UDK 330.6:510.
Stručni rad
Primljeno: 26. 8. 92.

Mr. DRAGAN JUKIĆ,
Ekonomski fakultet Osijek

REKURZIVNE RELACIJE I POTENCIJE KVADRATNIH MATRICA

U mnogim ekonomskim modelima često je potrebno riješiti odgovarajuću rekurzivnu relaciju. Ne postoji metoda koja daje opće rješenje svake rekurzivne relacije. No, premda za neke klase rekurzivnih relacija postoje metode za nalaženje općeg rješenja, često je nemoguće eksplicitno navesti to rješenje. U takvim situacijama koristi se tzv. metoda sukcesivnog računanja. Ovim radom želi se ukazati da se rješavanje linearne homogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijetnima može svesti na određivanje n-te potencije jedne kvadratne matrice i obratno, nalaženje n-te potencije kvadratne matrice svodi se na rješavanje linearne homogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima.

1. UVOD

Neka je (a_n,n ∈ N_o) niz brojeva sa svojstvom da se n-ti član a_n, n≥ r, toga niza može izraziti pomoću prethodnih r članova u obliku:

(1) $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ra_{n-r}$,

gdje su $c_1,\dots,c_r$ zadane konstante, a r čvrst broj S (1) je dana linearna homogena rekurzivna relacija s konstantnim koeficijentima reda r. Teorija rekurzivnih relacija detaljno je obrađena u (3), gdje se može naći dokaz činjenica koje se navode u ovom uvodnom dijelu.

Zamjenom u (1) a_k sa x^k i poslije skraćivanja sa x^{n-r} dobiva se:

(2) $x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \dots c_r = 0.$

Algebarska jednadžba (2) zove se karakteristična jednadžba rekurzivne relacije (1) i može se zapisati u obliku:

(3) $(x - x_1)^{\alpha 1}(x - x_2)^{\alpha 2}\dots(x - x_t)^{\alpha t} = 0_1$,

gdje su $x_1,\dots,x_t$ svi međusobno različiti korijeni karakteristične jednadžbe (2). Pri tome je x_i korijen kratnosti α_i, i=1,...,t,te:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_t = r.$$

Opće rješenje rekurzije (1) dano je s:

(4) $$\begin{aligned} a_n = {} & \lambda_{11}x^n{}_1 + \lambda_{12}nx^n{}_1 + \lambda_{13}n^2x^n{}_1 + \dots + \\ & + \lambda_{1,\alpha 1}n^{a1-1}x^n{}_1 + \lambda_{21}x^n{}_2 + \lambda_{22}nx^n{}_2 + \\ & + \lambda_{23}n^2x^n{}_2 + \dots + \lambda_{2,\alpha 2}n^{\alpha 2-1}x^n{}_2 + \dots + \dots + \lambda_{11}x^n{}_t + \\ & + \lambda_{12}nx^n{}_t + \lambda_{13}n^2x^n{}_t + \dots + \lambda_{t,at}n^{\alpha t-1}x^n{}_t, \end{aligned}$$

gdje su λ_{ij} neke konstante. To znači da se za svaki izbor početnih vrijednosti:

(5) $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{r-1} = b_{r-1}$

može odabrati r konstanti λ_{ij} tako da se posebno rješenje a_n,n≥01 određeno s (5) može zapisati u obliku (4).

2. PRIMJER REKURZIJE U EKONOMSKOM MODELU

Ova točka na investicijskom modelu razrađenom u (2), str. 393-408, ilustrira poteškoće do kojih se dolazi prilikom nalaženja općeg i posebnog rješenja rekurzije (1). Opišimo najprije model:

Poduzeće investira u sredstva za rad. Vijek trajanja pojedinog sredstva je r perioda (npr. godina) i na kraju svog vijeka trajanja se isključuje iz radnog procesa. Pojedino sredstvo za rad nadomješta se investiranjem na kraju svakog perioda svoga vijeka trajanja jednakim dijelovima svoje početne investicije[1]. Poslovni proces započinje investiranjem I_0 novčanih jedinica početkom prvog poslovnog perioda[2].

S a_n označimo bruto fiksni kapital[3] koncem n-tog perioda, tj. tijekom (n + 1)-vog perioda. Prema pretpostavci modela, na kraju n-tog perioda dodajemo investicije koje su jednake r-tom dijelu bruto fiksnog kapitala s konca (n - 1)-vog perioda, tj. dodajemo $I_n = \frac{1}{r} \cdot a_{n-1}$. Bruto stanje koncem novog perioda a_n dobiva se tako da se bruto stanju koncem prethodnog perioda a_{n-1} dodaju investicije uložene na kraju novog perioda I_n i oduzmu investicije b_n u ona sredstva za rad čiji vijek trajanja završava koncem novog perioda. Budući da je vijek trajanja sredstava za rad r perioda, ove posljednje investicije jednake su investicijama uloženim prije r perioda (koncem (n-r)-tog perioda), tj. $b_n = I_{n-r} = \frac{1}{r} \cdot a_{n-1-r}$. Za $n \geq r + 1$ dobivamo:

$$a_n = a_{n-1} + I_n - b_n$$

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{r}a_{n-1}\ \frac{1}{r}a_{n-r-1}$$

$$(6) \quad a_n = (1 + \frac{1}{r})\, a_{n-1}\ \frac{1}{r}a_{n-r-1}.$$

Početni uvjeti su:

$$a_0 = I_0$$

$$a_1 = (1 + \frac{1}{r})\, a_0 = (1 + \frac{1}{r}) I_0$$

$$a_2 = (1 + \frac{1}{r})\, a_1 = (1 + \frac{1}{r})^2 I_0$$

$$\vdots$$

$$a_{r-1} = (1 + \frac{1}{r})\, a_{r-2} = (1 + \frac{1}{r})^{r-1} I_0$$

$$a_r = (1 + \frac{1}{r})\, a_{r-1} - I_0 = [(1 + \frac{1}{r})^r - 1]\, I_0$$

Karakteristična jednadžba rekurzivne relacije (6) glasi:

$$x^{r+1} = (1 + \frac{1}{r})\, x^r - \frac{1}{r}$$

$$(7) \quad rx^{r+1} - (r+1)\, x^r + 1 = 0.$$

To je algebarska jednadžba stupnja r + 1. Da bi se našlo opće rješenje rekurzije (6) treba odrediti sve njene korijene, što često nije moguće. Premda postoje razne aproksimativne metode za određivanje korijena algebarske jednadžbe, zamjenom u (4) korijena $x_1, \ldots x_t$ njihovim približnim vrijednostima rezultira značajnom greškom aproksimacije člana a_n za dovoljno velik n.

Primjer 1. Neka je vijek trajanja $r = 2, I_0 = 1$. Prema (6) dobivamo rekurziju:

$$a_n = \frac{3}{2} a_{n-1} - \frac{1}{2} a_{n-3}$$

i početne uvjete $a_0 = 1, a_1 = 3/2, a_2 = 5/4$. Karakteristična jednadžba:

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 (x + \frac{1}{2}) = 0$$

ima dvostruki realan korijen $x_1 = 1$ i jednostruki $x_2 = -1/2$. Opće rješenje rekurzivne relacije prema (4) glasi:

$$a_n = c_1 + c_2 n + c_3 (-\frac{1}{2})^n.$$

Uvrštenjem početnih uvjeta u gornji izraz dobivamo sustav od tri linearne jednadžbe:

$$1 = c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3$$

$$\frac{3}{2} = c_1 + c_2 - \frac{cs}{2}$$

$$\frac{5}{4} = c_1 + 2c_2 + \frac{cs}{8}$$

iz koga za nepoznanice nalazimo:

$$c_1 = \frac{4}{3},\ c_2 = 0,\ c_s = -\frac{1}{3}.$$

Stoga traženo posebno rješenje rekurzivne relacije uz dane početne uvjete glasi:

$$a_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n.$$

Primjer 2. Za $r = 3, I_0 = 1$ imamo rekurziju:

$$a_n = \frac{4}{3}a_{n-1} - \frac{1}{3}a_{n-4}$$

i početne uvjete $a_0 = 1, a_1 = 4/3, a_2 = 16/9, a_3 = 37/27$. Odgovarajuća karakteristična jednadžba:

$$3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2(3x^2 + 2x + 1) = 0$$

ima dvostruki realan korijen $x_1 = 1$ i dva konjugirano kompleksna korijena:

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}.$$

Prema (4) opće rješenje rekurzivne relacije glasi:

$$a_n = c_1 + c_2 n + c_3\left(\frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}\right)^n + c_4\left(\frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}\right)^n.$$

Početni uvjeti daju 4 linearne jednadžbe po c_1, c_2, c_3, c_4 pa se dobiva:

$$c_1 = \frac{13}{14}, c_2 = \frac{3}{7}, c_3 = c_4 = \frac{1}{28}.$$

1 Te investicije se u (2) zovu vučenim investicijama.

2 Takva investicija se u (2) naziva autonomnom.

3 Stanje svih investicija.

Stoga posebno rješenje rekurzivne relacije uz dane početne uvjete glasi:

$$a_n = \frac{13}{14} + \frac{3}{7} n + \frac{1}{28} \left(\frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}\right)^n + \frac{1}{28} \left(\frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}\right)^n.$$

Iz prethodnog izraza vidimo da je neke vrijednosti do a_n lakše izračunati tako da se sukcesivno računaju $a_4, a_5, a_6, \ldots$, nego *pronaći korijene karakteristične* jednadžbe, riješiti sustav linearnih jednadžbi i izračunati prethodni izraz za određeni n. Osim toga, s ekonomskog stajališta varijabla n poprima samo konačno mnogo vrijednosti:

$0, 1, 2, \ldots, n_0$.

3. MATRIČNA METODA ZA RJEŠAVANJE REKURZIJE

U ovoj točki će biti pokazano da je problem nalaženja reješenja rekurzivne relacije (1) ekvivalentan problemu nalaženja n-te potencije odgovarajuće kvadratne matrice. Pođimo redom.

Treba riješiti rekurzivnu relaciju(1) uz početne uvjete (5). Pomoću niza $(a_n, n \in N_0)$ definirajmo niz jednostupčastih matrica:

$$(8) \quad x_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+r-1} \end{bmatrix}, \ n \in N_0,$$

a pomoću konstanti $c_r, \ldots, c_r$ r x r matricu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ c_r & c_{r-1} & c_{r-2} & \ldots & c_2 & c_1 \end{bmatrix}$$

Zamijetite da je :

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ c_r & c_{r-1} & c_{r-2} & \ldots & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+r-2} \end{bmatrix} = Ax_{n-1}.$$

Uzastopnom primjenom prethodne formule dobivamo:

$$(9) \quad X_n = A^n x_0.$$

Član a_n, $n \geq r$, nalazi se u zadnjem redu od:

$$x_{n-r+1} = \begin{bmatrix} a_{n-r+1} \\ a_{n-r+2} \\ a_{n-r+3} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

pa je za njegovo određivanje dovoljno znati x_{n-r+1}. Iz (9) se dobiva:

$$(10) \quad x_{n-r+1} = A^{n-r+1} x_0,$$

tj. za nalaženje n-tog člana a_n dovoljno je odrediti $(n - r + 1)$-vu potenciju matrice A.

Primjer 3. Odredimo a_5 iz Primjera 2. Ovdje 2. Ovdje je n=5, red rekurzije r=4,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 16/9 \\ 37/27 \end{bmatrix}.$$

$n - r + 1 = 2$ pa prema rečenome treba odrediti x_2.

$$x_2 = A^2 x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 0 & 0 & 4/3 \\ -4/9 & -1/3 & 0 & 16/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 16/9 \\ 37/27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/19 \\ 37/27 \\ 121/81 \\ 376/243 \end{bmatrix},$$

odakle je $a_5 = 376/243$.

Nalaženje n-te potencije matrice A može se svesti na rješavanje homogene linearne rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima. Naime, za svaku kvadratnu matricu A k-tog reda postoji polinom:

$$\mu(x) = x^r - \mu_1 x^{r-1} - \ldots - \mu_r, \ r \leq k$$

takav da je $\mu(A) = 0$, tj.

$$A^r = \mu_1 A^{r-1} + \ldots + \mu_{r-1} A + \mu_r I.$$

Za polinom μ možemo uzeti minimalni polinom matrice A (vidi [1]). Množenjem prethodne relacije sa A^{n-r}, $n \geq r$, dobiva se:

$$A^n = \mu_1 A^{n-1} + \dots + \mu_{r-1} A^{n-r+1} + \mu_r A^{n-r},$$

odakle za proizvoljne i, j slijedi rekurzivna relacija:

$$a_{ij}^{(n)} = \mu_1 a_{ij}^{(n-1)} + \dots + \mu_{r-1} a_{ij}^{(n-r+1)} + \mu_r a_{ij}^{(n-r)}$$

koju treba riješiti uz početne uvjete koji su za svaki par i,j određeni matricama:

$$A^0 = I, A, A^2, \dots, A^{r-1}.$$

Karakteristična jednadžba te rekurzivne relacije je $\mu(x) = 0$.

Primjer 4. Lako je provjeriti da je $\mu(x) = x^2 - 5x + 4$ minimalni polinom matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Za svaki par i,j odgovarajuća karakteristična jednadžba je:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0.$$

Stoga je za svaki par i,j opće rješenje jednako:

$$a_{ij}^{(n)} = b_{ij} + c_{ij} 4^n.$$

Tako dobivamo: $A^n = B + 4^n C$,

gdje su $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Iz početnih uvjeta $A^0 = I$, $A^1 = A$ imamo:

$$I = B + C,$$

$$A = B + 4C,$$

odakle dobivamo:

$$C = \frac{1}{3}(A - I) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{3}(4I - A) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

LITERATURA:

1. Kurepa, S., Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Liber, Zagreb, 1975.

2. Vadnal, A., Primjena matematičkih metoda u ekonomiji, Informator, Zagreb, 1980.

3. Veljan, D., Kombinatorika s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Dragan Jukić, M.S.

Summary

RECURSIVE RELATIONS AND POWERS OF SQUARE MATRIXES

In a number of economic models it is often necessary to solve the corresponding recursive relation. There is no method which gives general solution of each recursive relation. But, though some classes of the recursive relations have methods how to find out the general solution, it si frequently impossible to cite this solution explicitely. In such situations, the so called successive calculating method is being used. This work is meant to point out that the linear homogenous recursive relation solution with the constant coefficients can be reduced to determining of n-power of one square matrix and vice cersa: finding out n-power of square matrix is reduced to the solution of the linear homogenous recursive relation with the constant coefficients.