisne i jednako distribuirane) te relaciju (49) raspišimo (48):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau \circ r_n > n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{n \in M_\eta\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{\eta_k = n\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \sum_{k=0}^{\infty} P\{\eta_k = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathrm{N}_0} f_n d\nu \\
&= \int_{\mathrm{N}_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n d\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}[u^{\eta_k}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}[u^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}[u^\eta]^k.
\end{aligned} \tag{50}$$

Iz (17) i (20) slijedi tvrdnja (45). Budući da je $u \in (0,1)$ slijedi $1 - u^{\eta} > 0$. Dakle, vrijedi $\mathrm{E}[u^{\eta}] \in (0,1)$. Slijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}[u^{\eta}]^n = \frac{1}{1 - \mathrm{E}[u^{\eta}]}. \tag{51}$$

Stavimo: $p_k = P\{\tau = k\}$, $k \in N_0$. Definirajmo nove funkcije f_n na N_0 na sljedeći način:

$$f_n(k) := \begin{cases} u^n p_k & , k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \quad k \in \mathrm{N}_0.$$

Tada iz Beppo-Levijevog teorema i (49) slijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau > n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} u^n p_k = \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathrm{N}_0} f_n dv \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \int_{\mathrm{N}_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n dv = \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} f_n)(k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} u^n p_k = \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{k=0}^{\infty} u^k p_k \sum_{n=0}^{\infty} u^n \\ &= \frac{1}{1-u} - (\sum_{k=0}^{\infty} u^k p_k)\frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-u}(1 - \mathrm{E}[u^{\tau}]). \end{aligned} \tag{52}$$

Iz (45), (51) i (52) slijedi (46).

■

3 Slučajna šetnja

Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ nezavisan i jednako distribuiran niz slučajnih varijabli. Prisjetimo se da je sa $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathrm{N}$, definiran slučajni proces kojeg zovemo slučajna šetnja. Slučajne varijable $\{X_n : n \geq 1\}$ nazivamo koracima slučajne šetnje. Funkciju distribucije slučajne varijable X_1 zovemo distribucijom koraka.

Definicija 26. *Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ nezavisan i jednako distribuiran niz slučajnih varijabli. Definiramo:*

$$\begin{aligned} N &:= \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\} \\ \bar{N} &:= \inf\{n \geq 1 : S_n \leq 0\}. \end{aligned} \tag{53}$$

N zovemo prvo striktno uzlazno vrijeme, a $\bar{N}$ prvo silazno vrijeme slučajne šetnje $\{S_n : n \geq 0\}$.

Sa (53) definirana su vremena zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n) : n \geq 1\}$.

Slično kao što smo u lemi 15 pokazali da je niz slučajnih varijabli $\{N_k : k \geq 0\}$ niz iteracija generiran vremenom zaustavljanja N, može se pokazati i analogna tvrdnja za vrijeme zaustavljanja $\bar{N}$.

Lema 15 i korolar 17 opravdavaju sljedeću tvrdnju iz uvoda:

Teorem 27. *Na vjerojatnosnom prostoru:*

$$(\Omega \cap (\cap_{i=1}^{n}\{N_i < \infty\}), \mathcal{F} \cap (\cap_{i=1}^{n}\{N_i < \infty\}), P(\cdot \mid \{\cap_{i=1}^{n}\{N_i < \infty\}))$$

vrijedi:

$$(N_k - N_{k-1}, S_{N_k} - S_{N_{k-1}}) \overset{\mathcal{D}}{=} (N_1, S_{N_1}), \quad k \leq n, \quad n \in N. \tag{54}$$

Lema 28. *N je dualno vrijeme zaustavljanja za $\bar{N}$.*

Dokaz.

Neka je n fiksan prirodni broj te $\omega_0 \in \{\omega : n \in M_N(\omega)\}$, slijedi:

$$\begin{aligned} n \in M_N(\omega_0) &\iff \exists k \in \mathrm{N},\ n = N_k(\omega_0) \\ &\iff S_n(\omega_0) > S_j(\omega_0), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \\ &\iff S_{n-j}(r_n\omega_0) > 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \\ &\iff S_j(r_n\omega_0) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ &\iff n < \bar{N} \circ r_n(\omega_0) \\ &\iff \omega_0 \in \{\omega : n < \bar{N} \circ r_n(\omega)\} \end{aligned}$$

∎

4 Wiener-Hopfova faktorizacija

Neka je $(\mathrm{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, P')$ vjerojastnosni prostor na kojemu je niz koordinatnih slučajnih varijabli $\{X'_n : n \geq 1\}$ nezavisan i jednako distribuiran. Neka je $(\Omega'', \mathcal{F}'', P'')$ vjerojatnosni prostor induciran geometrijskom slučajnom varijablom T'' s parametrom $p \in (0, 1)$ tako da vrijedi : $P\{T \geq n\} = q^n$, $q = 1 - p$. Definiramo:

$$\begin{aligned} &(\Omega, \mathcal{F}, P) := (\Omega' \times \Omega'', \mathcal{F}' \times \mathcal{F}'', P' \times P''), \\ &X_n(\omega) = X_n(\omega', \omega'') := X'_n(\omega'), \quad \omega \in \Omega, n \in \mathrm{N}, \\ &T(\omega) = T(\omega', \omega'') := T''(\omega''), \quad \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Sljedeća lema je tehničkog karaktera, a njen dokaz može se pronaći u [1].

Lema 29. *Neka su $Y_1, \ldots, Y_n$ nezavisne, jednako distribuirane, nenegativne cjelobrojne slučajne varijable nezavisne s geometrijskom slučajnom varijablom Y. Tada vrijedi:*

$$P\{Y \geq Y_1 + \ldots + Y_n\} = P\{Y \geq Y_1\}^n. \tag{55}$$

Sljedeća lema je svojevrsno poopćenje leme 24.

Lema 30. *Neka su τ i η dualna vremena zaustavljanja. Vrijedi:*

$$\sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{L(\eta,T)} X_i. \tag{56}$$

Dokaz. Iz korolara 24 slijedi:

$$\sum_{i=1}^{L(\eta,n)} X_i \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=L(\tau,n)+1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{57}$$

Budući da su slučajne varijable $L(\tau, n)$ i $L(\eta, n)\mathcal{F}_n$-izmjerive za $n \in \mathbb{N}$ slijedi da su nezavisne sa slučajnom varijablom T. Iz (57) slijedi:

$$\begin{aligned}
P\{\sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i \leq x\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} P\{\sum_{i=k+1}^{n} X_i \leq x, T = n, L(\tau, n) = k\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} P\{\sum_{i=k+1}^{n} X_i \leq x, L(\tau, n) = k\}P\{T = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\sum_{i=L(\tau,n)+1}^{n} X_i \leq x\}P\{T = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\sum_{i=1}^{L(\eta,n)} X_i \leq x\}P\{T = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\sum_{i=1}^{L(\eta,n)} X_i \leq x, T = n\} = P\{\sum_{i=1}^{L(\eta,T)} X_i \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

■

Za vrijeme zaustavljanja γ definiramo:

$$H_{\gamma,q}(x) := P\{S_\gamma \leq x, \gamma \leq T\}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{58}$$

Sljedeća lema nam je potrebna kako bi dokazali lemu 32, a njen dokaz može se pronaći u [1].

Lema 31. *Neka je $\{\gamma(i) : i \geq 0\}$ proces iteracija generiran vremenom zaustavljanja γ. Za $x_i \in R$, $i = 1, \ldots k$, $k \in N$ vrijedi:*

$$P(\bigcap_{i=1}^{k} \{S_{\gamma(i)} - S_{\gamma(i-1)} \leq x_i\}, \gamma(k) \leq T) = \prod_{i=1}^{k} H_{\gamma,q}(x_i).$$

Lema 32. *Neka je γ vrijeme zaustavljanja. Vrijedi:*

$$P\{\sum_{i=1}^{L(\gamma,T)} X_i \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} H_{\gamma,q}^{k*}(x)(1 - P\{\gamma \leq T\}), \quad x \in R. \tag{59}$$

Dokaz. Iz leme 31 koristeći korolar 19 i lemu 30 dobivamo:

$$P(\bigcap_{i=1}^{k} \{S_{\gamma(i)} - S_{\gamma(i-1)} \leq x_i\} \,|\, \gamma(k) \leq T) = \prod_{i=1}^{k} \frac{H_{\gamma,q}(x_i)}{P\{\gamma \leq T\}}, \quad k \in \mathrm{N}. \tag{60}$$

Iz korolara 19 slijedi da su slučajne varijable $S_{\gamma(i)} - S_{\gamma(i-1)}$, $i = 1, \ldots, k$ nezavisne i jednako distribuirane na vjerojatnosnom prostoru:

$$(\{\gamma(k) \leq T\}, \mathcal{F} \cap \{\gamma(k) \leq T\}, P\{\,\cdot\,|\gamma(k) \leq T\}), \quad k \in \mathrm{N}.$$

Dakle, iz (60) slijedi da je distribucija slučajne varijable $S_{\gamma(i)} - S_{\gamma(i-1)}$ dana sa:

$$G(x) = \frac{H_{\gamma,q}(x)}{P\{\gamma \leq T\}}, \quad x \in \mathrm{R}. \tag{61}$$

Budući da je $S_{\gamma(k)} = \sum_{i=1}^{k}(S_{\gamma(i)} - S_{\gamma(i-1)})$, iz relacija (17) i (61) slijedi:

$$\begin{aligned}
P\{\sum_{i=1}^{L(\gamma,T)} X_i \leq x\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\sum_{i=1}^{\gamma(k)} X_i \leq x, \gamma(k) \leq T < \gamma(k+1)\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(P\{S_{\gamma(k)} \leq x, \gamma(k) \leq T\} - P\{S_{\gamma(k)} \leq x, \gamma(k+1) \leq T\}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{\gamma,q}^{k*}(x) - H_{\gamma,q}^{k*}(x) P\{\gamma \leq T\}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} H_{\gamma,q}^{k*}(x)(1 - P\{\gamma \leq T\}).
\end{aligned}$$

■

Dokaz sljedeće leme može se pronaći u [1].

Lema 33. *Neka je γ vrijeme zaustavljanja. Tada su slučajne varijable:*

$$\sum_{i=1}^{L(\gamma,T)} X_i, \qquad \sum_{i=L(\gamma,T)+1}^{T} X_i$$

nezavisne.

Lema 33 posljednji je rezultat koji nam je potreban kako bi dokazali Wiener-Hopfovu faktorizaciju te ujedno i prvi korak u dokazu. Budući da smo dokazali sve potrebne rezultate, dokaz Wiener-Hopfove faktorizacije ići će poprilično glatko.

Teorem 34. *[Wiener-Hopf] Neka su τ i η dualna vremena zaustavljanja. Funkciju koraka slučajne šetnje F možemo faktorizirati na sljedeći način:*

$$\delta - qF = (\delta - H_{\tau,q}) * (\delta - H_{\eta,q}). \tag{62}$$

Dokaz.

Vrijedi:

$$S_T = \sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i + \sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i. \tag{63}$$

Iz (63), koristeći lemu 33 i relaciju (14) dobivamo:

$$F_{S_T} = F_{\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i} * F_{\sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i}. \tag{64}$$

Iz (64) koristeći lemu 30 dobivamo:

$$F_{S_T} = F_{\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i} * F_{\sum_{i=1}^{L(\eta,T)} X_i}. \tag{65}$$

Iz (65) primjenjujući lemu 32 dobivamo:

$$F_{S_T} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} H_{\tau,q}^{n*}(1 - P\{\tau \le T\})\Big) * \Big(\sum_{n=0}^{\infty} H_{\eta,q}^{n*}(1 - P\{\eta \le T\})\Big). \tag{66}$$

Uvedimo oznake:

$$C_\tau(x) := P\{S_\tau \le x \mid \tau \le T\}, \quad x \in \mathrm{R}, \quad q_\tau := P\{\tau \le T\} = 1 - p_\tau,$$
$$C_\eta(x) := P\{S_\eta \le x \mid \eta \le T\}, \quad x \in \mathrm{R}, \quad q_\eta := P\{\eta \le T\} = 1 - p_\eta.$$

Iz činjenice da vrijedi:

$$q_\tau C_\tau = H_{\tau,q}, \quad q_\eta C_\eta = H_{\eta,q},$$

iz (14) slijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} H_{\tau,q}^{n*}(1 - P\{\tau \le T\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_\tau q_\tau^n C_\tau^{n*}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} H_{\eta,q}^{n*}(1 - P\{\eta \le T\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_\eta q_\eta^n C_\eta^{n*}. \end{aligned} \tag{67}$$

Iz (66) i (67) slijedi:

$$F_{S_T} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} p_\tau q_\tau^n C_\tau^{n*}\Big) * \Big(\sum_{n=0}^{\infty} p_\eta q_\eta^n C_\eta^{n*}\Big). \tag{68}$$

S druge strane, iz korolara 8 i nezavisnosti slučajne varijable T sa slučajnom šetnjom slijedi:

$$\begin{aligned} F_{S_T}(x) &= P\{S_T \le x\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n \le x, T = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n \le x\} P\{T = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} pq^n F^{n*}(x), \quad x \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{69}$$

Iz (68) i (69) slijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} pq^n F^{n*} = \sum_{n=0}^{\infty} p_\tau q_\tau^n C_\tau^{n*} * \sum_{n=0}^{\infty} p_\eta q_\eta^n C_\eta^{n*}. \tag{70}$$

Izraz (70) konvoluiramo sa $\delta - qF$. Iz asocijativnosti konvolucije i propozicije 10 slijedi:

$$p\delta = \sum_{n=0}^{\infty} p_\tau q_\tau^n C_\tau^{n*} * \sum_{n=0}^{\infty} p_\eta q_\eta^n C_\eta^{n*} * (\delta - qF). \tag{71}$$

Izraz (71) konvoluiramo redom sa $\delta - q_\tau C_\tau$ i $\delta - q_\eta C_\eta$. Iz komutativnosti i asocijativnosti konvolucije te propozicije 10 slijedi:

$$p(\delta - q_\tau C_\tau) * (\delta - q_\eta C_\eta) = p_\tau p_\eta (\delta - qF). \tag{72}$$

Budući da su τ i T nezavisne slučajne varijable, a $q \in (0, 1)$, slijedi:

$$\begin{aligned} P\{\tau \le T\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n, n \le T\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n\} P\{n \le T\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n\} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n\} q^n + q^{\infty} P\{\tau = \infty\} \\ &= \mathrm{E}[q^\tau]. \end{aligned} \tag{73}$$

Ista tvrdnja vrijedi i za η. Iz (73) i propozicije 25 slijedi:

$$p_\tau p_\eta = (1 - P\{\tau \le T\})(1 - P\{\eta \le T\}) = (1 - \mathrm{E}[q^\tau])(1 - \mathrm{E}[q^\eta]) = 1 - q = p. \tag{74}$$

Iz (72) i (74) slijedi tvrdnja teorema.

∎

5 Baxterove jednakosti

U ovom poglavlju primjenom Wiener-Hopfove faktorizacije na dualna vremena zaustavljanja N i $\bar{N}$ dokazujemo Baxterove jednakosti. Prije nego li iskažemo Baxterov teorem potrebno je dokazati nekoliko lema. Označimo:

$$H_q(x) := P\{S_N \le x, N \le T\}, \quad x \in \mathrm{R},$$
$$\bar{H}_q(x) := P\{S_{\bar{N}} \le x, \bar{N} \le T\}, \quad x \in \mathrm{R}.$$

Iz nezavisnosti slučajne varijable T sa slučajnim varijablama $\{X_n : n \ge 1\}$ slijedi:

$$H_q(x) = P\{S_N \le x, N \le T\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \le x, n \le T, N = n\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \le x, N = n\} q^n, \quad x \in \mathrm{R}.$$

Iz (75) primjenom relacije (27) slijedi:

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dH_q(x) &= \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} d\Big(\sum_{n=1}^{\infty} q^n P\{S_n \le \ \cdot\ , N = n\}\Big)(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dP\{S_n \le \ \cdot\ , N = n\}(x), \quad \zeta \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{76}$$

Lebesgueovom indukcijom pokaže se da za Borelovu funkciju f i proizvoljan $n \in \mathrm{N}$ vrijedi:

$$\int_{\{n\} \times (0,\infty)} f(x) dF_{(N,S_N)}(y,x) = \int_{(0,\infty)} f(x) dP\{S_n \le \ \cdot\ , N = n\}(x). \tag{77}$$

u smislu da ako jedan od integral u (77) postoji da tada postoji i drugi i da su jednaki. Koristeći (77) i teorem o dominiranoj konvergenciji kao i činjenicu da je na skupu $\{N = n\}$, $S_n > 0$, $n \in \mathrm{N}$, slijedi:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[q^N e^{i\zeta S_N}] &= \mathrm{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} q^n e^{i\zeta S_n} 1_{\{N=n\}}\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \mathrm{E}[e^{i\zeta S_n} 1_{\{N=n\}}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \int_{\Omega} e^{i\zeta S_n} 1_{\{N=n\}} dP \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \int_{\{n\} \times (0,\infty)} e^{i\zeta x} dF_{(N,S_N)}(y,x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dP\{S_n \le \ \cdot\ , N = n\}(x), \quad \zeta \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{78}$$

Iz (76) i (78) slijedi:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[q^N e^{i\zeta S_N}] &= \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dH_q(x), \quad \zeta \in \mathrm{R}, \\ \mathrm{E}[q^{\bar{N}} e^{i\zeta S_{\bar{N}}}] &= \int_{(-\infty,0]} e^{i\zeta x} d\bar{H}_q(x), \quad \zeta \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{79}$$

Druga jednakost u (79) pokazuje se analogno kao prva.

Lema 35. *Vrijedi:*

$$\begin{aligned} \hat{H}_q(\zeta) &= E[q^N e^{i\zeta S_N}], \quad \zeta \in R, \\ \bar{H}_q(\zeta) &= E[q^{\bar{N}} e^{i\zeta S_{\bar{N}}}], \quad \zeta \in R. \end{aligned} \tag{80}$$

Dokaz. Budući da je $H_q(x) = 0$ za $x \leq 0$ iz relacije (9) slijedi da je mjera generirana sa H_q koncentrirana na $(0, \infty)$ pa je $\int_{(-\infty, 0]} e^{i\zeta x} dH_q(x) = 0$. Iz relacije (79) slijedi:

$$\hat{H}_q(\zeta) = \int_{\mathrm{R}} e^{i\zeta x} dH_q(x) = \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dH_q(x) = \mathrm{E}[q^N e^{i\zeta S_N}], \quad \zeta \in \mathrm{R}.$$

Druga jednakost u (79) pokaže se analogno koristeći činjenicu da je mjera generirana sa $\bar{H}_q$ koncentrirana na $(-\infty, 0]$. ∎

Lema 36. *Neka je G funkcija distribucije te neka je $q \in (0, 1)$, $p = 1 - q$. Vrijedi:*

$$log \frac{p}{1 - q\hat{G}(\zeta)} = \int_R (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} G^{n*})(x), \quad \zeta \in R. \tag{81}$$

Dokaz. Budući da je $|\hat{G}(\zeta)| \leq 1$, $\zeta \in \mathrm{R}$, te $|q| < 1$ slijedi $|\hat{G}(\zeta) q| < 1$. Razvojem u Taylorov red dobivamo:

$$\begin{aligned} \log \frac{p}{1 - q\hat{G}(\zeta)} &= \log(1 - q) - \log(1 - q\hat{G}(\zeta)) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \hat{G}^n(\zeta). \end{aligned} \tag{82}$$

Budući da iz korolara 8 slijedi da je G^{n*} funkcija distribucije za $n \in \mathrm{N}$, iz propozicije 9 i relacije (27) slijedi:

$$\begin{aligned} -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \hat{G}^n(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{\mathrm{R}} (-1) dG^{n*}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{\mathrm{R}} e^{i\zeta x} dG^{n*}(x) \\ &= \int_{\mathrm{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} G^{n*})(x). \end{aligned} \tag{83}$$

Iz (82) i (83) slijedi tvrdnja leme. ∎

Baxterove jednakosti izražavaju $\mathrm{E}[q^N e^{i\zeta S_N}]$ u terminima funkcija distribucije F^{n*}, $n \in \mathrm{N}$, te predstavljaju značajan korak pri određivanju distribucije slučajnog vektora (N, S_N).

Teorem 37. *[Baxter] Za $0 < q < 1$, $\zeta \in R$ vrijedi:*

$$\begin{aligned} 1 - E[q^N e^{i\zeta S_N}] &= exp\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dF^{n*}(x) \}, \\ 1 - E[q^{\bar{N}} e^{i\zeta S_{\bar{N}}}] &= exp\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{(-\infty,0]} e^{i\zeta x} dF^{n*}(x) \}. \end{aligned} \tag{84}$$

Dokaz.

Uvedimo oznake:

$$H_q(x) := P\{S_N \le x, N \le T\}, q_+ := P\{N \le T\}, p_+ := 1 - q_+,$$
$$\bar{H}_q(x) := P\{S_{\bar{N}} \le x, \bar{N} \le T\}, q_- := P\{\bar{N} \le T\}, p_- := 1 - q_-,$$
$$C_+(x) := P\{S_N \le x | N \le T\} = H_q(x)/q_+,$$
$$C_-(x) := P\{S_{\bar{N}} \le x | \bar{N} \le T\} = \bar{H}_q(x)/q_-.$$

Budući da iz leme 28 slijedi da su N i $\bar{N}$ dualna vremena zaustavljanja, iz teorema 34 slijedi:

$$\delta - qF = (\delta - H_q) * (\delta - \bar{H}_q). \tag{85}$$

Također, budući da je $0 < q, q_+, q_- < 1$, analogno kao (74) pokaže se:

$$p = p_+ p_- \tag{86}$$

Iz relacija (7), (21) i (85), teorema 4 te definicije 1.6 slijedi:

$$1 - q\hat{F}(\zeta) = (1 - q_+\hat{C}_+(\zeta))(1 - q_-\hat{C}_-(\zeta)), \quad \zeta \in \mathrm{R}. \tag{87}$$

Budući da su F, C_+, C_- funkcije distribucije i $0 < q, q_+, q_- < 1$, iz relacija (87) i (86) slijedi:

$$\frac{p}{1 - q\hat{F}(\zeta)} = \left(\frac{p_+}{1 - q_+\hat{C}_+(\zeta)}\right)\left(\frac{p_-}{1 - q_-\hat{C}_-(\zeta)}\right), \quad \zeta \in \mathrm{R}. \tag{88}$$

Logaritmiranjem relacije (88) i primjenom leme 36 slijedi:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathrm{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*})(x) = \\ &= \int_{\mathrm{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} C_+^{n*})(x) + \int_{\mathrm{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} C_-^{n*})(x) \\ &= \int_{\mathrm{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} C_+^{n*} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} C_-^{n*})(x), \quad \zeta \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{89}$$

Iz korolara 8, relacija (26) i (86) slijedi:

$$\begin{aligned} \mu_{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*}}(\mathrm{R}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \mu_{F^{n*}}(\mathrm{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \\ &= -\log(1-q) = -\log(p) = -\log(p_+ p_-) \\ &= -\log(p_+) - \log(p_-) = -\log(1 - q_+) - \log(1 - q_-) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} \mu_{C_+^{n*}}(\mathrm{R}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} \mu_{C_-^{n*}}(\mathrm{R}) \\ &= (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} \mu_{C_+^{n*}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} \mu_{C_-^{n*}})(\mathrm{R}). \end{aligned} \tag{90}$$

Budući da je $\mu_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}F^{n*}}(\mathrm{R}) = -\log(1-q) < \infty$, iz relacija (89) i (90) slijedi:

$$\int_{\mathrm{R}} e^{i\zeta x} d(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}F^{n*})(x) = \int_{\mathrm{R}} e^{i\zeta x} d(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_+^n}{n}C_+^{n*} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_-^n}{n}C_-^{n*})(x), \quad \zeta \in \mathrm{R}. \tag{91}$$

Iz (91) i teorema jedinstvenosti karakterističnih funkcija slijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}F^{n*} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_+^n}{n}C_+^{n*} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_-^n}{n}C_-^{n*}. \tag{92}$$

Budući da je $C_+(x) = 0$ za $x \le 0$, iz relacije (9) slijedi da je mjera generirana s funkcijom distribucije C_+ koncentrirana na $(0,\infty)$. Stoga iz korolara 8 slijedi da je i mjera generirana funkcijom distribucije C_+^{n*} $(n \ge 2)$ koncentrirana na $(0,\infty)$ pa je i mjera generirana sa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_+^n}{n}C_+^{n*}$ koncentrirana na $(0,\infty)$. Slično se pokaže da je mjera generirana sa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_-^n}{n}C_-^{n*}$koncentrirana na $(-\infty,0]$. Iz relacija (26) i (92) slijedi:

$$\begin{aligned}\mu_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}F^{n*}}\big((0,\infty)\big) &= \mu_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_+^n}{n}C_+^{n*}}\big((0,\infty)\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_+^n}{n}\mu_{C_+^{n*}}\big((0,\infty)\big)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_+^n}{n} = -\log(1-q_+) = -\log p_+.\end{aligned} \tag{93}$$

Iz leme 36 i relacije (93) slijedi:

$$\begin{aligned}\log\frac{p_+}{1-q_+\hat{C}_+(\zeta)} &= \int_{(0,\infty)}(e^{i\zeta x}-1)d(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_+^n}{n}C_+^{n*})(x)\\ &= \int_{(0,\infty)}(e^{i\zeta x}-1)d(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}F^{n*})(x)\\ &= \int_{(0,\infty)}e^{i\zeta x}d(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}F^{n*})(x) - \mu_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}F^{n*}}\big((0,\infty)\big)\\ &= \int_{(0,\infty)}e^{i\zeta x}d(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}F^{n*})(x) + \log p_+, \quad \zeta \in \mathrm{R}.\end{aligned} \tag{94}$$

Iz (94) slijedi:

$$-\log(1-q_+\hat{C}_+(\zeta)) = \int_{(0,\infty)}e^{i\zeta x}d(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}F^{n*})(x), \quad \zeta \in \mathrm{R}. \tag{95}$$

Budući da iz relacije (21) slijedi $\hat{H}_q(\zeta) = q_+\hat{C}_+(\zeta)$, $\zeta \in \mathrm{R}$, a iz leme 35 slijedi $\hat{H}_q(\zeta) = \mathrm{E}[q^N e^{i\zeta S_N}]$, $\zeta \in \mathrm{R}$, primjenom eksponencijalne funkcije na relaciju (95) te koristeći relaciju (27) dobivamo:

$$1 - \mathrm{E}[q^N e^{i\zeta S_N}] = \exp\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dF^{n*}(x)\}, \quad \zeta \in \mathrm{R}.$$

Druga jednakost dobiva se slično kao prva polazeći od relacije (92).

∎

Bibliografija

[1] Marijo Alilović, Slučajne šetnje i Wiener-Hopfova faktorizacija, diplomski rad, PMF Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2017.

[2] Priscilla Greenwood, Moshe Shaked , Dual pairs of stopping times for random walk, Annals of Probability, 1978., Vol. 6, No. 4, 644.-650.

[3] Sidney I. Resnick, Adventures in Stohastic Processes, Birkhaeuser, Boston, 1992.

ISSN 1334-6083