UDK: 330.6
Izvorni znanstveni članak
Primljeno: 1. 2. 1991.

Dr. DRAŽEN BARKOVIĆ,
Ekonomski fakultet Osijek

OPTIMALNO ODLUČIVANJE KOD NEJASNO FORMULIRANIH PROBLEMA*

Teorija fuzzy set namjerava da postane sredstvo bavljenja s nepreciznim, neizvjesnim i neodređenim situacijama. Bez suvišnog pojednostavljenja želi se postići konzistentna reprezentativna formulacija znanja koje dopušta upotrebu preciznih operatora i algoritama. "Fuzziness" se često identificira s "nejasnoćom". Treba primijetiti da fuzzy teorija omogućava da se strukturiraju aktivnosti i operacije koje se nejasno razlikuju jedna od druge, da ih se formulira pomoću modela i da se model koristi za različite ciljeve.

Ovdje smo pratili konstrukciju jednog fuzzy modela odlučivanja-modela linearnog programiranja koji pokazuje fleksibilnost i mogućnost uključivanja subjektivne procjene u sistematski pristup metodologije poduzetničkog znanja.

* Rad predstavlja dio istraživačkih rezultata projekta "Teorijske i institucionalne pretpostavke poduzetničke ekonomije" kojeg financira Ministarstvo znanosti, tehnologije i informatike Republike Hrvatske u razdoblju 1991-1993. godine.

1. UVOD

Osnovna pretpostavka za modelski pristup i eventualnu daljnju analizu ili optimiranje problema je metodološki instrumentarij koji omogućava da se realne situacije adekvatno formuliraju i efikasno rješavaju najčešće pomoću matematičkih metoda. Kod problema u prirodnim znanostima ili na području tehnike moguće je izraziti formalnu strukturu problema dok je to znatno teže u društvenim znanostima. I pored najbolje volje čovjeku je teško akcentirati predodžbu o cilju ili ograničenju područja rješenja posebno kada želi uzeti u obzir fenomene ili funkcionalne zavisnosti koje se ne mogu opisati dihotomijski. Primjeri o neodređenim nejasnim predodžbama o cilju su zahtjevi za "dobrom klimom u tvrtki", "dobroj i prihvatljivoj rentabilnosti", "mirnom razvoju poslova", dok su oni koji se odnose na nejasne, ne sasvim oštre i precizne zahtjeve u pogledu ograničenja javljaju u obliku formulacija kao što su: "budžetska sredstva ne bi trebalo znatno prekoračiti", "likvidnost ne bi trebala biti prenapregnuta", itd. Ovdje treba posebno naglasiti da se ta neizvjesnost, neodređenost, nepreciznost ne svodi na stohastičke fenomene. Inače bi to bio problem koji bi se mogao rješavati koncepcijom teorije vjerojatnosti.

Problem se može u principu rješavati na tri načina:[1]

a) Može se zadovoljiti formulacijom problema koja je točna ali ne i jednoznačna, nije dovoljno "oštra", "jasna". U tom slučaju se teško oslanjamo na matematičke metode u rješavanju. Više koristi imamo od verbalnog, neoštrog rješenja koje je potrebno interpretirati.

b) Moguće je aproksimirati loše strukturirani "nejasni", neoštri problem s "oštrim", "jasnim" matematičkim modelom. Opasnost leži u tome da se pritom rješava neki drugi problem koji odstupa od osnovnog problema.

c) Moguće je koristiti kako kod formulacije modela tako i kod rješavanja koncept nejasnih skupova.[2] Ova mogućnost trebala bi biti u prednosti pred prethodne dvije jer sadrži informaciju koja je zbog nejasnoće problema prikrivena.

1. Vidjeti (3).
2. Koncept fuzzy sets prevodimo ovdje kao koncept nejasnih skupova. U njemačkoj stručnoj literaturi govori se o "die unscharfen Mengen", dakle o "neoštrim skupovima". Praktično se možemo koristiti i pojmom fuzzy skupova.

2. NEJASNI SKUPOVI

1965. godine predložio je Zadeh koncept nejasnih skupova (fuzzy sets). Elementi mogu pripadati određenim skupovima u različitim stupnjevima, odnosno iskaz "element x pripada skupu X može biti istinit u različitom stupnju". Pojmove koji se koriste u teoriji nejasnih skupova uveli su Bellman i Zadeh (1970.).[3]

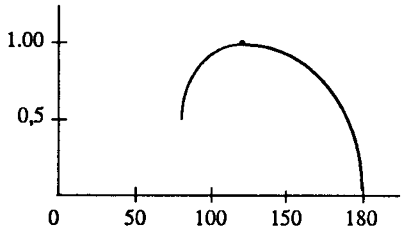
Definicija: Ako je X klasičan skup (objekata koji se moraju vrednovati u pogledu nejasnog iskaza) onda je $A := \{x, \mu_A(x), x \in X\}$ nejasan skup na X.

Ovdje je $\mu_A: X \rightarrow R$ funkcija realnih vrijednosti koja se često zove funkcija pripadnosti, funkcija istinitosti ili funkcija kompatibilnosti. A je normalizirani nejasni skup ako je $\text{Sup}\, \mu_A\, A(x) = 1$.

Primjer: Neka je X skup svih mogućih brzina na autoputu

X = (80, 100, 120, 140, 160, 180). Za neku osobu mogao bi se pojam "sigurna brzina na autoputu" dati slijedećim nejasnim skupom A:

A = {(80, 0,5), (100, 0,7), (120, 1,0), (140, 0,9), (160, 0,6), (180, 0,0)}



Slika 1: Nejasan skup: sigurne brzine na autoputu

3. JASNE I NEJASNE ODLUKE

U klasičnoj normativnoj teoriji odlučivanja u sigurnoj situaciji može se odluka za optimalnu alternativu poslovanja shvatiti kao alternativa koja pripada kako skupu mogućih rješenja tako i skupu alternativa s najvećom koristi. Radi se dakle o presjeku skupova "mogućih rješenja" i "optimalnih rješenja". Drugi zahtjev se uzima obično u obzir (kod jednoznačnih optimalnih rješenja) na taj način da se u skupu mogućih rješenja traži ono koje daje maksimalnu korist. Analogno tome definira se i nejasna odluka:

Funkcija cilja definira se kao nejasan skup. Taj skup se može u svakom slučaju izraziti kao presjek više nejasnih skupova ili restrikcija. Odluka je u stvari skup presjeka nejasnih skupova cilja i područja rješenja. Da bi se taj skup presjeka mogao izračunati potrebno je najprije utvrditi kako se utvrđuje skup presjeka dvaju ili više nejasnih skupova.

Zadeh predlaže koncepciju svoje teorije nejasnih skupova u koju uvodi najprije minimalni operator, to znači da funkcija pripadnosti presjeka dva nejasna skupa proizlazi iz:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), x \in X \tag{1}$$

Funkcija pripadnosti μ_E odluke kod nejasne predodžbe o cilju Z i područja rješenja L izlazi iz

$$\mu_E(x) = \mu_{Z \cap L}(x) = \min(\mu_Z(x), \mu L_2(x)), x \in X \tag{2}$$

"Odluka" je pritom očigledno ponovno nejasan skup više od jednog elementa. Ako se želi izdvojiti neko posebno rješenje kao "optimalna odluka" onda bi se moglo izabrati rješenje u nejasnom skupu "odluka" koje imaju najveći stupanj pripadnosti, znači

$$x_o = \max \min [\mu_Z(x), \mu L_2(x)], x \in X \tag{3}$$

Matematičke teoretske analize korisnosti kao i empirijski radovi su pokazali da se minimalni operator ne može primijeniti u stvaranju skupa presjeka bez ograničenja pogotovo kada taj presjek nastaje kao povezivanje nejasnih skupova u okviru ljudskog odlučivanja.

Taj operator je adekvatna aproksimacija ljudskog ponašanja samo u specijalnim slučajevima. U drugim slučajevima i to u onima kada postoji mogućnost supstitucije cilja u pogledu neke koristi pogodnije bi bilo povezivanje na slijedeći način

$$M_{A \cap B}(x, \gamma) = \frac{\mu_A(x)\, \mu_B(x)}{\gamma + (1-\gamma)\,(\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\, \mu_B(x))} \tag{4}$$

za $\gamma = 0$

3.1. Struktura nejasnog odlučivanja

U uvodu je već navedeno da se samo u manjem broju slučajeva realna situacija može prikazati determinističkim modelima.

Karakteristike determiniranih modela odlučivanja su:[4]

1. Skup dopuštenih ili mogućih aktivnosti. Obično je taj skup definiran preko ograničenja u obliku jednadžbi i nejednadžbi.

2. Propisi pridruživanja po kojima se aktivnostima pridružuje rezultat.

3. Poredak vrijednosti rezultata. Poželjan je potpuni poredak.

3. Vidjeti (2), str. 3-11.

4. Vidjeti (2), str. 1-18.

Upravo iz tih karakteristika proizlaze mogućnosti da se determiniranim modelima upute kritike. Oštro postavljanje granice između dopuštenih aktivnosti i nedopuštenih aktivnosti nije moguće osim možda ako bi se uz velike troškove pribavile potrebne informacije. Nejasnoća leži često u fenomenu problema kojeg opisuje model odlučivanja kao i u subjektivnom vrednovanju donosioca odluke u pogledu pouzdanosti odluke. Npr. neka radna organizacija postavlja si zadatak da na skladište stavi takvu količinu proizvoda koja će potpuno zadovoljiti moguću potražnju. Kako do sada taj proizvod nije imao prođu na domaćem tržištu nije poznata niti teoretska vjerojatnost njegove potražnje. Zahtjev koji bi se postavio u nekoj "jasnoj", "oštroj" formulaciji upravljačima zaliha ne bi imao smisla. Primjerenije bi bilo u spomenutoj situaciji da se traži da se na zalihe stavi količina proizvoda koja bi po mogućnosti potpuno pokrila potražnju. Ta nejasnoća temelji se očigledno na realnoj situaciji. U obzir dolazi i to da upravljači zalihama uključe svoja subjektivna iskustva u izvršavanje direktive. Što bi sada zaista bila "pogodna količina" moglo bi se u najboljem slučaju predstaviti nejasnim skupom. Isto tako su i propisi pridruživanja između aktivnosti i rezultata kao i vrednovanje rezultata ovisni od donosioca odluke. Pojednostavljenu pretpostavku da se svakoj aktivnosti može dodijeliti realna brojčana vrijednost treba revidirati. Klasično diferenciranje restrikcija na jednoj strani od funkcije cilja na drugoj ne pušta donosiocu odluke da obje komponente modela odlučivanja tretira istovremeno. Ova napomena implicitno stavlja do znanja poteškoće koje nastupaju radi asimetrije klasičnih modela odlučivanja. Naime, poteškoće i proizvoljnosti koje nastaju kod njihovog rješavanja, to znači izbor "težina" i oblika povezivanja kod modela koristi, izbor normi kod modela ciljnog programiranja ili izbor poretka početnih rješenja kod interaktivnog modela mogu se svesti na svojstvo asimetrije u klasičnom modelu odlučivanja. Taj pojam asimetrije treba se shvatiti u slijedećem smislu: dok je skup dopuštenih alternativa neuređen, određivanje optimalnog rješenja zahtijeva uvijek poredak rezultata ili alternativa poslovanja ako skup sadrži više od jednog elementa. Upravo postavljanje tog poretka elemenata predstavlja poteškoću čim se mora uzeti u obzir više od jednog kriterija. U principu je potpuno drugačija situacija kod nejasnih modela odlučivanja: oni su potpuno simetrični u smislu da su ciljevi i restrikcije formulirani u obliku nejasnih skupova i da odluka proizlazi iz skupa presjeka svih "ciljeva" i svih "restrikcija". Elementi tog nejasnog skupa "odluke" uređeni su preko funkcije pripadnosti. Ta struktura ostaje i kada su ciljevi nejasno formulirani a područje rješenja jasno.

Primjer:[5] kod neke odluke treba uzeti u obzir dva kriterija za cilj i skup mogućih rješenja koji je ograničen s dva uvjeta. U tabeli 1 su date vrijednosti funkcije pripadnosti ciljeva $\mu_{Z1}(x)$ i $\mu_{Z2}(x)$ te uvjeti ograničenja $\mu_{N1}(x)$ i $\mu_{N2}(x)$. Varijabla odlučivanja može imati vrijednost cijelih brojeva između 0 i 10:

Tabela 1:

NEJASNI CILJEVI I NEJASNA OGRANIČENJA

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_{Z1}	0	0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ_{Z2}	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	0,6	0,4
μ_{Z3}	0,8	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5	0,5	0,4	0,3	0	0
μ_{Z4}	0	0,2	0,3	0,3	0,5	0,6	0,5	0,4	0,1	0	0

Uz poštivanje minimalnog operatora može se lako odrediti funkcija pripadnosti nejasnog skupa "odluka":

Tabela 2:

NEJASNA ODLUKA

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_{E(x)}$	0	0	0,1	0,2	0,2	0,3	0,5	0,4	0,3	0	0

Ako bi se složili s tim da priznamo kao optimalnu alternativu onu koja ima najviši stupanj pripadnosti onda je to u primjeru $x_o = 6$ s $\mu_E(6) = 0,5$. Lako se uočava da ni povećani broj ograničenja ili funkcija cilja ne uzrokuje bitno veći računski postupak. Dodajmo da bi se jasna ograničenja razlikovala od prethodno prikazanih ograničenja po tome što bi stupanj pripadnosti imao vrijednost 0 ili 1.

4. NEJASNO LINEARNO PROGRAMIRANJE

Linearno programiranje predstavlja česti oblik problema odlučivanja. Budući da se do njegovog rješenja obično dolazi pomoću matematičkih metoda kao što je to simpleks metoda blizu smo pomisli da se taj problem odlučivanja može riješiti samo ako je jasno formuliran. Ovdje će se pokazati da to nije pravilo i da se kod linearnog programiranja također zadržava svojstvo nejasnog formuliranja problema. Klasična nejasna formulacija linearnog programiranja polazi od uobičajene formulacije linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} z &= c\,x \min \\ A\,x &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

gdje je A matrica reda (m, n), c je n-dimenzionalni vektor, b je m-dimenzionalni vektor.

5. Vidjeti (3), str. 29.

Adaptirani linearni program koji bi imao nejasnu funkciju cilja i nejasna ograničenja izgleda ovako:[6]

$$\begin{aligned} c\,x &\leq z_0 \\ A\,x &< b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Ova formulacija temelji se na slijedećim pretpostavkama:

1. Donosilac odluke ima u pogledu funkcije cilja nejasnu predodžbu i akceptira imperativ: birati x tako da c x bude po mogućnosti ispod granice z_0.

2. Analogno se interpretira svaka nejednadžba iz sistema ograničenja: Birati x tako da $(Ax)_i$ leži po mogućnosti ispod zadane ograde b_i ($i = 1, ..., m$).

3. Svi zahtjevi pod 1 i 2 izraženi su u obliku funkcija pripadnosti na R^n koje imaju slijedeća svojstva:

One moraju preslikati područje dimenzije (m, 1) koje je definirano prema (6) u interval [0,1] tako da je

$f(Ax, cx) = 0$ ako je $Ax \leq b$, $cx \leq z_0$ "jako" povrijeđeno

$f(Ax, cx) = 1$ ako je $Ax \leq b$ $cx \leq z_0$ nije povrijeđeno

Osim toga moraju funkcije u svakom argumentu monotono rasti. U ovom specijalnom slučaju oslanjamo se na linearnu funkciju pripadnosti slijedećeg oblika: (radi pojednostavljenog načina pisanja uzima se da je funkcija cilja 0-ti red matrice koja ima m+1 redova $B = \binom{c}{A}$)

$$f_i(Bx)_i = \begin{cases} 1 - \dfrac{t_i}{p_i} & \text{za } (bx)_i = b_i + t_i \\ 1 & \text{za } (Bx)_i \leq b_i \end{cases} \qquad (8)$$

za $i = 1, ..., m+1$.

U ovako definiranim nejasnim restrikcijama funkcije pripadnosti na Rn t_i predstavlja "povredu" i-tog ograničenja za $0 \leq t_i \leq p_i$, a $p_i > 0$ je maksimalna "povreda" koju donosilac odluke prihvaća u i-tom redu. Praktično se iza ovih formulacija krije predodžba o tome da će donosilac odluke smatrati kao vrlo pogodne one vrijednosti za x u pogledu i-tog ograničenja koje zadovoljavaju strogu relaciju

$(b\,x)_i \leq b_i$

Takve vrijednosti x koje ne zadovoljavaju niti jedanput nejednadžbu

$(B\,x)_i \leq b_i + t_i$ su potpuno nepogodne. Donosilac odluke im dodjeljuje f_i vrijednost nula. Tvrdnja da "x ispunjava približno i-to ograničenje" u tom slučaju je "kriva". Između b_i i $b_i + t_i$ opada funkcija f_i kao funkcija od $(B\,x)_i$ linearno od 1 do 0. Sa t_i odnosno p_i izražava donosilac odluke svoje subjektivno vrednovanje i-tog ograničenja u poređenju s drugim restrikcijama. Što je manji p_i to donosilac odluke manje prihvaća "povredu" nejasne relacije ≤. Ako se prihvati minimalni operator kao moguće povezivanje tipa "i" u datom slučaju i ako tražimo rješenje s maksimalnim stupnjem pripadnosti nejasnom skupu "odluke" tada se problem (6) može napisati ovako

$$\begin{aligned} \max(x) &= \max_x \min_i f_i(Bx)_i \\ B\,x - t &\leq b \\ t &\leq p \\ x, t &\geq 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

gdje je x n-dimenzionalni vektor, b, t, p su m+1 dimenzionalni vektori. Ovome problemu je adekvatna formulacija

$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ \lambda p + t &\leq p \\ B\,x - t &\leq b \\ t &\leq p \\ x, t &\geq 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

Primjer 7

U nastojanju da smanji troškove transporta neka tvrtka treba riješiti slijedeći problem:

Koliki je broj kamiona između jedan i četiri potreban u vlastitom voznom parku i koliko ih je još eventualno potrebno iznajmiti da bi se bilo sigurno da će se sve želje kupaca ispuniti odmah, a da će troškovi transporta biti minimalni. Pored ovog pitanja potrebno je ispuniti slijedeća ograničenja:

1. Kapacitet voznog parka treba biti najmanje toliko velik kao suma prognozirane količine prodaje.

2. Svaki dan se mora obilaziti jedan zadani broj kupaca.

3. Od najmanje transportne jedinice x_1 mora biti pri ruci najmanje 6 kamiona.

Ignorirajući uvjete cjelobrojnosti može se najprije postaviti slijedeći linearni model

$$z = 41400\,x_1 + 44300\,x_2 + 48100\,x_3 + 49100\,x_4 \ \min$$

$$\begin{aligned} 0{,}84\,x_1 + 1{,}44\,x_2 + 2{,}16\,x_3 + 2{,}40\,x_4 &\geq 170000 \\ 16\,x_1 + 16\,x_2 + 16\,x_3 + 16\,x_4 &\geq 13000 \\ x_1 &\geq 6 \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1, ..., 4 \end{aligned}$$

Optimalno rješenje: $x_1 = 6$, $x_2 = 16,29$, $x_4 = 58,95$ a minimalni troškovi transporta iznose $z = 3864975$ NJ (novčanih jedinica). Poslovno je rukovodstvo bilo s

6. Vidjeti (5), str. 113.

takvim transportnim troškovima zadovoljno, ali je, ipak, bilo zabrinuto u odnosu na rješenje, budući da su ograničenja postavljena na temelju prognoze, pa se sada boji da izračunati kapaciteti transporta neće biti dovoljni.

Bolje bi bilo kada bi se u ograničenju ostavilo "malo zraka". Daljnja ispitivanja su otkrila da se baš ne treba insistirati na minimalnim troškovima, nego da je u ukupnoj sumi transportnih troškova od 4,2 milijuna NJ bilo naznačeno da ju se ne treba prekoračiti u ni u kojem slučaju. Zapravo, jako je interesantno da se "značajno" ostane ispod te svote.

Na temelju tih informacija postavlja se na slijedeći način nejasan linearni program:

1. Za ograničenja se formuliraju funkcije pripadnosti na taj način da poprimaju vrijednost nula čim je postignut ili podbačen minimalni zahtjev a vrijednost jedan čim je dostignut odnosno prekoračen željeni rezervni kapacitet. Vrijednosti p_i u (8) odgovaraju rezervnom kapacitetu.

2. Za funkciju cilja je predviđeno da koeficijent pripadnosti iznosi jedan ako je ukupna suma transportnih troškova dostignita ili prekoračena.

Iz toga proizlaze slijedeći oblici funkcije pripadnosti

	$f_i(Bx)_i = 0$	$f_i(Bx)_i = 1$
Funkcija cilja	4200000	3900000
1. ograničenje	170	180
2. ograničenje	1300	1400
3. ograničenje	6	12

Formulacija na temelju (10) glasila bi ovako

$$\max \lambda$$

$$300000\,\lambda + t_0 \leq 300000$$

$$10\,\lambda + t_1 \leq 10$$

$$100\,\lambda + t_2 \leq 100$$

$$6\,\lambda + t_3 \leq 6$$

$$41400\,x_1 + 44300\,x_2 + 48100\,x_3 + 49100\,x_4 - t_0 \leq 3900000$$

$$-0{,}84\,x_1 - 1.44\,x_2 - 2.16\,x_3 - 2.4\,x_4 + t_1 \leq -180$$

$$-16\,x_1 - 12\,x_2 - 16\,x_3 - 16\,x_4 + t_2 \leq -1400$$

$$-x_1 + t_3 \leq -12$$

$$t_0 \leq 300000$$

$$t_1 \leq 10$$

$$t_2 \leq 100$$

$$t_3 \leq 6$$

$$x_j,\ t_j \geq 0$$

Optimalno rješenje glasi $x_1 = 9{,}45$, $x_2 = 13{,}67$, $x_4 = 61{,}71$ a troškovi iznose 4027447 NJ.

LITERATURA:

1. *Sommer, G.:* Lineare Ersatzprogramme für unscharfe Entscheidungs-probleme. Zur Optimumbestimmung bei unscharfer Problem-beschreibung, Zeitschrift für Operations Research, 1978, svezak 22.

2. *Rodder, W., Zimmermann, H. J.:* Analyse, Beschreibung und Optimierung von unscharf formulierten Problemen, Zeitschrift für Operations Research, 1977, br. 1.

3. *Zimmermann, H. J.:* Zur Darstellung und Lösung schlecht strukturierter Entscheidungsprobleme (I), Wist 1979, br. 2.

4. *Zimmermann, H. J.:* Zur Darstellung und Lösung schlecht strukturierter Entscheidungsprobleme (II), Wist 1979, br. 3.

5. *Zimmermann, H. J.:* Fuzzy Programming and Linear Programming with several objective funcktions, tiskano u Fuzzy sets and decizion analysis, North-Holland, Amsterdam-New York, Oxford 1984.

Dražen Barković, Ph. D.

Summary

OPTIMAL DECISION — MAKING WITH UNCLEAR PROBLEMS

Fuzzy set theory proposes to be a tool for handling imprecision, uncertainty and vagueness without undue simplifications, and for giving a consistent represantitation of linguistically formulated knowledge which allows the use of precise operators and algorithms. "Fuzziness" was identified as "vagueness", and it was noted that the theory of fuzzy set makes it possible to structure and describe activities and observations wich differ from each other only vaguely, to formular them in models and to use these models for various purposes.

One fuzzy LP-model was constructed to offer flexibility, and the means for including subjective judgement and inexact knowledge in systematic assessments of managerial problems.