

UDK 519.8 + 681.3
Prethodno priopćenje
Primljeno: 26. 06. 1989.

Dr. RUDOLF SCITOVSKI,
Studij elektrotehnike Osijek

VLADIMIR REDŽEP,
Elektroslavonija Osijek

PRIMJENA GRAFIČKIH MOGUĆNOSTI PC RAČUNALA PRILIKOM RJEŠAVANJA NELINEARNIH PROBLEMA NAJMANJIH KVADRATA*

U ekonomskim istraživanjima često je potrebno, na osnovu zadanih podataka i pretpostavljenog modela-funkcije, riješiti odgovarajući nelinearni problem najmanjih kvadrata. Ovakvi problemi nemaju uvijek rješenja, a ako su rješivi, tada numerički iterativni proces, kojim se rješavaju, znatno ovisi o izboru početne aproksimacije. Ovim radom želi se ukazati na neke grafičke mogućnosti primjene PC računala prilikom definiranja početne aproksimacije u ovim iterativnim procesima. Izborom različitih ekonomskih primjera prikazane su široke mogućnosti primjene ovakvih modela-funkcija u ekonomskim istraživanjima.

*) Rad je rađen u okviru potprojekta »Zakon vrijednosti u funkciji upravljanja razvojem«, kojeg kao dio projekta »Fundamentalna istraživanja u ekonomiji« financira SIZ znanosti SR Hrvatske u razdoblju 1987-1990. godine.

1. UVOD

Procjenjivanje optimalnih parametara trendova i regresija u ekonomskim istraživanjima obično se svodi na rješavanje nelinearnih problema najmanjih kvadrata. Za rješavanje ovih problema postoje brojne iterativne metode (vidi [2], [6], [11], [12]) koje obično pretpostavljaju »dobru« početnu aproksimaciju. Ovim radom želi se ukazati na grafičke mogućnosti PC računala prilikom određivanja početne aproksimacije iterativnog procesa. Zbog toga su svi primjeri u radu izabrani kao dvodimenzionalni problemi najmanjih kvadrata, kako bi se grafički mogla prikazati ploha odgovarajuće minimizirajuće funkcije. Da ovim nismo bitno umanjili općenitost rada, vidi se iz činjenice da većina važnijih ekonomskih funkcija, koje zahtijevaju rješavanje nelinearnog problema najmanjih kvadrata, imaju najviše dva nelinearna parametra.

Problem najmanjih kvadrata koji se obrađuju u radu kratko se može definirati na slijedeći način:

Zadani su podaci (p_i, t_i, f_i) , $i = 1, \dots, m$, gdje su t_i vrijednosti nezavisne varijable, f_i vrijednosti zavisne varijable, a p_i odgovarajuće težine podataka.

Promatra se klasa funkcija-modela $t \rightarrow f(t; b, c)$, gdje su b, c realni parametri.

Treba odrediti optimalne parametre b^*, c^* tako da bude:

$$(1) \quad F(b^*, c^*) = \min_{b, c} F(b, c)$$

gdje je

$$(2) \quad F(b, c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m p_i \left(f(t_i; b, c) - f_i \right)^2$$

(više detalja vidi u [3], [12], [14])

2. POLINOMIJALNI TREND

Najjednostavniji tip funkcije-modela f je polinom

$$(3) \quad f(t; a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n.$$

Problem određivanja optimalnih parametara a_0, a_1, \dots, a_n u smislu metoda najmanjih kvadrata je linearni problem najmanjih kvadrata koji je vrlo detaljno obrađen u literaturi (vidi npr. [4], [7], [8], [10]). Ovaj problem uvijek je rješiv, a za njegovo rješavanje postoje efikasne metode (vidi [7]). Odgovarajuća ploha minimizirajuće funkcije (2) je paraboloid. U primjenama se najviše koristi linearna ($n=1$) i kvadratna ($n=2$) funkcija — model.

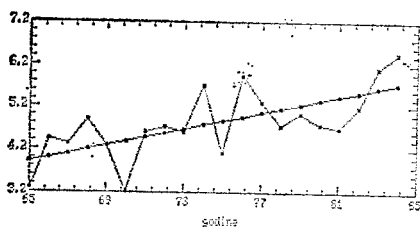
PRIMJER 1. Promatramo podatke o prinosu pšenice (u t/ha) na društvenom sektoru Zajednice općina Osijek¹ u periodu

od 1965—1984. godine. Ako stavimo $t_i=i$, $i=1, \dots, 20$, gdje t_i odgovara 1965. godini, a za težine podataka uzmemo $p_i=1$ dobivamo linearnu funkciju-model (linearni trend):

$$(4) \quad f(t) = 3.8199 + 0.095338 t$$

Originalni podaci, kao i teoretske vrijednosti dobivene na bazi linearnog trenda (4) prikazane su na Slici 1., a ploha (dio paraboloida) odgovarajuće minimizirajuće funkcije (2) prikazana je na Slici 2.² Koeficijent prilagođavanja³ iznosi 2.7%.

PRINOS PŠENICE NA DRUŠTVENOM SEKTORU ZAJEDNICA OPĆINA OSIJEK (u t/ha)



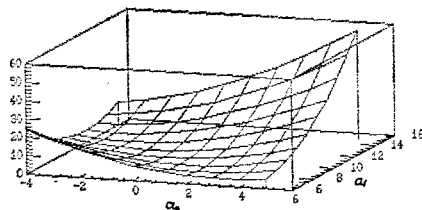
Slika 1.

1) SGZOOs — 1985. str. 205.

2) Svi grafički prikazi u radu urađeni su po moću programa STATGRAPH na IBM-kompatibilnom PC računalu.

3) Standardna devijacija mjerena veličinom matematičkog očekivanja (vidi [2] ili [4]).

PLOHA MINIMIZIRAJUĆE FUNKCIJE (linearni trend)



Slika 2.

3. EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

Vrlo često je funkcija-model u ekonomskim istraživanjima eksponencijalna funkcija:

$$(5) \quad f(t) = A + b e^{ct},$$

gdje je $y=A$ asimptota eksponencijalne funkcije (vidi npr. [1], [4], [6], [8], [13]). Ako se ova funkcija koristi u svrhu procjenjivanja prosječne stope promjene (rasta ili pada) promatrane ekonomske kategorije, tada treba uzeti $A=0$ (vidi [13]).

Problem određivanja optimalnih parametara b^*, c^* funkcije (5) je nelinearni problem najmanjih kvadrata, koji je također uvijek rješiv (vidi [14]), a rješenje se može dobiti nekom od poznatih iterativnih metoda za rješavanje nelinearnih problema najmanjih kvadrata (vidi [2], [12]).

Iterativni proces kojim se rješava ovaj problem konvergirat će, ako početnu aproksimaciju biramo tako da bude dovoljno blizu rješenja. Kao što je pokazano u [14], početnu aproksimaciju za parametar b treba birati iz intervala $[0, f_p]$, gdje je f_p ponderirani prosjek podataka. Početnu aproksimaciju za parametar c treba birati iz intervala $[0,1]$, odnosno $[-1,0]$, ovisno o tome da li podaci imaju svojstvo pretežnog rasta ili pada.⁴

4) Kažemo da podaci imaju svojstvo pretežnog rasta (pada) onda ako je koeficijent smjera odgovarajućeg linearnog trenda pozitivan (negativan). Svojevremeno pretežnog rasta (pada) podataka ekvivalentno je s važenjem odgovarajuće Čebiševljeve nejednakosti (vidi [14], [15]).

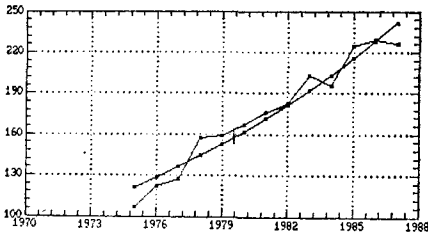
PRIMJER 2. Promatramo potrošnju električne energije u domaćinstvima Općine Osijek u razdoblju od 1973. do 1985. godine (vidi Tabelu 1. — stupac f_i).

Primjenom Metode nivoa prikazane u [15] pronađene su optimalne vrijednosti parametara i eksponencijalni trend

$$(6) \quad f(t) = 121.5795 e^{0.05713 t}$$

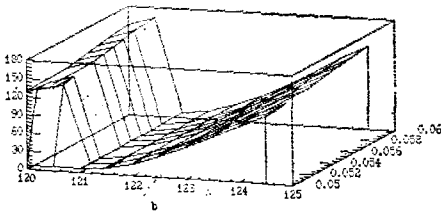
čiji graf je prikazan na Slici 3., a ploha odgovarajuće minimizirajuće funkcije na Slici 4.

POTROŠNJA ELEKTRIČNE ENERGIJE DOMAĆINSTVA OPĆINE OSIJEK u periodu 1975–1987 (u GWh) (eksponencijalna funkcija)



Slika 3.

PLOHA MINIMIZIRAJUĆE FUNKCIJE (eksponencijalni trend)



Slika 4.

Poznavanjem eksponencijalnog trenda (6) ujedno dobivamo i prosječnu stopu rasta u promatranom periodu (5.71%). Koefficient prilagođavanja iznosi 1.47%.

Često puta su u primjenama podaci (f_i) relativno veliki brojevi, što može dovesti do numeričke nestabilnosti iterativ-

nog postupka kojim se rješava ovaj nelinearni problem najmanjih kvadrata. Slijedeća Propozicija pokazuje kako treba postupati u takvim slučajevima.

PROPOZICIJA 1.5 Zadani su podaci (p_i, t_i, f_i), $i=1, \dots, m$. Neka je (b^*, c^*) rješenje problema najmanjih kvadrata:

$$(7) \quad F(b, c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m p_i (b e^{c t_i} - f_i)^2 \rightarrow \min$$

Ako načinimo supstituciju

$$(8) \quad g_i = \lambda f_i, \quad \lambda \neq 0,$$

tada je problem

$$(9) \quad G(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m p_i (\beta e^{\gamma t_i} - g_i)^2 \rightarrow \min,$$

također rješiv, a za rješenje (β^*, γ^*) vrijedi

$$(10) \quad \beta^* = \lambda b^*, \quad \gamma^* = c^*$$

Ova propozicija uči nas da prilikom određivanja optimalnih parametara (b^*, c^*) eksponencijalnog trenda (5) podatke f_1, \dots, f_m možemo po volji urediti tako da ih sve redom pomnožimo nekim brojem $\lambda \neq 0$. Ako su brojevi f_1, \dots, f_m preveliki ili premali (pa stvaraju numeričke probleme ili se teško grafički prikazuju), sve ih možemo podijeliti ili pomnožiti nekim brojem. Prethodna Propozicija osigurava da se na taj način unutrašnja struktura podataka neće izmijeniti, a stvarni optimalni parametri lako se dobiju iz (10).

Specijalno, ako nas interesira samo prosječna stopa promjene unutar područja podataka, i kod originalnih podataka f_1, \dots, f_m i kod transformiranih (pomnoženih/podijeljenih) podataka g_1, \dots, g_m ona je prema (10) ista.

NAPOMENA 1. Često se u primjenama pogrešno koristi linearizacija eksponencijalne funkcije (5) logaritmiranjem:

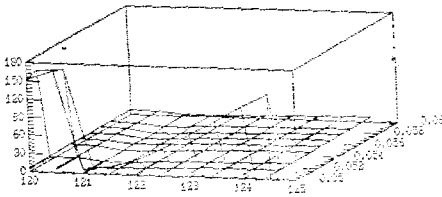
$$(11) \quad \ln(f/t - A) = \ln b + ct$$

pa se na taj način nelinearni problem najmanjih kvadrata svodi na linearni (o kritici ovakvog pristupa vidi u [13]). Slika 5., koja prikazuje plohu odgovarajuće minimizirajuće funkcije (2), dobro ilustrira i

5) Dokaz ove Propozicije je jednostavan i nećemo ga ovdje navoditi.

potvrđuje tvrdnje iz [13]. Ako usporedimo Sliku 4. i Sliku 5., vidimo da je transformacijom (11) minimizirajuća ploha sa Slike 4. nepredvidivo degenerirala.

PLOHA MINIMIZIRAJUĆE FUNKCIJE
(linearnisrani eksponencijski trend)



Slika 5.

4. ASIMETRIČNA S-FUNKCIJA

Prema [5] i [6] asimetričnu S-funkciju možemo definirati s

$$(12) \quad f(t; b, c) = \frac{A}{(1 + b e^{-ct})^{1/\mu}}, \quad (\mu > 0)$$

gdje je A nivo zasićenja, a μ koeficijent asimetrije. Kaže se da je funkcija (12) pozitivne (negativne) asimetrije ako je $\mu < 1$ ($\mu > 1$). Ako je $\mu = 1$, funkcija (12) prelazi u poznatu logističku funkciju (vidi [9]).

Problem najmanjih kvadrata za procjenjivanje optimalnih parametara asimetrične S-funkcije (12) nije uvijek rješiv (vidi [15]). Egzistencija optimalnih parametara zahtijeva da podaci imaju svojstvo pretežnog rasta i da nivo zasićenja A bude dovoljno udaljen od empirijskih podataka (više o tome vidi u [15]).

U ovom slučaju je problem dobre početne aproksimacije od posebne važnosti, jer je u većini slučajeva numerički iterativni postupak nestabilan. Zato grafički prikaz minimizirajuće plohe može biti od značajne pomoći.

4.1. S-funkcija s pozitivnom asimetrijom

Funkcija (12) je S-funkcija s pozitivnom asimetrijom, ako je koeficijent asimetrije $\mu < 1$. Za točku infleksije S-funkcije

$$(13) \quad I \left(-\frac{1}{c\mu} \ln \frac{1}{b}; \frac{A}{(1+\mu)^{1/\mu}} \right)$$

u slučaju pozitivne asimetrije vrijedi (vidi [6]): $y_1 < A/2$.

PRIMJER 3. Promatramo podatke o potrošnji električne energije u domaćinstvima Općine Osijek u periodu od 1973. do 1985. godine prikazane u Tabeli 1. (stupac f_i)

godina	t_i	p_i	f_i	$f(t_i)$	odst. u %	stopa rasta
1975.	0	1	106.5	110.2	3.3	10.3
1976.	1	1	121.6	121.6	0	9.5
1977.	2	1	127.5	133.2	4.3	8.7
1978.	3	1	157.5	144.7	8.9	7.9
1979.	4	1	158.7	156.1	1.7	7.2
1980.	5	1	166.6	167.2	0.4	6.6
1981.	6	1	175.6	178.0	1.3	5.9
1982.	7	1	182.7	188.3	3.0	5.4
1983.	8	1	203.4	198.1	2.7	4.8
1984.	9	1	195.9	207.4	5.6	4.3
1985.	10	1	225.0	216.1	4.1	3.9
1986.	11	1	229.0	224.2	2.1	3.5
1987.	12	1	226.3	231.7	2.3	3.1
1989.	14			245.0		2.4
1991.	16			256.0		2.0
1993.	18			265.1		1.5
1995.	20			272.4		1.2

Tabela 1. Potrošnja električne energije u domaćinstvima Općine Osijek (u GWh).

Uz pretpostavku o nivou zasićenja od 300 GWh i uz koeficijent asimetrije $\mu = 0.45$ dobivamo funkciju (12) uz

$$b^* = 0.5695 \text{ i } c^* = 0.28354$$

Prognozirane vrijednosti nalaze se u Tabeli 1. u stupcu s oznakom $f(t_i)$. Odstupanja stvarnih od teoretskih vrijednosti su malena, što potvrđuje i koeficijent prilagođavanja: 3.8%. U posljednjem stupcu tabele vidi se kretanje stope rasta potrošnje električne energije.⁶

4.2. S-funkcija s negativnom asimetrijom

Funkcija (12) je S-funkcija s negativnom asimetrijom ako je koeficijent asimetrije $\mu > 1$. Za točku infleksije (13) S-

⁶ Sva numerička izračunavanja u radu izvedena su na bazi vlastitih FORTRAN – programa prilagođenih PC računarima.

-funkcije u slučaju negativne asimetrije vrijedi (vidi [6]): $y_1 > A/2$.

PRIMJER 4. Promatramo podatke o broju stanovnika Jugoslavije (u milijunima) od 1921. do 1981. godine u godinama popisa prikazane u Tabeli 2. (stupac f_i).

godina	t_i	p_i	f_i	$f(t_i)$	odst. u %	stopa rasta
1921.	1	1	12.545	12.366	1.5	1.2
1931.	11	1	14.534	13.879	4.7	1.1
1948.	28	1	15.841	16.615	4.7	1.0
1953.	33	1	16.991	17.439	2.6	0.9
1961.	41	1	18.549	18.753	1.1	0.9
1971.	51	1	20.522	20.356	0.8	0.8
1981.	61	1	22.424	21.875	2.5	0.7
1991.	71	1		23.270		0.6
2001.	81	1		24.515		0.5

Tabela 2. Kretanje broja stanovnika Jugoslavije (u milijunima)

Uz pretpostavku o nivou zasićenja $A = 30$ milijuna, i uz koeficijent asimetrije

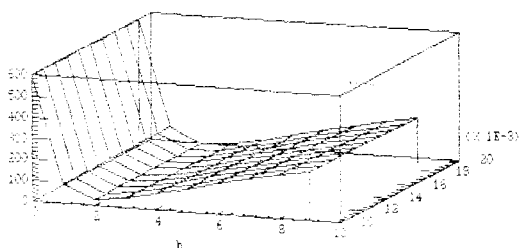
$\mu = 2$, dobivamo funkciju (12) uz

$$b^* = 5.02739 \text{ i } c^* = 0.014277$$

Prognozirane vrijednosti nalaze se u Tabeli 2. u stupcu s oznakom $f(t_i)$. Odstupanja stvarnih od teoretskih vrijednosti su malena, što potvrđuje i koeficijent prilagodavanja: 2.9%. U posljednjem stupcu tabele vidi se kretanje stope rasta broja stanovnika Jugoslavije.

Na Slici 6. prikazana je ploha odgovarajuće minimizirajuće funkcije (2).

PLOHA MINIMIZIRAJUĆE FUNKCIJE
(S-funkcija s negativnom asimetrijom)



Slika 6.

5. PERIODIČNA FUNKCIJA

U svrhu istraživanja periodičnih uticaja u podacima ima smisla promatrati funkciju oblika

$$(14) \quad f(t) = P(t) + T(t)$$

gdje je P polinom,⁷ a T trigonometrijska funkcija. U [11] promatra se slučaj kada je P konstanta, a odgovarajući problem najmanjih kvadrata rješavao se kao separabilni problem najmanjih kvadrata (vidi [3]).

Mi ćemo promatrati funkciju oblika

$$(15) \quad f(t) = a + bt + \sum_{i=1}^n c_i \sin \frac{2\pi t}{\omega_i}$$

gdje ćemo primijeniti višestepenu metodu najmanjih kvadrata.

Prvo ćemo riješiti linearni problem najmanjih kvadrata za funkciju

$$(16) \quad f(t) = a + bt$$

Na taj način procijenili smo linearnu komponentu u podacima. Sa (a^*, b^*) označimo optimalne vrijednosti parametara dobivene prilikom rješavanja tog problema.

Nakon toga riješit ćemo problem najmanjih kvadrata za funkciju

$$(17) \quad f(t; c, \omega) = a^* + b^* t + c \sin \frac{2\pi t}{\omega}$$

Ovo je nelinearni problem najmanjih kvadrata i možemo ga riješiti nekom metodom navedenom u [2] ili [12]. Tako dobivamo amplitudu c^* i period ω^* periodičnog uticaja na podatke.

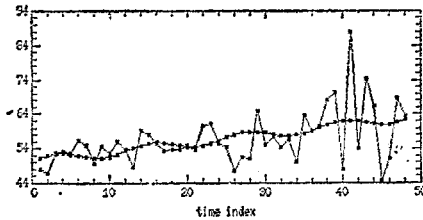
Na isti način postupak možemo nastaviti istraživajući ostale periodične uticaje.

NAPOMENA 2. Jasno je da ovakva višestepena metoda najmanjih kvadrata ne daje optimalne vrijednosti traženih parametara. Problem određivanja optimalnih parametara ovakvih funkcija u suštini je vrlo složen numerički problem (vidi [3], [11]), a algoritam predložen u ovom radu numerički je jednostavniji i s obzirom na kvalitetu ulaznih podataka, daje zadovoljavajuću točnost rezultata.

⁷ Umjesto polinoma, mogu se koristiti i druge funkcije. Npr. ako promatrana pojava pokazuje tendenciju eksponencijalnog ponašanja, umjesto polinoma P , može koristiti eksponencijalna funkcija.

PRIMJER 5. Promatramo mjesečne podatke o potrošnji električne energije u domaćinstvima Općine Osijek (u GWh) u periodu od 1982 do 1985. godine vidljive na Slici 8.

POTROŠNJA ELEKTRIČNE ENERGIJE DOMAĆINSTVA OPĆINE OSIJEK u periodu 1975-1987 (u GWh)
(periodična funkcija)



Slika 8.

Rješavanjem linearnog problema najmanjih kvadrata za funkciju (16) dobivamo $a^* = 50.25$ i $b^* = 0.2629$

Nakon toga, primjenom Metode nivoa iz [12], rješavam problem najmanjih kvadrata za funkciju

$$(18) \quad f(t; c, \omega) = 50.25 + 0.2629 t + c \sin \frac{2\pi t}{\omega}$$

i dobivamo

$$c^* = 1.3125 \quad i \quad \omega^* = 12.2629$$

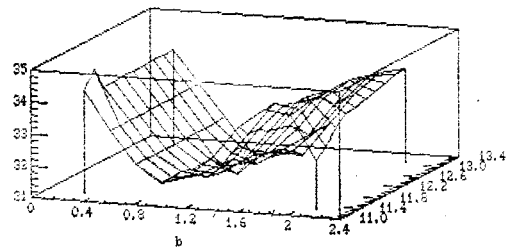
Broj ω^* pokazuje da mjesečni podaci o potrošnji električne energije imaju periodično ponašanje s približnim periodom od

12 mjeseci, što potpuno odgovara stvarnom uticaju godišnjih doba. Amplituda c^* pokazuje da potrošnja može biti manja ili veća za 1.3 GWh od prosječne potrošnje. Koeficijent smjera linearnog trenda b^* pokazuje tendenciju rasta potrošnje električne energije.

Primjenom predložene višestepene metode najmanjih kvadrata mogu se istražiti i ostali (ispodgodišnji ili iznadgodišnji) periodični uticaji na potrošnju električne energije u domaćinstvima.

Primijetimo, na kraju, da ploha odgovarajuće minimizirajuće funkcije (2) ima više lokalnih minimuma, što se vidi i na Slici 7. Zbog toga je važno imati dobru početnu aproksimaciju prilikom rješavanja problema najmanjih kvadrata za funkciju (18).

PLOHA MINIMIZIRAJUĆE FUNKCIJE
(periodična funkcija)



Slika 7.

LITERATURA:

1. J. A. Čibej, Diferencijalne enačbe in matematično modeliranje, Obzornik mat. fiz. 35 (1988), pp 129-136.
2. P. E. Gill, W. Murray and M. H. Wright, Practical Optimization, Academic Press, 1981.
3. G. H. Golub and V. Pereyra, The differentiation of pseudoinverses and nonlinear least squares problems whose variables separate, SIAM J. Numer. Anal. 10 (1973), pp 413-432.
4. P. Graff, Die Wirtschaftsprognose, J. C. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen 1977.
5. S. Indihar, Prognošični modeli s S — krivuljama, Naše gospodarstvo 26 (1980) 4, pp 236-247.
6. S. Kosanović i R. Scitovski, Matematičko modeliranje ekonomskih pojava koje teže zasićenju, Ekonomski vjesnik 1 (1988), pp 49-58.
7. C. L. Lawson and R. J. Hanson, Solving least squares problems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1974.
8. P. Mertens, Prognoserechnung, Physica-verlag, Wüezburg-Wien 1981.
9. B. Schön i R. Scitovski, Pokušaj prilagođavanja logističke funkcije zadanom empirijskom statističkom materijalu, Statistička revija XXVII (1977), pp 178-194.
10. R. Scitovski, Linearne aproksimacije u smislu metode najmanjih kvadrata, Statistička revija XXX (1980), pp 207-220.

11. *R. Scitovski*, Nelinearni problemi najmanjih kvadrata gdje se varijable mogu separirati, Statistička revija XXXII (1982), 221-232. [12] *R. Scitovski*, An approach in solving nonlinear least squares problems, IV. conference on applied mathematics, Split, 1984., pp 109-113.

13. *R. Scitovski and S. Kosanović*, Rate of change in economics research, Economics analysis XIX (1985), pp 65-75.

14. *R. Scitovski*, Some special nonlinear least squares problems, Radovi matematički 4 (1988), pp 279-298.

15. *R. Scitovski*, Condition of preponderant increase and Tchebycheff's inequality, VI. conference on applied mathematics, Beograd 1989, pp 189-194.

Dr Rudolf Scitovski, Vladimir Redžep

S u m m a r y

THE APPLICATION OF THE GRAPHICAL POSSIBILITIES OF PC's IN SOLVING NON-LINEAR SQUARE PROBLEMS

Set data and postulated function-models often serve as a basis for solving certain non-linear square problems in the field of economic research. Such problems cannot always be solved, but if they can it is by means of numerical iterative processes which significantly depend on the choice of initial approximation. This paper aims at showing certain graphical possibilities in applying personal computers while defining the initial approximation of these iterative processes. Through the choice of various economic examples we have shown an enormous potential for the application of such function-models which are used in economic research.