UDK 519.8
Stručni rad
Primljeno 27. 02. 1989.

Dr. DRAŽEN BARKOVIĆ,
Ekonomski fakultet Osijek

O JEDNOM PROBLEMU MAXMIN FUNKCIJE CILJA *

Klasa problema programiranja s funkcijom cilja pojavljuje se u različitim aplikacijama, gdje se zahtijeva maksimiranje funkcije proizvodnje »fiksne proporcije« uz skup linearnih ograničenja. Cilj ovog rada je da pokaže kako se klasa spomenutih problema transformira pomoću pogodne transformacije u pojednostavljenu metodu.

* Rad predstavlja dio istraživačkih rezultata potprojekta »Zakon vrijednosti u funkciji upravljanja razvojem« kojeg kao dio projekta »Fundamentalna istraživanja u ekonomiji« financira SIZ znanosti SR Hrvatske u razdoblju 1987—1990. godine.

1. UVOD

U posljednje vrijeme funkcija cilja maxmin koja se spominje u matematičkom programiranju nalazi praktičnu primjenu u nekim problemima iz prakse. Brown[1] informira o teoretskim radovima na tom području koji se kreću od proučavanja problema s maxmin funkcijom cilja sa samo jednim linearnim ograničenjem, pa preko problema mreža s maxmin funkcijom cilja sve do općih problema s minmax funkcijom cilja (koja se može prevesti u maxmin funkciju cilja) i nelinearnih ograničenja. Konačno treba spomenuti i problem s nelinearnom maxmin funkcijom cilja s više linearnih ograničenja. U ovom radu riječ je o problemu s linearnom maxmin funkcijom cilja s više ograničenja.

2. FORMULACIJA MODELA

Jedna klasa problema u matematičkom programiranju mogla bi se formulirati ovako:

(MP) $\max Z = \min (c^1X, C^2X, \ldots, C^nX)$
uz ograničenja

$$AX = b \tag{1.1}$$
$$X \geqq 0 \tag{1.2}$$

Taj problem odnosi se na maxmin funkciju cilja. Matrica A je reda (m, n), b je vektor redak (m, 1), C^k je vektor redak s n elemenata a X je vektor varijabla s n elemenata. C označava matricu reda (n, n) koja se sastoji od vektor redaka $C^1, C^2, \ldots, C^n$. Pretpostavlja se da je C nesigurna matrica i da su svi elementi u C^{-1} nepozitivni. Ovaj problem nelinearne je prirode radi funkcije cilja. Premda problem maxmin funkcije cilja nije matematički težak i sličan je drugim nelinearnim problemima koji se mogu rješavati npr. Čebiševljevim kriterijima u regresiji, cilj je ovog rada da pokaže pojednostavljenu metodu rješavanja problema ako postoje neki posebni uvjeti na strani ograničenja i da ukaže na neke moguće primjene.

Neka je $X = C^{-1} Y$, tada se problem (MP) svodi na slijedeće:[2]

1) Brown, J. R.: Linear Sharing Problem, Operations Research, 1984, br. 5. str. 1088.

2) Gupta, R., Arora, S.: Programming Problems with Maxmin Objective Function, Operations Research, 1978. br. 5, str. 69—72.

$$(MP)' \quad \max F(Y) = \min_{1 \leq k \leq n} e^k y$$

uz ograničenja

$$B\,Y = b \qquad (1.3)$$

$$C^{-1}\,Y \geq 0 \qquad (1.4)$$

gdje je $B = A\,C^{-1}$.

Neka je $\tilde{Y}$ procijenjeno rješenje problema (1.3)—(1.4) i neka je $S = \min_{1 \leq k \leq n} \tilde{Y}_k$. Ako se stavi $\bar{Y} = (S, S, \ldots, S)^T$ i $U = Y - \bar{Y}$ tada se problem (MP)' javlja u obliku

$$(MP)'' \quad \max G(U) = \min_{1 \leq k \leq n} e^k U$$

uz ograničenja

$$B\,U = b - B\,Y \qquad (1.5)$$

$$C^{-1}\,U \geq -\,C^{-1}\,Y \qquad (1.6)$$

$$U \geq 0 \qquad (1.7)$$

Očigledno je da je problem (MP)" ekvivalentan originalnom problemu (MP). Problem (MP)" ima strukturu koju je razmatrao Kaplan (1974).

Kaplanova metoda može se primijeniti u rješavanju ovog problema pod uvjetom da je zadovoljena hipotezom H.

Hipoteza H: za svako dopustivo rješenje U u problemu (MP)" postoji dopustivo rješenje $\bar{U}$ na zraci $u_k = t$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ tako da je $G(U) = G(\bar{U})$.

Moglo bi se primijetiti da uvjet koji je postavljen u H nije hipotetski već zadovoljen ukoliko su sva ograničenja (1.1) tipa $\geq$ a svi elementi matrice A u (MP) negativni. Da se dokaže ova pretpostavka polazi se od dopustivog rješenja U^o problema (1.5) — — (1.7) u kojemu je znak jednakosti (1.5) zamjenjen nejednakošću $\geq$.

Pretpostavimo

$$\min_{1 \leq k \leq n} u^o_k = u^o_r = S_o$$

Promatrajmo točku U^* na zraci $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$ tako da je $u^*_1 = u^*_2 = \ldots = u^*_n = S_o$.

Može se utvrditi da je

$$B\,U^* \geq B\,U$$

$$C^{-1}\,U \geq C^{-1}\,U^o$$

$$U \geq 0$$

pa je tako točka U^* koja leži na zraci $u_k = S$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dopušteno rješenje problema (MP)" u kojem je jednakosti (1.5) zamijena sa $\geq$.

3. NUMERIČKI PRIMJER

Metoda se može ilustrirati na jednom pojednostavljenom primjeru.

$$(MP) \quad \max Z = \min \left(\frac{1}{2} x_1, \frac{1}{4} x_2\right)$$

uz ograničenja

$$(8) \quad -\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{3} x_2 \geq -1$$

$$(9) \quad -\frac{1}{2} x_1 - \frac{2}{3} x_2 \geq -1$$

$$(10) \quad x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

Stavimo $CX = Y$ pa se problem transformira u

$$(MP)' \quad \max F(Y) = \min_{1 \geq k \geq n} e^k Y$$

uz ograničenja

$$(11) \quad -\frac{1}{64} y_1 - \frac{1}{48} y_2 \geq -1$$

$$(12) \quad -\frac{1}{64} y_1 - \frac{1}{24} y_2 \geq -1$$

$\tilde{Y} = (64{,}0)$ je procijenjeno rješenje za (11)—(12). Tada je $Y = (0{,}0)$. Ako se stavi $U = Y - \bar{Y}$ problem se prevodi u oblik

$$(MP)'' \quad \max G(U) = \min_{1 \leq k \leq n} e^k U$$

uz ograničenja

$$(13) \quad -\frac{1}{64} u_1 - \frac{1}{48} u_2 \geq -1$$

$$(14) \quad -\frac{1}{64} u_1 - \frac{1}{24} u_2 \geq -1$$

$$u_1 \geq 0 \qquad u_2 \geq 0$$

Stavimo $u_1 = u_2 = t$ u (13) i (14) pa dobijemo

$$t \leq \frac{192}{7}, \quad t \leq \frac{192}{11}, \quad t \geq 0$$

Pozitivni interval t koji zadovoljava obje restrikcije (13) i (14) je $(0, \frac{192}{11})$, a korespondirajuće optimalno rješenje problema (MP)″ je

$$u_1^* = u_2^* = \frac{192}{11}$$

Radi toga je optimalno rješenje problema

$$(MP)\ X = (\frac{6}{11}, \frac{12}{11}),\ Z = \frac{3}{11}.$$

4. MOGUĆE PRIMJENE

Situacije u kojima bi se mogla primijeniti formulacija problema s maxmin funkcijom cilja ukratko će se opisati na slijedećim primjerima.

Neki vojni brod mora izvršiti svoj zadatak na taj način da ne dođe u situaciju da se treba snabdjeti na samom moru. Poželjno je da se maksimizira vrijeme koje brod provede na moru. Dva resursa moraju se uzeti u obzir u času odlaska na misiju i koji u principu ograničavaju vrijeme koje se može provesti na moru. Prvo je u pitanju hrana za posadu, a drugo, pak, raspoloživo gorivo. Vrijeme koje se provodi u operaciji dato je

$$t = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right),$$

gdje je

x_1 = broj jedinica utovarene hrane

x_2 = broj jedinica utovarenog goriva

a_1 = količina hrane koja se dnevno troši

a_2 = količina goriva koja se toši dnevno

Količina hrane i goriva ograničena je s dva faktora:

1. ukupnom težinom hrane i goriva
2. ukupnim prostorom za hranu i gorivo.

S $a_{1j} \geq 0$, $j = 1, 2$ označava se težinski udio koji otpada na jedinicu j-tog resursa, dok $a_{2j} \geq 0$, $j = 1, 2$ predstavlja sličan udio koji uvažava raspoloživi prostor.

Problem koji treba riješiti, a koji se ne obazire na cjelobrojna rješenja glasi:[3]

$$\max Z = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right),$$

uz ograničenja

$$a_{11}x_1 + a_{12}\ddot{a}_2 \leq 1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq 1$$
$$x_{1,\,2} \geq 0$$

Jedan drugi tip moguće aplikacije maxmin problema odnosi se na efikasnost jedne misije koja se mora ostvariti na različitim razinama a uključuje angažiranje ljudi, upotrebu vozila, goriva i municije. Da bi se ta misija ostvarila na nekoj razini, kažimo jediničnoj, potreban je pravi omjer inputa, npr. 5 ljudi, 1000 galona goriva, jedno vozilo i 1000 paketa municije. Svaki porast jednog resursa bez odgovarajućeg porasta ostalih ne dopušta porast ukupne efikasnosti. Kada bi npr. bilo na raspolaganju 10 ljudi, 5000 galona goriva, jedno vozilo i 2000 paketa municije efikasnost misije ostala bi još uvijek na jediničnoj razini. U tom slučaju funkcija cilja ima oblik maxmin. Funkcija cilja maxmin može se pojaviti i u ekonomskoj primjeni kada se radi o maxmin vrijednosti funkcije proizvodnje u kojoj se respektiraju varijable inputa x_i i u kojoj postoje stalne proporcije koje se koriste u input output analizi. Takva funkcija ne dopušta supstituciju između inputa, ima konstantan »returns to scale« i data je izrazom $z = \min_i (x_i/a_i)$, gdje x_i predstavlja količinu, a_i označava minimalni zahtjev za inputom i koji je potreban da se proizvede jedinica outputa, a z predstavlja output. Ekonomska aplikacija pojavljuje se u različitim problemima koji uključuju optimalno korišćenje ograničenih resursa, posebno u analizi kratkoročne proizvodnje. Još jedna aplikacija govori o problemu maxmin. Radi se o zadatku u kojem se treba odrediti koliko je potrebno uvježbavati neki odjel prije proizvodnje novog proizvoda.

Neka se s x_i označi broj sati uvježbavanja koji je potreban odjelu i. Vrijeme t_i koje je potrebno svakom odjelu »i« da proizvede jedinicu proizvoda u direktnoj je vezi s krivuljom učenja koja proizlazi iz sati uvježbavanja koje ostvaruje pojedini odjel. Krivulja učenja se stoga može napisati u obliku $t_i = c_i x^{e}_i$i. Ako se svaki odjel nalazi na liniji proizvodnje, tada količina koja se proizvodi ovisi od odjela koji ima najduži t_i. Radi toga je potrebno odrediti broj sati uvježbavanja x_i tako da najduže vrijeme proizvodnje bude minimalno, min

3) Kaplan, S.: Application of Programs with Maxmin Objective Functions to Problems of Optimal Resourse Allocation, Operations Research, 1974, br. 4, str. 803.

($\max_i t_i$). Funkcija minmax može se pretvoriti i maxmin funkciju cilja jednostavnom promjenom predznaka t. Tada funkcija cilja postaje max ($\min_i — c_i x^e_j i$). Ograničenja u pogledu uvježbavanja mogu se izraziti linearnim restrikcijama. Ako se s H označi budžet predviđen za uvježbavanje a svaki sat uvježbavanja odjela »i« neka stoji h_i, tada je $\Sigma_i h_j x_j \leq H$. Ako P predstavlja ukupan broj ljudskih sati koji stoji na raspolaganju za uvježbavanje, a s p_i označimo broj ljudi u odjelu, tada važi druga restrikcija $\Sigma_i p_j x_i \leq P$. Kompletan problem glasi

$$\max [\min_i (c_i x^e_i i)]$$
$$\Sigma_i h_i x_i \leq H$$
$$\Sigma_i p_i x_j \leq P$$
$$x_i \leq 0$$

Dr. Dražen Barković

Summary

ON ONE PROBLEM OF MAXMIN OBJECTIVE FUNCTION

Problem programming class with maxmin objective function appears in different applications where production function maximin of »fixed proportion« together with a group of linear restrictions is required. This paper aims at showing how the class of problems mentioned is transformed by means of a convenient transformation into a simplified method.