

UDK 330.105
Pregledni članak
Primljeno 6. listopada 1988.

Mr. ZLATKO KOVAČIĆ,
Ekonomski fakultet, Beograd,

NELINEARNI METODI OCENJIVANJA PROIZVODNIH FUNKCIJA*

Nelinearni metodi ocenjivanja proizvodnih funkcija direktno ocenjuju sve parametre jednovremeno, za razliku od pristupa baziranih na linearnim aproksimacijama, gdje se fiksiraju vrednosti pojedinih parametara ili parcijalnog ocenjivanja koeficijenata. U radu je izložen opšti pristup nelinearnim metodama ocenjivanja, pretpostavke na kojima se zasnivaju, osobine dobijenih ocena kao i statistička procedura vrednovanja dobijenih ocena.

Parametarski oblici proizvodnih funkcija:

- (1) CD: $P = AK^aR^b$
- (2) CES: $P = g(dK^{-r} + (1-d)R^{-r})^{-n/r}$,

gde su varijble: P — proizvodnja, R — rad, K — kapital, a koeficijenti: g — efikasnost, n — stepen ekonomije obima, d — kapitalna intenzivnost, r — supstitabilnost, su per se nelinearni modeli. Kao što smo videli (Jovičić (1988)), oni se mogu sa više ili manje uspeha linearizovati. To će reći da se pogodnom transformacijom takve proizvodne funkcije prevode u linearni model u cilju korišćenja detaljno razrađene linearne statističke teorije ocenjivanja i testiranja. Pri tome se npr. kod CD funkcije eksplicitno podrazumevalo da greška jednačine ulazi multiplikativno u model.

Čak i jednostavna proizvodna funkcija kao što je CD, uz pretpostavku da greška jednačine ulazi na aditivan način, predstavlja model koji se ne može transformisati u linearni. To posebno važi za izuzetno nelinearne modele kao što su CES, VES i dr. Zato se do ocena parametara proizvodnih funkcija dolazilo ili indirektno, preko njihovih različitih aproksimacija (npr. Kmentina (1967) aproksimacija CES funkcije) ili na osnovu sistema jednačina dobijenih pri rešavanju problema minimiziranja troškova (proizvodna funkcija i jednačine marginalne produktivnosti dobijene uz pretpostavku konkurentnosti tržišta faktora).

Kmentina linearna aproksimacija CES funkcije s obzirom na parametar r koristićenjem Taylorovog razvoja u red, pati od suštinskog nedostatka. On je vezan uz pretpostavku samog pristupa, odn. da se CES funkcija razvija Taylorov red u okolini tačke $r=0$ (opravdanje za izbor parametara r nalazi se u ranijim empirijskim istraživanjima kada se utvrdilo da se vrednost r kreće između 0 i 0.4). Pokazano je da je greška aproksimacije (kada od linearne aproksimacije odbijemo originalnu funkciju) jednaka nuli kada je $r=0$ ili kada je $K(t)=R(t)$ u svakom vremenskom trenutku. Očigledno da u opštem slučaju (r uzima vrednosti iz intervala od -1 do beskonačno ili je $K(t) \neq R(t)$) figurisaće greška ocene nepoznatih parametara CES funkcije sa kojom ćemo zbog primenjenog metoda ocenjivanja morati unapred računati. Na takvo ograničenje aproksimacije Taylorovim redom ukazano je u radu Gallanta (1981) i

* Rad predstavlja dio istraživačkih rezultata potprojekta »Zakon vrijednosti u funkciji upravljanja razvojem«, kojeg kao dio projekta »Fundamentalna istraživanja u ekonomiji« financira SIZ znanosti SR Hrvatske u razdoblju 1987—1990. godine.

Elbadawi, Gallant i Souza (1983). Taylorov red dakle daje samo lokalnu aproksimaciju proizvodne funkcije, a ponašanje greške aproksimacije mora se specificovati pri formiranju ekonometrijskog modela. Na jedan alternativni pristup linearnom ocenjivanju CES funkcije ukazano je kod M. Jovičić (1988, kraj odeljka 3.2.) ali se i on bazira na apriori pretpostavljenoj vrednosti n , tj. važi hipoteza o konstantnim prinosima ($n=1$).

Suštinska alternativa navedenim linearnim metodama ocenjivanja bili bi nelinearni metodi ocenjivanja. Za razliku od pristupa baziranih na linearnim aproksimacijama, fiksiranju vrednosti pojedinih parametara ili parcijalnog ocenjivanja koeficijenta CES funkcije (npr. samo σ — koeficijenta elastičnosti supstitucije), nelinearni metodi ocenjivanja direktno ocenjuju sve parametre jednovremeno.

Jedan od ograničavajućih faktora primene nelinearnih metoda ocenjivanja u šezdesetim godinama predstavljalo je odsustvo adekvatnih programa za računare. U sadašnjem trenutku svaki od statističkih/ekonometrijskih paketa za računare sadrži rutine bar za jednu od varijabli nelinearnog ocenjivanja. Upravo zbog te olakšane mogućnosti dobijanja numeričkih ocena nepoznatih parametara potrebno je izložiti opšti pristup nelinearnim metodama ocenjivanja, pretpostavke na kojima se zasnivaju, osobine dobijenih ocena kao i statističku proceduru vrednovanja dobijenih ocena.

CES proizvodnu funkciju datu jednačinom (2) pišemo u opštem obliku kao:

$$(3) \quad y_t = f(x_t, \emptyset) + u_t, \quad t=1,2,\dots,T,$$

gde je sa y_t označena endogena varijabla outputa (= proizvodnja) nastala kombinacijom vektora inputa x_t eksplanatornih varijabli (R_t = rad i K_t = kapital), a sa f je označen poznati funkcionalni oblik CES proizvodne funkcije do na četiri nepoznata koeficijenta $\emptyset = (g, d, r, n)$. Za grešku jednačine u_t uvode se standardne pretpostavke: nezavisnost i identičnost rasporeda, a za metod ocenjivanja baziran na principu maksimalne verodostojnosti još i normalnost rasporeda. Zbog kasnijeg izvođenja gornju jednačinu dajemo u kompaktnijem vektorskom obliku

$$(4) \quad y = f(\emptyset) + u.$$

Do ocene vektora \emptyset metodom nelinearnih najmanjih kvadrata (NNK), dolazimo minimiziranjem sume kvadrata reziduala, tj. funkcije

$$(5) \quad S(\emptyset) = (y - f(\emptyset))'(y - f(\emptyset)).$$

Kako ne postoji eksplicitna formula za NNK ocenu, minimiziranje (5) se sprovodi nekom od iterativnih metoda. Opšti izraz za ocenu \emptyset u i -toj iteraciji je

$$(6) \quad \phi_{i+1} = \phi_i + h_i,$$

gde je h_i korak koji činimo u prostoru svih mogućih vrednosti parametara polazeći od tačke \emptyset_i koja je dobijena u $(i-1)$ -oj iteraciji. Različite varijante operacionalizacije metoda NNK razlikuju se upravo u načinu definisanja tog koraka h_i . Ovde ćemo ukazati samo na tri glavna iterativna metoda jer ostale metode, sem u specijalnim slučajevima, predstavljaju njihove modifikacije. Prva je tzv. Newton-Raphsonova iterativna metoda. Zasniva se na kvadratnoj aproksimaciji funkcije $S(\phi)$, pri čemu algoritam koristi Hessian matricu H (matrica čiji su elementi drugi parcijalni izvodi funkcije $S(\phi)$ po nepoznatom vektoru ϕ) da bi se odredilo u kom pravcu ćemo se kretati u svakoj iteraciji polazeći od prethodne vrednosti vektora ϕ . Opravdanost izbora matrice H za određivanje pravca promene sagledava se kada napišemo spomenutu aproksimaciju od $S(\emptyset)$ u tački \emptyset_i , tj. razvijemo funkciju $S(\emptyset)$ u Taylorov red do drugog (kvadratnog) člana:

$$(7) \quad S(\emptyset) \cong S(\phi_i) + g_i'(\emptyset - \phi_i) + \frac{1}{2}(\emptyset - \phi_i)' H_i(\emptyset - \phi_i)$$

gde je sa g_i označen gradijent funkcije kriterijuma ($S(\emptyset)$), odn. parcijalni izvod $S(\emptyset)$ po vektoru \emptyset u i -toj iteraciji, a H_i predstavlja Hessian matricu u i -toj iteraciji. Da bi desna strana izraza (7) uzela minimalnu vrednost mora biti ispunjeno

$$(8) \quad g_i + H_i(\emptyset - \phi_i) = 0, \text{ odn.} \\ \emptyset = \phi_i - H_i^{-1} g_i$$

Znači, ako je $S(\emptyset)$ kvadratna funkcija tada u izrazu (7) važi striktna jednakost, pa ćemo dostići minimum u jednom koraku. U opštem slučaju Newton-Raphsonov metod ima sledeće nedostatke:

1) prvi i drugi parcijalni izvodi od $S(\emptyset)$ moraju se analitički odrediti,

2) ukoliko Hessian matrica nije pozitivno definitna možemo dobiti vrednost ϕ_{i+1} kod koje važi $S(\phi_{i+1}) > S(\phi_i)$, tj. vrednost

funkcije kriterijuma se povećala umesto da se smanji,

3) čak i uz pozitivnu definitnost Hessian matrice razlika $\phi_{i+1} - \phi_i$ može biti suviše velika ili suviše mala što dovodi do toga da »promašimo« cilj (smanjenje vrednosti funkcije kriterijuma) u prvom ili dobijemo malu brzinu konvergencije u drugom slučaju.

Kod ove i ostalih metoda zahtev je da raspoložemo inicijalnom ocenom \emptyset_i . Pri tome moramo voditi računa da površ definisana funkcijom $S(\emptyset)$ može imati više od jednog lokalnog minimuma. Posebno taj problem dolazi do izražaja pri radu sa malim uzorcima, što je čest slučaj kada kao izvor podataka za ocenu proizvodne funkcije koristimo vremenske serije. Zato pri izboru početnih vrednosti za parametre g , d , r i n treba birati vrednosti koje su bliske tačnim vrednostima. Rezultati ranijih istraživanja i ocena proizvodne funkcije mogu predstavljati dobar izbor početnih vrednosti parametara. Druga mogućnost je da se koriste rezultati dobijeni linearnim metodama ocenjivanja, npr. uz Kmentinu aproksimaciju. Čak i svojevrсна ekspertna ocena tih parametara može poslužiti kao dobra inicijalna vrednost. U svakom slučaju, sa teorijskog stanovišta poželjno je da te inicijalne ocene budu konzistentne jer su Hartley i Booker (1965) pokazali da takvim izborom dobijamo asimptotski već u jednoj iteraciji i Newton-Raphsonovom i Gauss-Newtonovom metodom, ocenu NNK.

Njihova inicijalna ocena se dobija tako što izvršimo podelu uzorka (vremenske serije) na K nepreklopujućih segmenata pri čemu svaki ima po m elemenata ($T=mK$). Izračunamo zatim za svaki i -ti segment aritmetičku sredinu: y_i i $f_i(\phi)$. Hartley-Bookerova ocena se definiše kao vrednost od \emptyset koja zadovoljava K jednačina:

$$(9) \quad y_i = f_i(\emptyset), \quad i=1, 2, \dots, K.$$

U nemogućnosti da eksplicitno napišemo izraz za ocenu od \emptyset pribegavamo iterativnim metodama pri čemu je problem minimizacije $\Sigma(y_i - f_i(\phi))^2$ jednostavniji od prvobitnog. Pojednostavljen pristup izboru inicijalne ocene od \emptyset (varijacija Hartley-Bookerove ideje) izložio je Gallant (1975) ali njegova ocena nije konzistentna.

Druga metoda je tzv. Gauss-Newtonova iterativna metoda. Po nekim autorima (Chow (1983, str. 233)) ova metoda predstavlja aproksimaciju Newton-Raphsonove metode u tom smislu što pri računanju Hessian matrice ignoriše druge izvode funkcije f . Gauss-

-Newtonov algoritam možemo interpretirati kao niz primena metoda običnih najmanjih kvadrata (ONK). U svakom koraku računamo ONK ocene za linearnu aproksimaciju nelinearnog modela:

$$(10) \quad y - f(\emptyset_i) + Z(\emptyset_i) \emptyset_i = Z(\emptyset_i) \emptyset + u,$$

gde je sa $Z(\emptyset_i)$ označen parcijalni izvod funkcije f po vektoru \emptyset za $\emptyset = \emptyset_i$. Za razliku od Newton-Raphsonovog ovaj metod ne zahteva analitičko određivanje drugog izvoda. Inače metod pati od istih nedostataka kao i Newton-Raphsonov metod.

Napokon, treći metod je tzv. konjugovani gradijentni metod Powella.

Ni u kom slučaju navedeni algoritmi ne iscrpljuju listu iterativnih metoda, jer i prosto nabiranje svih metoda zauzelo bi dosta prostora. Upućujemo na Judge i dr. (1985, str. 951—979) gde je dat veoma iscrpan prikaz svih ovih metoda koje se koriste u ekonomiji.

Spomenuti iterativni metodi pružaju NNK ocene koje bar asimptotski imaju osobinu konzistentnosti i normalnosti. Na osnovu tog rezultata baziramo i korišćenje standardnih statističkih testova kao što su Waldov test, test količnika verodostojnosti i test Lagrangeovih multiplikatora.

Rapidni razvoj programske podrške pratio je uvođenje novih i modifikacije postojećih iterativnih metoda. Tako je u okviru BMDP, SPSS, SAS, RATS i drugih paketa, uključen jedan od navedenih algoritama. Ono što nam posebno olakšava primenu metoda nelinearnog ocenjivanja jeste činjenica da su to većinom algoritmi koji ne zahtevaju određivanje izvoda funkcije kriterijuma ili originalne funkcije čije parametre ocenjujemo. S druge strane omogućeno je u proceduru ocenjivanja ugraditi ograničenja na parametre kako nam sugeriše ekonomska teorija.

Kod CES funkcije možemo fiksirati koeficijent koji meri ekonomiju obima na jedinicu, odn. uzeti da postoje stalni prinosi. Na parametar distribucije, odn. koeficijent d nametnuto je ograničenje: $0 < d < 1$. Parametar supstitucije (koeficijent r) nam definiše koeficijent elastičnosti supstitucije i ne može biti manji od -1 , tj. moguće vrednosti za r pripadaju intervalu od -1 do beskonačno. Napokon, parametar g je nenegativan broj. Izborom inicijalnih vrednosti algoritam otpočinje sa radom. Nema potrebe opisivati rad algoritma u slučaju svakog programskog paketa kada su nametnuta ograničenja na parametre jer se ne zahteva naše aktivno učešće u određivanju vrednosti ocena parametara u svakoj iteraciji.

Što se tiče dosadašnjih studija koje su koristile navedene metode nelinearnog ocenjivanja, spomenimo rad Bodkina i Kleina (1967).

Oni su ocenjivali CD (bez i sa pretpostavkom o konstantnoj stopi povraćaja) i CES funkciju. Nelinearno ocenjivanje je vršeno sa Newton-Raphsonovom metodom, pri čemu je eksperimentisano sa različitim tretmanom greške jednačine. U jednom slučaju greška je ulazila na multiplikativan, a u drugom slučaju na aditivan način. Njihovi rezultati ukazuju na to da direktno ocenjivanje i CD i CES funkcije bez obzira na alternativni tretman greške jednačine (multiplikativna/aditivna) daje sliku ekonomske strukture u koju teško da možemo verovati (npr. kod CES funkcije je d približno jednako jedinici, što sugerirše da je kapital jedini faktor koji determiniše output). Uz to je izražen i fenomen autokorelacije reziduala što ima svoje reperijske na testove značajnosti.

Drugi pristup koji koriste Bodkin i Klein je da se formira (za CES funkciju) sistem od pet simultanih nelinearnih jednačina po pet nepoznatih parametara (pored parametara g , d , r i n imaju i koeficijent uz vreme kao varijablu pošto je razmatran model sa Hicksovim neutralnim tehničkim progresom). Navedeni sistem se formira tako što se parcijalni izvodi funkcije kriterijuma (suma kvadrata reziduala) po nepoznatim koeficijentima izjednače sa nulom. Svaka od ovih jednačina se može razviti u red oko pretpostavljenih inicijalnih vrednosti parametara. Rešavanjem tog sistema dobijamo u prvoj iteraciji skup ocena nepoznatih parametara sa kojima ulazimo u narednu iteraciju sve dok se ne postigne zahtevana preciznost. Korišćenjem ovog pristupa Bodkin i Klein dobijaju rezultate koji se mogu porediti sa rezultatima drugih studija pri čemu ne možemo biti sigurni da predstavljaju ocene parametara koje daju globalni optimum funkcije kriterijuma umesto lokalnog.

Rad Chartsisa (1971) je posvećen ocenjivanju CES funkcije korišćenjem Gauss-Newtonove metode. Brojne aplikacije Chartsisovog programa na osnovu uporednih podataka i vremenskih serija sugerirše da, recimo u 64 uzorka od ukupno 74 postiže se konvergencija korišćenog iterativnog procesa posle šest iteracija.

Studija Mizona (1977) mada prevashodno posvećena problemima statističkog zaključivanja u nelinearnim modelima, sadrži i postupak diskriminacije između alternativnih proizvodnih funkcija pri čemu se koristi metod nelinearnog ocenjivanja baziran na konjugovano gradijentnom metodu Powella.

Bodkin i Klein su došli do sledećeg rezultata. Ako se u CES funkciji rad i kapital tretiraju kao egzogene, a realni output i relativne cene faktora kao endogene (ovaj tretman je adekvatan uz postojanje potpune zaposlenosti faktora i ako rast rada i kapitala tokom vremena ne reaguje na ekonomske uslove u kojima se odvija proizvodnja) tada se ocene parametara značajno razlikuju od slučaja gde je suprotna podela varijabli na endogene i egzogene.

Za razliku od njihovog rezultata Tsurumi (1970) je bar u slučaju ocene koeficijenta elastičnosti supstitucije (Tabela 13. u njegovom radu) pokazao da oba metoda: nelinearni najmanji kvadrati (NNK) i nelinearni dvostepeni najmanji kvadrati (N2NK) daju numerički približno jednake vrednosti. Znači da ako nekorektno tretiramo endogene varijable $K(t)$ i $R(t)$ kao egzogene, to ne utiče bitno na rezultat, odn. dobijene ocene parametara CES funkcije.

Uzimajući u obzir da su spomenuti autori primenili navedene metode ocenjivanja na podatke američke privrede, odn. sektor industrije u Kanadi, ne možemo izvući zaključak o opštem slučaju o tome koji od metoda treba preferirati, NNK ili N2NK. Svakako da metod N2NK po definiciji daje konzistentne i asimptotski efikasne ocene i da ga treba primeniti kada nema mesta pretpostavkama o »fiksnom« karakteru (egzogenosti) faktora proizvodnje.

Inače, Tsurumi je pri ocenjivanju CES funkcije koristio Gauss-Newtonov iterativni metod i to tako što je prvo linearizovao funkciju oko inicijalnih vrednosti (vidi aproksimaciju (10)) i zatim je nastavio kao da ima model koji je nelinearan samo u varijablama. No za razliku od modela (10) kod Tsurumija je $Z(\emptyset_i)$ endogeno pošto sadrži $R(t)$ i $K(t)$ za koje je pretpostavljeno da su endogene varijable. Eksperimentisano je sa dva moguća pristupa N2NK.

Prema prvom pristupu $Z(\emptyset_i)$ je regresirano u prvom stepenu na skup egzogenih varijabli, a zatim u drugom stepenu te ocenjene vrednosti $Z(\emptyset_i)$ se koriste pri oceni modela (10) (ovo je tzv. interpretacija dvostepenih najmanjih kvadrata preko instrumentalnih varijabli). Prema drugom pristupu računamo ocenjene vrednosti endogenih varijabli u modelu da bi ih koristili u računanju $Z(\emptyset_i)$ (ovo je tzv. Theilova interpretacija dvostepenih najmanjih kvadrata). Rezultati su pokazali da je kod drugog pristupa iterativni proces sorije konvergirao, a ocene u pojedinim slučajevima nisu imale

ekonomsku interpretaciju (npr. dobijeno je r manje od -1).

Očigledno je da na osnovu primene neke od metoda nelinearnog ocenjivanja možemo čak i na osnovu istog seta podataka dobiti različite rezultate. U situaciji kada raspoložemo sa serijom podataka ograničene dužine ovakvi nalazi ne bi trebalo da izazovu čuđenje, nego bi ukazali na potrebu primene metoda simulacije u komparaciji alternativnih nelinearnih ocena u malim uzorcima.

Rezultati Monte Karlo studije nelinearnih ocena CES proizvodne funkcije dati su u radu Kumara i Gapinskog (1974). Mada je istraživanje koje su sprovedi zamišljeno sa skromnim ciljevima i uz relativno specifičan eksperimentalni model, dobili su rezultate koji pružaju koristan uvid u osobine nelinearnih ocena CES funkcije. Pristranost ocena svih parametara osim r uvek je bila mala bez obzira da li je korišćena specifikacija CES funkcije sa aditivnom ili multiplikativnom greškom. Međutim, slično nalazu Bodkina i Kleina, ocena parametra r (preko njega i koeficijent elastičnosti supstitucije) bila je veoma neprecizna. Po mišljenju autora dva su uzroka za ovo neprecizno ocenjivanje: prvi je vezan uz glatkoću (monotonost) funkcije kriterijuma koju optimiziramo, u odnosu na parametar r , a drugi je proizašao iz načina funkcionisanja korišćenog algoritma blizu optimuma.

Završavajući ovo poglavlje posvećeno nelinearnim metodama ocenjivanja sumirali bismo naš stav u pogledu njihovog korišćenja:

1) Parametarski modeli proizvodnih funkcija su nelinearni modeli koje treba ocenjivati adekvatnom nelinearnom metodom ocenjivanja.

2) Zbog uočenih nepreciznosti ocene dobijene metodom NNK koristiti i linearne metode ocenjivanja radi komparacije, a sugerise se da linearne ocene upotrebimo za inicijalne vrednosti pri nelinearnom ocenjivanju.

3) Koristiti različite iterativne metode za dobijanje ocena NNK, a posebno ispitati da li su dobijene ocene stabilne tako što će se menjati inicijalne vrednosti. S druge strane zbog razložne pretpostavke da pored uticaja faktora proizvodnje postoji i povratni uticaj outputa na rad i kapital preporučuje se korišćenje metoda N2NK.

4) Mada neki programski paketi imaju mogućnost nametanja ograničenja na parametre CES funkcije, koristiti pristup od opšteg ka specifičnom, polazeći od opštijeg modela, na osnovu sekvencijalne procedure statističkog testiranja zaključiti da li konkretni podaci potvrđuju nametnuta ograničenja. Drugim rečima, zalažemo se za postupak koji je svestrano i zaokruženo izložen u radu Mizona (1977).

LITERATURA:

1. Bodkin, R. G. and Klein, L. R. Nonlinear Estimation of Aggregate Production Functions, *Review of Economics and Statistics* 49/1967, str. 28—44.
2. Charatsis, E. G.: A Computer Program for Estimation of the Constant Elasticity of Substitution Production Function, *Applied Statistics* 20/1971, str. 286—296.
3. Chow, G. C.: *Econometrics*, McGraw-Hill, New York/1983.
4. Elbadawi, I., Gallant, A. R. and Souza: An Elasticity Can Be Estimated Consistently without a priori Knowledge of Functional Form, *Econometrica* 51/1983, str. 1731—1752.
5. Gallant, A. R.: Nonlinear Regression, *The American Statistician* 29/1975, str. 73—81.
6. Gallant, A. R.: On the Bias in Flexible Functional Forms and an Essentially Unbiased Form, *Journal of Econometrics* 15/1981, str. 211—246.
7. Goldfeld, S. M. and Quandt, R. E.: *Nonlinear Methods in Econometrics*, North-Holland Amsterdam 21/1972.
8. Hartley, H. O. and Booker, A.: Non-Linear Least Squares Estimation, *Annals of Mathematical Statistics* 36/1965, str. 638—650.
9. Jovičić, M.: *Ekonometrijsko kvantifikovanje marginalne produktivnosti ljudskog prema tehničkom faktoru*, Ekonomski fakultet Osijek, 1988.
10. Judge, G. C. Griffiths, W. E., Hill, R. C., Lutkepohl H. and Lee, T. C.: *Theory and Practice of Econometrics*, Second Edition, John Wiley and Sons, New York 1985.
11. Kmenta, J.: On Estimation of the CES Production Function, *International Economic Review* 8/1967, str. 180—189.
12. Kumar, T. K. and Gapinski, J. H.: Nonlinear Estimation of the CES Production Parameters: A Monte Carlo Study, *Review of Economics and Statistics* 56/1974, 563—567.

13. *Mizon, G. E.*: Inferential Procedures in Nonlinear Models: An Application in a UK Industrial Cross Section Study of Factor Substitution and Return to Scale, *Econometrica* 45/1977, str. 1221—1242.

14. *Tsurumi, H.*: Nonlinear Two-Stage Least Squares Estimation of CES Pro-

duction Functions Applied to the Canadian Manufacturing Industries 1926-1939, 1946-1967, *Review of Economics and Statistics* 52/1970, str. 200—207.

15. *Wallis, K. F.*: Topics in Applied Econometrics, Second Edition, Basil Blackwell, Oxford 1979.

Zlatko Kovačić, M. Sc. Econ.

Summary

NON-LINEAR METHODS FOR EVALUATING PRODUCTION FUNCTIONS

Non-linear methods of evaluating production functions directly evaluate all parameters simultaneously, unlikely the approaches based on linear approximations where values of some parameters or partial evaluation of coefficients are fixed. The work presents a general approach to non — linear methods of evaluating, the assumptions on which characteristics of the obtained estimates are based as well as the statistical procedure of evaluating the obtained estimates.