UDK 330.105
Izvorni znanstveni članak
Primljeno 6. listopada 1988.

Dr. SLAVICA KOSANOVIĆ,
Dr. RUDOLF SCITOVSKI,
Ekonomski fakultet Osijek

MATEMATIČKO MODELIRANJE EKONOMSKIH POJAVA KOJE TEŽE ZASIĆENJU*

U ekonomskim istraživanjima često je potrebno neku pojavu opisati funkcijom čija se vrijednost asimptotski približava razini zasićenja. U radu se promatra klasa tzv. S-funkcija, koje služe za kratkoročne i dugoročne prognoze. Poseban naglasak dat je na analizu klasa funkcija, koje ovisno o parametru, mogu imati pozitivnu ili negativnu asimetriju ili se mogu preobraziti u poznatu logističku funkciju. Procjenjivanje parametara ovakvih funkcija je složen nelinearni problem najmanjih kvadrata, koji ne mora uvijek imati rješenje. Ekonomska interpretacija svojstava tih funkcija je izuzetno značajna za strategijsko upravljanje ekonomskim sistemima.

* Rad je rađen u okviru potprojekta »Zakon vrijednosti u funkciji upravljanja razvojem«, kojeg kao dio projekta »Fundamentalna istraživanja u ekonomiji« financira SIZ znanosti SR Hrvatske u razdoblju 1987-1990. godine.

1. Uvod

U ekonomskim istraživanjima vrlo često se javlja potreba primjene tzv. S-krivulja. To su funkcije čiji grafovi imaju oblik izduženog slova S, imaju dvije horizontalne asimptote i jednu točku infleksije, koja može biti različito visinski smještena između dvije asimptote. Točka infleksije S-krivulje pokazuje početak negativne promjene u ponašanju neke ekonomske pojave. Ukoliko je točka infleksije bliže donjoj asimptoti S-krivulja opisuje kretanje relativno dugotrajne pojave, a ukoliko je smještena bliže gornjoj asimptoti, opisano je kretanje relativno kratkotrajne pojave.

Osim u ekonomiji, S-funkcije se često koriste u primjenjenim istraživanjima iz područja medicine, biologije, kemije, fizike, tehnike itd.

Optimalni parametri ovih funkcija mogu se odrediti nekom od poznatih metoda za rješavanje nelinearnih problema najmanjih kvadrata (vidi t. 4), ako podaci ispunjavaju izvjesne uvjete (vidi t. 3), te ako se početna aproksimacija bira u području prihvaćanja (vidi npr. [29]).

U ovkiru istraživačkog programa na potprojektu »Zakon vrijednosti u funkciji upravljanja razvojem«, a na osnovi dosadašnjih spoznaja već se pristupilo izradi odgovarajućeg korisničkog softwarea za procjenu parametara ovakvih funkcija.

2. S-funkcije

2.1. Historijat problema

Problemi matematičkog opisivanja rasta neke pojave prvi put su se javili u istraživanjima iz područja fizike, biologije i demografije. Tako npr. Malthusova teorija o neograničenom rastu populacije, zapisana u obliku diferencijalne jednadžbe glasi

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = \alpha\, y, \ \alpha > 0$$

Ovdje je t— vrijeme, $y = y(t)$ — veličina populacije u trenutku t, a α — konstanta proporcionalnosti. Jednadžba (1) pokazuje da je brzina porasta populacije u nekom trenutku proporcionalna veličini populacije u tom trenutku, što znači da se svakim trenutkom veličina populacije eksponencijalno povećava. To se vidi iz rješenja diferencijalne jednadžbe (1), koje se može napisati u obliku:

(2) $y = b\, e^{\alpha t}$

gdje je $b > 0$ integraciona konstanta.

Jednadžba (1) može se zapisati i u obliku:

(3) $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \alpha,$$

čime je iskazan zakon: relativna brzina porasta (»stopa porasta«) je konstantna. Dakle, eksponencijalna funkcija (2) opisuje pojavu koja ima konstantnu stopu rasta veličine c. Više o tome može se vidjeti u [25].

Pretpostavka o postepenom usporavanju rasta može se zapisati u obliku diferencijalne jednadžbe:

(4) $$\frac{dy}{dt} = \alpha\, y - g\,(y)$$

gdje je $g\,(y) > 0$. Ako npr. uzmemo $g\,(y) = cy^2$, onda jednadžba (4) prima oblik:

(5) $$\frac{dy}{dt} = \alpha\, y - c\, y^2$$

Kao što vidimo jednadžbe (4), odnosno (5) nastale su od jednadžbe (1) oduzimanjem jedne pozitivne funkcije. Jednadžba (5) je poznata Verhulstova[1] diferencijalna jednadžba (više o tome vidi npr. u [23]).

Jednadžba (5) uz oznaku $\alpha = c\, A$ može se pisati kao:

(6) $$\frac{dy}{dt} = c\, y\, (A - y)$$

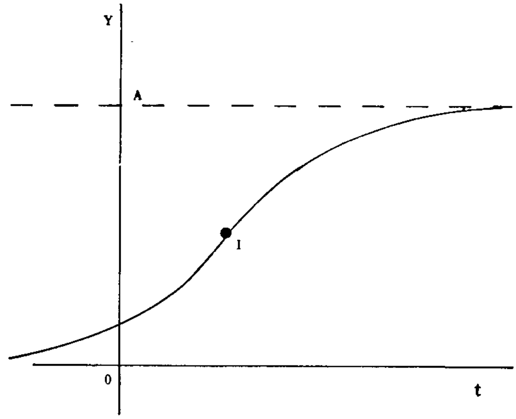
gdje je $c > 0$ konstanta proporcionalnosti. Ova jednadžba pokazuje da je brzina porasta populacije u nekom trenutku proporcionalna veličini populacije u tom trenutku y(t) i još neiskorištenom životnom prostoru u tom trenutku (A — y(t)). Pri tome je $A > 0$ nivo zasićenja, tj. maksimalna populacija nekog ograničenog životnog prostora.

Rješenje jednadžbe (6) je poznata logistička funkcija

(7) $$y = \frac{A}{1 + b\, e^{-ct}}, \quad c > 0$$

(Više o njoj može se naći u [7], [9], [10], [13], [14], [17], [23], [29]).

1) Originalna Verhulstova diferencijalna jednadžba iz 1865. godine opisuje slijedeći prirodni zakon: relativna brzina porasta broja živih bića u nekom ograničenom životnom prostoru proporcionalna je broju još nezaposjednutih mjesta egzistencije«



Slika 1.

Logistička funkcija (slika 1.) ima oblik izduženog slova S, dvije horizontalne asimptote $y = 0$ i $y = A$ i točku infleksije smještenu u sredini između tih asimptota sa koordinatama:

$$t_I = \frac{\ln b}{c}, \quad y_I = \frac{A}{2}$$

2.2. *Ekonomske pojave sa zasićenjem*

Prema [13] ili [17] diferencijalnu jednadžbu (6) možemo interpretirati i u slučaju nekih asimptomskih kategorija.

Ako pretpostavimo da je y(t) potražnja za nekom robom u trenutku t, onda jednadžba (6) opisuje slijedeći ekonomski zakon:

»Povećanje potražnje za nekom robom proporcionalno je količini već prodatih proizvoda y(t) i preostalom tržišnom potencijalu (A — y(t)).«

U ovom slučaju nivo zasićenja A predstavlja onu količinu robe koja u potpunosti zasićuje tržište. Veličina A u svakom pojedinačnom slučaju se posebno procjenjuje.

Međutim, ovako definiran zakon ponašanja koji je temeljen na premisama čija je istinitost istražena u medicini, biologiji i fizici ne zadovoljava u potpunosti svojstva ekonomskih pojava. Tzv. kontaktna komponenta je značajna u tumačenju fizikalnih lančanih procesa, procesa širenja bolesti, ali nije potpuno odgovarajuća za opisivanje promjena u ekonomskim pojavama (više o tome vidi u 17). Potražnja za nekim proizvodom ne javlja se isključivo kao rezultat kontakta s tim proizvodom nego i o niz drugih pretpostavki (postojanje potrebe, nezadovoljena potreba, kupovna moć...). Ili, pojava nove tehnologije ne izaziva odmah potražnju za tom tehnologijom. Prema tome, u pravilu kod ekonomskih pojava kontaktna komponenta djeluje usporeno, odnosno s izvjesnom retardacijom koja je rezultat procesa učenja, prilagođavanja novim proizvodima, tehnologijama, organizacijama itd. Budući je taj proces učenja različit u različitim ekonomskim situacijama, logistički model opisivanja ponašanja neke ekonomske pojave ima izvjesne manjkavosti koje izražavaju u svojstvu infleksione točke i premise o stalnosti nivoa zasićenja. Budući da ponašanje ekonomskih pojava rijetko ima karakteristiku simetričnosti, za njihovo opisivanje bili bi opravdaniji modeli koji bi imali ugrađene pretpostavke asimetričnog ponašanja i fleksibilnih razina zasićenja.

Očito da se jedan od glavnih nedostataka logističke funkcije treba tražiti u činjenici da se točka infleksije (točka u kojoj interes za robom, novom tehnologijom... počinje opadati) nalazi na polovini nivoa zasićenja ($y_I = A/2$). Osim toga graf logističke funkcije je centralno simetričan s obzirom na točku infleksije. Naime, za logističku funkciju vrijedi:

$$y\,(t_I) = \frac{A}{2}; \quad y\,(t_I+x) = \frac{A}{1+e^{-cx}};$$

$$y\,(t_I - x) = \frac{A}{1+e^{cx}}$$

iz čega se lako provjerava identitet:

$$y\,(t_I) = \frac{1}{2}\,[y\,(t_I+x) + y\,(t_I - x)] \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Drugim riječima, ako bi ishodište koordinatnog sistema doveli u točku infleksije I, dobili bi neparnu funkciju i zato se za graf logističke funkcije kaže da je simetrična S-krivulja.

U osnovi ekonomskih pojava sa zasićenjem uvijek je tehnološki progres (nove tehnologije, novi proizvodi) iz čega slijedi da opisivanje zakonitosti u ponašanju ekonomskih pojava slijedi iz spoznavanja njihove interakcije s tehnološkim progresom. Razumijevanje tehnološkog progresa pretpostavlja uočavanje zakonitosti po kojoj se neka tehnologija u početku polako razvija, nakon toga se njen razvoj ubrzava, a zatim neminovno dolazi do pada. Tehnološki progres kao najbitnija komponenta ukupnog razvoja bilo kojeg sistema na taj način određuje i zakonitost razvojnog ponašanja općenito. Takva zakonitost razvojnog ponašanja najbolje se opisuje tzv. asimetričnom S-funkcijom, jer se analizom svojstava te funkcije može odgovoriti na pitanja o intenzitetu i vrsti promjena, momentu njihovog nastajanja, dužini trajanja pojedine karakteristične faze razvojnog ponašanja, te granici rasta uz pretpostavljene početne uvjete razvoja.

2.3. Asimetrične S — funkcije

U skladu sa [13] uvodimo slijedeću definiciju:

Definicija 1. Neka je f neka S — funkcija, a točka $I(t_I, y_I)$ njena točka infleksije. Reći ćemo da je funkcija f pozitivne asimetrije onda ako vrijedi:

$$y\,(t_I) < \frac{1}{2}\,[y\,(t_I+x) + y\,(t_I - x)] \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

a reći ćemo da je funkcija f negativne asimetrije onda ako vrijedi:

$$y\,(t_I) > \frac{1}{2}\,[y\,(t_I+x) + y\,(t_I - x)] \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

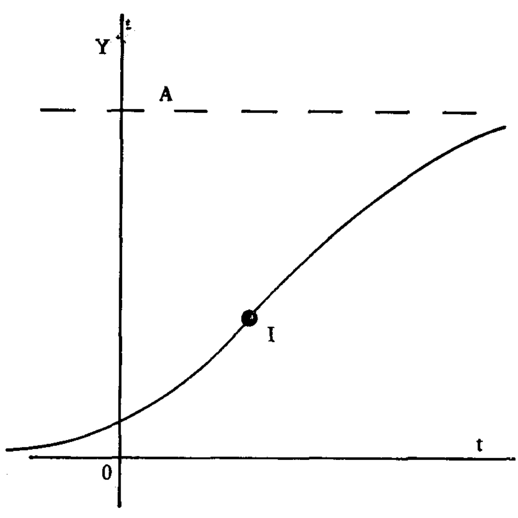
Napomena 1. Iz prethodne definicije lako se vidi da za funkciju s pozitivnom asimetrijom vrijedi:

$$y_I > A/2,$$

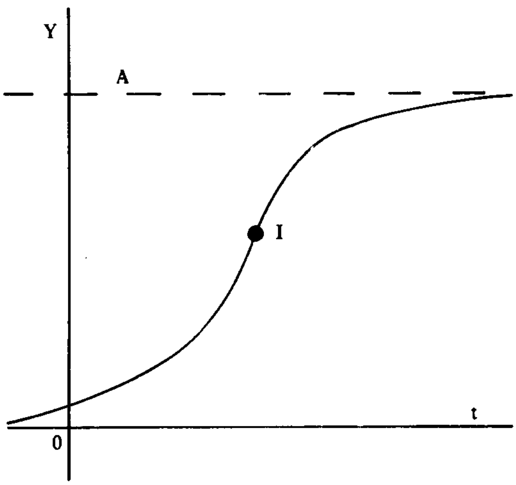
a za funkciju s negativnom asimetrijom:

$$y_I < A/2,$$

gdje je A — nivo zasićenja (vidi slike 2 i 3)



Slika 2.
Funkcija s pozitivnom asimetrijom



Slika 3.
Funkcija s negativnom asimetrijom

R. Lewandowsky u [13] preporučuje da se funkcije s pozitivnom asimetrijom koriste za opisivanje pojava s dugim ciklusima ponašanja (npr. potražnja za osobnim automobilima, televizorima i sl.), a funkcije s negativnom asimetrijom da se koriste za opisivanje pojava čije se ponašanje odvija u relativno kraćim vremenskim razdobljima (npr. potražnja za prehrambenim proizvodima).

U svrhu definiranja funkcija s pozitivnom i negativnom asimetrijom pođimo od diferencijalne jednadžbe (6):

$$\frac{dy}{dt} = c\ y\ (A - y),\ c > 0$$

Umjesto retardirajućih faktora $(A - y)$ stavimo općenito $g\ (y/A)$ pa dobivamo jednadžbu:

$$(8) \qquad \frac{dy}{dt} = c\ y\ g\ (y/A)$$

Ako specijalno uzmemo $g\ (u) = 1 - u^m$, iz (8) dobivamo diferencijalnu jednadžbu:

$$(9) \qquad \frac{dy}{dt} = c\ y\ [1 - (y/A)^m]$$

Za $m = 0$ rješenje jednadžbe (9) je $y =$ const. Zato pretpostavimo da je $m \neq 0$. Jednadžbu (9) napisat ćemo u obliku:

$$(10) \qquad \int \frac{dy}{y\ [1 - (y/A)^m]} = c \int dt$$

Integral na lijevoj strani uz supstituciju $u = y/A$ prelazi u:

$$I = \int \frac{du}{u\ (1 - u^m)},$$

što nakon ponovne supstitucije $v = 1 - u^m$ prelazi u integral:

$$I = \frac{1}{m} \int \frac{dv}{v\ (v - 1)}$$

koji se lako rješava. Na taj način iz (10) dobivamo:

$$\ln\ (1 - \frac{1}{1 - (y/A)^m})^{1/m} = ct - \ln\ (-b)$$

odakle nakon lakšeg računa dobivamo rješenje diferencijalne jednadžbe (9):

$$(11) \qquad y = \frac{A}{(1 + b\ e^{-cmt})^{1/m}},\ c > 0$$

Izjednačavanjem druge derivacije ove funkcije s nulom lako dobivamo točku infleksije funkcije (11):

$$I\ (\frac{1}{cm} \ln \frac{m}{b};\ \frac{A}{(1+m)^{1/m}})$$

Primjetimo da funkcija (11) ima smisla za svako $m > 0$.

TEOREM 1. Neka je $m > 0$. Funkcija (11) je funkcija s pozitivnom (negativnom) asimetrijom ako je $m < 1$ $(m > 1)$. Funkcija (11) prelazi u logističku funkciju (simetrična funkcija) ako je $m = 1$.

Dokaz. U svrhu dokaza ovog teorema pogledajmo funkciju:

$$q\ (x) = (1+x)^{-1/x},\ x > 0$$

Njena derivacija glasi:

$$q'\ (x) = \frac{q(x)}{x} \quad \frac{(1+x)\ \ln\ (x+1) - x}{x\ (x+1)}$$

Kako je $\ln\ (x+1) > x/(x+1)$ za $x > 0$, onda to znači da je $q'\ (x) > 0$ za $x > 0$, tj. funkcija q je rastuća funkcija u čitavom području definicije.

Osim toga vrijedi:

$$(12) \qquad \lim_{x \to +\infty} q\ (x) = 1; \qquad \lim_{x \to -1} q\ (x) = 0$$

Ordinatu točke infleksije y_I možemo promatrati kao funkciju $m \to A\ q\ (m)$

Budući da je funkcija q rastuća na čitavom području definicije, a prima vrijednosti iz intervala $(e^{-1},1)$, onda prema tome ordinata točke infleksije y_I može primati sve vrijednosti između A/e i A. Očigledno je da funkcija (11) za m = 1 postaje logistička funkcija (dakle, simetrična funkcija), a onda za $m < 1$ funkcija (11) postaje funkcija s pozitivnom i za $m > 1$ funkcija s negativnom asimetrijom.

U slijedećoj tablici za neke vrijednosti parametra m izračunat je relativni (u %) položaj točke infleksije I od nivoa zasićenja A.

m	$(y_I/A).100$	m	$(y_I/A).100$
0.1	38.6	2	57.7
0.5	44.4	10	78.7
1	50	100	95.5

Tabela 1. Bliskost točke infleksije do nivoa zasićenja izražena u %

3. Egzistencija rješenja

U primjenjenim istraživanjima obično su zadani podaci (p_i, t_i, f_i), $i = 1, \ldots, n$. Pri tome su $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ vrijednosti nezavisne varijable (obično je to vrijeme), f_i su odgovarajuće vrijednosti zavisne varijable, a p_i težine podataka. Brojevi f_i obično predstavljaju količine pa zato pretpostavljamo da su pozitivni. Težine p_i su brojevi iz intervala [0,1].

U funkciji (11):

$$f\ (t) = \frac{A}{(1+b\ e^{-cmt})^{1/m}}, \quad c > O$$

parametar A predstavlja nivo zasićenja i određuje se iskustveno ili na bazi eksperimenta (više o tome vidi t. 2.2), dok parametrom m definiramo mjeru asimetričnosti promatrane pojave (prema Teoremu 1.).

Parametre b i c odredit ćemo na osnovi zadanih podataka u smislu najmanjih kvadrata. Tražit ćemo da težinska (ponderirana) suma kvadrata odstupanja stvarnih od teoretskih vrijednosti bude minimalna, tj. minimizirat ćemo funkciju

$$F\ (b, c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i\ [g_i\ (b, c)]^2, \tag{13}$$

gdje je:

$$g_i\ (b, c) = f_i - \frac{A}{(1+b\ e^{-cmt_i})^{1/m}}.$$

Ovo nije linearni problem najmanjih kvadrata i nema uvijek rješenja (vidi [30]). Naime ako bi uzeli $f_1 = \ldots = f_n = A$ onda bi bilo $F\ (0, 0) = 0$. Kako je $F\ (b, c) \geq 0$ za svaki $(b, c) \neq (0, 0)$. onda bi to značilo da funkcija (13) postiže svoj globalni minimum u točki (0, 0). To bi značilo da funkcija (11) u tom slučaju degenerira u pravac $t \to A$, što je uvjetom $c > 0$ isključeno.

Ovaj mali primjer uči nas da u svrhu osiguranja egzistencije minimuma funkcije (13) na podatke moramo postaviti izvjesne zahtjeve. Može se pokazati (vidi [30]) da optimalne parametre funkcije (13) treba tražiti u prvom kvadrantu ($b > 0$, $c > 0$). S druge strane, podaci moraju posjedovati svojstvo pretežnog rasta. To znači da koeficijent smjera pripadnog linearnog trenda mora biti pozitivan (vidi [28]), odnosno da podaci moraju zadovoljavati Čebiševljevu nejednakost (vidi [30]). Osim toga, nivo zasićenja A mora se birati tako da bude $f_i \leq A$ za sve i. U slučaju funkcije s pozitivnom asimetrijom ($m < 1$) to su i dovoljni uvjeti, dok u slučaju primjene funkcije s negativnom asimetrijom ($m > 1$) podaci još moraju ispunjavati i zahtjev:

$$f_{k+1} + \ldots f_{2k} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (f_1 + \ldots + f_k), \quad 2k = n$$

(vidi [12] ili [30]).

4. Metode za procjenjivanje optimalnih parametara

Treba spomenuti da se u literaturi (vidi npr. [2], [9], [10], [13], [17] itd.) mogu naći vrlo različiti aproksimativni pristupi za procjenu parametara ovakvih funkcija, ali da obično nisu strogo matematički fundirani, već se zasnivaju na nekim heurističkim metodama. U želji da maksimalno pojednostave računski postupak, mnogi autori ne biraju sredstva da dođu do željenog cilja, te na taj način čine greške koje se ne mogu procijeniti (kritika jednog takvog pristupa i prijedlog za korektno rješavanje problema prikazan je u [25]).

Od izvornih egzaktnih metoda za rješavanje nelinearnih problema najmanjih kvadrata spomenut ćemo Gauss-Newtonovu i Marquardtovu metodu. Sve druge, novije metode polaze od ovih algoritama.

Problemi najmanjih kvadrata su specijalni problemi minimizacije, a njihova specijalnost proističe iz specijalnog oblika gradijenta minimizirajuće funkcije (13):

(14) $\text{grad } F = J^T P\ G$

i Hesijana:

(15) $H_F = J^T P\ J + \Sigma p_k\ g_k\ H_k$

funkcije F. Ovdje je J Jacobijeva matrica, $P = \text{diag}(p_1, \ldots, p_m)$ i H_k matrica drugih derivacija funkcije g_k.

Gauss-Newtonova metoda za rješavanje nelinearnih problema najmanjih kvadrata (vidi [2], [5], [8], [20], [22]) nastala je prilagođavanjem poznate Newton-Raphsonove metode (vidi [2], [5]) za rješavanje problema minimuma bez ograničenja. Umjesto Hesijana (15) funkcije F koristi se njegova aproksimacija J^TPJ i tako dobivamo iterativni proces:

(16) $$\begin{bmatrix} b_k+1 \\ c_k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix} - \lambda_k\ (J^T_k\ P\ J_k)^{-1}\ J^T_k\ P\ g_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

gdje je $J_k = J\ (b_k, c_k)$, a λ_k duljina koraka (broj iz intervala [0,1]) koja se određuje iz zahtjeva:

$$F\ (b_{k+1}, c_{k+1}) < F\ (b_k, c_k)$$

Može se pokazati da, uz povoljan izbor početne aproksimacije (b_0, c_0) (vidi [30]), iterativni proces (16) vodi prema optimalnom rješenju (b^*, c^*).

Marquardtova metoda (vidi [5], [6], [16]) je iterativni proces oblika:

(17) $$\begin{bmatrix} b_k+1 \\ c_k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix} + d_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

gdje je d_k rješenje jednadžbe:

(18) $$(J^T_k\ P\ J_k + \lambda\ I)\ d = -J^T_k\ P\ g_k,\quad \lambda\ \varepsilon\ (0, \infty)$$

Odmah se vidi da za $\lambda = 0$ Marguardtova metoda prelazi u običnu Gauss-Newtonovu metodu, dok za $\lambda \to \infty$ ova metoda postaje sve sličnija vrlo sporoj gradijentnoj metodi (vidi [20]). Zato se strategija biranja parametra λ sastoji u tome da uz njegovo minimalno povećavanje treba sačuvati tendenciju spusta, tj. sačuvati relaciju:

$$F\ (b_{k+1}, c_{k+1}) < F\ (b_k, c_k)$$

(vidi [16]).

Treba naglasiti da je i u jednoj i u drugoj metodi potrebno izračunavati samo prve derivacije funkcije F i da se do rješenja stiže obično u 10-20 iteracija ako podaci ispunjavaju određene zahtjeve (vidi [12] i [30]).

U posljednje vrijeme u literaturi su sve više prisutne metode Quasi-Newtonovog tipa za rješavanje nelinearnih problema najmanjih kvadrata.

5. Ekonomski modeli

Korištenje S-krivulje u ekonomskim modelima omogućava procjenu različitih odnosa između n a p o r a uloženog za postizanje nekog rezultata (npr. poboljšanje proizvoda, tehnološkog procesa, načina prodaje, organiziranosti...) i r e z u l t a t a koji se dobije takvim ulaganjem. Sposobnost uočavanja tih odnosa i razvojnih ograničenja je osnova kvalitetnog strategijskog upravlja nja, odnosno upravljanja razvojem ekonomskih sistema, jer poznavanje granica je najbolji pokazatelj k a d a treba intervenirati u proces s inovacijskim aktivnostima. Bez pravovremenog odgovora ostvarit će se razvojni diskontinuitet,[2] koji u uvjetima sve intenzivnijeg tehnološkog razvoja znači razvojno zaostajanje. Očekivanje da će se razvojni diskontinuitet ostvarivati sve učestalije, zahtijeva osposobljavanje za skraćivanje jaza između prelaska s jednog na drugo razvojno ponašanje, a to pretpostavlja korištenje informacija koje daje S-krivulja.

Kvaliteta strateškog upravljanja ekonomskim sistemima upravo se i sastoji u tome da promjena u ponašanju ne bude iznenađenje, nego da se na temelju očekivanja promjene upravlja. S-krivulja daje dva tipa informacija za upravljanje na temelju:

— promjena duž j e d n e S-krivulje i
— razlika zbog prijelaza na d r u g u S-krivulju.

Položaj na S-krivulji i nužnost prijelaza s jedne na drugu S-krivulju uvjetuju i zahtjeve u odnosu na sadržaj strateškog upravljanja, ali i na upravljački kapacitet. Upravljačko ponašanje je različito ovisno o tome da li se neki sistem nalazi u fazi uvođenja, ekspanzije ili zasićenja, što znači da je nužno raspolagati različitim metodama upravljanja duž neke S- krivulje. Međutim, ukoliko se mora prijeći na novu S-krivulju, tada se postavljaju upravljački zahtjevi na novom skupu znanja. Nužnost prijelaza na drugu S-krivulju (kao rezultat tehnološkog progresa u okruženju i promjena u tržišnim zahtjevima) vrlo često postavlja tako radi-

2) Sve ubrzanija stopa nastajanja tehnološkog diskontinuiteta omogućava procjenu da će 80% industrije i veliki dio proizvodnje usluga doživjeti bitne tehnološke promjene do 2000. godine (4).

kalne zahtjeve za promjenu upravljačkog kapaciteta, koji ugrožavaju postojeći upravljački segment. To dovodi do neopravdane rigidnosti razvojnog ponašanja, čime se produžava jaz između stare i nove S-krivulje i razvojno zaostaje.

Efikasno upravljanje razvojem zahtijeva razlikovanje nediferenciranog homogenog rasta vs. organskog rasta kao osnove razvojnog procesa. Nediferencirani homogeni rast dovodi do neuravnoteženog razvoja i ne provocira promjenu u kvaliteti promatrane pojave. Organski rast temelji se na diferenciranom rastu, koji slijedi iz razumijevanja interaktivnih odnosa između razvojnih parametara, što ujedno dovodi do promjene u kvaliteti promatrane pojave.[3]

Organski rast kao osnova razvojnog ponašanja pretpostavlja ostvarivanje sinergije, koja je rezultat interakcije unutar sistema čijim razvojem se upravlja i između sistema i okruženja. Opisivanje takvog razvojnog ponašanja zahtijeva primjenu S-funkcija čija svojstva osiguravaju informacije o promjeni u kvaliteti promatrane pojave (duž krivulje) i informacije o potrebi prijelaza na novu krivulju radi ostvarivanja sinergije na višoj razini. Prema tome, sinergija treba biti ključni kriterij za odlučivanje o napuštanju nediferenciranog rasta u korist diferenciranog, ali organskog rasta (potreba korištenja tog kriterija u upravljanju poslovnim sistemima — na temelju proizvodne, upravljačke, financijske i marketinške sinergije opisana je na nizu primjera američkih kompanija u [31]).

S-funkcija korištena je u istraživanjima granica rasta svjetskog ekonomskog sistema (npr. [18], [19]), gdje se konstatira opravdanost korištenja te funkcije za opisivanje odnosa između potrošnje neobnovljivih resursa po stanovniku i industrijske proizvodnje po stanovniku. U nerazvijenim sredinama potrošnja takvih resursa je vrlo niska, a povećanjem industrijalizacije potrošnja eksponencijalno raste, a zatim se taj odnos usporava. (vidi [18]).

Korištenje S-funkcija u opisivanju ekonomskih pojava zahtijeva identifikaciju parametara kojima se mjeri promjena kvalitete neke pojave, postavljanje granice rasta i identifikaciju alternativnih trajektorija ponašanja. Izbor parametara kojima se mjeri performanca neke ekonomske pojave ovisi o promjenjivim kriterijima u različitim razdobljima promatranja te pojave (npr. ekološki faktor, zdravstveni značaj ishrane...), te je potrebno utvrditi i kojom brzinom dolazi do promjene parametara i zašto. Ovi parametri uvijek moraju izražavati interes i korisnika i ponuđača, odnosno ne smiju izražavati jednostrani interes. Informacije o granicama rasta trebale bi se temeljiti na procjeni promjena koje će ugroziti performancu sadašnjih tehnologija. Vrednovanje alternativnih trajektorija ponašanja treba omogućiti odlučivanje o tome da li ostati na postojećoj krivulji ili početi novu. Osnovu za odlučivanje čine informacije o tome koliko je potrebno povećati ulaganja/napora (rada, novaca, energije...) da bi se povećala performanca neke pojave. Iako se sve to uvijek promatra u nekom razdoblju, treba naglasiti da se o promjeni performance neke pojave ne smije zaključivati samo kroz vrijeme, nego kroz promjenu odnosa ulaganja i rezultata.[4]

U interpretaciji informacija iz S-funkcije treba razlikovati posljedice opredjeljenja za postojeću krivulju ili prelazak na novu. Zadržavanje na postojećoj krivulji znači insistiranje na povećanju efikasnosti korištenja raspoloživih resursa, a odluka o prelasku na novu S-funkciju znači traženje nove strategije ponašanja. Miopija ekonomskih istraživanja uglavnom i jeste posljedica traženja rješenja u okviru postojećeg proizvodnog programa, tehnologije, tržišta, organizacije... odnosno eventualno promjenom nagiba postojeće S-funkcije. Nerazumijevanje da se produktivnost ponašanja nekog ekonomskog sistema može značajnije povećati s a m o ako se traže mogućnosti za prijelaz na novu S-krivulju, dovodi do suboptimalnog korištenja raspoloživih resursa (ljudi, novca, vremena), jer su istraživanja o strukturi angažiranja sredstava velikih američkih kompanija ukazala da nisu rijetki slučajevi da se 80% tih sredstava koristi za obranu proizvoda koji su važniji po onome što su doprinijeli u prošlosti nego što će doprinijeti u budućnosti (detaljniju raspravu o razlozima takvog ponašanja vidi u [4]).

U knjizi [4] navedeni su brojni primjeri (iz prakse američke konzultantske firme McKinsey za probleme upravljanja poslovnim sistemima) koji potvrđuju potrebu definiranja S-krivulje radi efikasnijeg upravljanja razvojem. Vrlo indikativan primjer strategijske miopije je iz američke industrije šećera. Šećer obuhvaća skupinu proizvoda kao što su sukroza, fruktoza, gluko-

3) U upravljanju ekonomskim pojavama nužno je zamijeniti eksponencijalni rast (koji izražava nediferencirani i neuravnoteženi rast) konceptima organskog rasta, kojima se postiže dinamička ravnoteža u razvoju. U (19) prikazana su tri tipa organskog rasta, (rast hrasta, rast sisavaca i rast čovjeka), kod kojih samo u ranoj fazi razvoja postoji eksponencijalni rast, koji se zamjenjuje usporavajućim rastom do kraja života (kod biljaka), odnosno do izvjesne starosne dobi kada rast prestaje (kod sisavaca).

4) Gustoća kola na čipovima stalno raste u funkciji vremena, ali odnos gustoće kola i ulaganja pokazuje opadajuće prinose, što govori da se ta tehnologija približava svom limitu (4).

za, galaktoza i manoza, a sukroza je kemijska kombinacija glukoze i fruktoze. Proizvođači bezalkoholnih pića su koristili skuplju sukrozu koja se nakon izvjesnog vremena raspada na svoje dijelove, tj. na glukozu i fruktozu koji su jeftiniji jer se proizvode iz kukuruza. Proizvođači bezalkoholnih pića su uočili da mogu nabavljati jeftiniju sirovinu od proizvođača šećera na bazi kukuruza, a proizvođači tog šećera su tražili rješenje da jeftinu glukozu pretvore u potrebnu mješavinu glukoze i fruktoze, koja će biti konkurentna sukrozi. Tehnološko rješenje je omogućilo korištenje jeftinije mješavine glukoze i fruktoze na bazi kukuruza u proizvodnji bezalkoholnih pića, što je dovelo do promjene u liderstvu u američkoj industriji šećera. Dotadašnji lider u proizvodnji sukroze morao je ustupiti mjesto vodećem proizvođaču visoko fruktoznog kukuruznog sirupa, koji je na vrijeme uočio mogućnost razvoja na novoj S-krivulji, te iskoristio prednosti produktivnije tehnologije.

Međutim, dokaz o nužnosti poznavanja granice raste radi osiguranja kontinuiteta razvoja pokazuju i brojni primjeri razvoja, stagnacije i nestanka čitavih civilizacija,[5] te se u uvjetima sve kompleksnijih uvjeta razvoja treba osposobiti za adekvatnije upravljanje razvojem, koje pretpostavlja osposobljavanje za prelazak na nove strategije.

6. Druge mogućnosti

U diferencijalnoj jednadžbi (6):

$$y' = c\,y\,(A - y)$$

moguće je napraviti neke intervencije. Ako u tom smislu promatramo jednadžbu:

$$y' = -\ln c\; y\,(\ln A - \ln y) \tag{19}$$

kao rješenje dobit ćemo poznatu Gompertzovu funkciju:

$$y = A\,e^{-bc^t} \tag{20}$$

Ona ima točku infleksije:

$$I\left(-\frac{\ln b}{\ln c}, \frac{A}{e}\right)$$

Kako je $(A/e) < (A/2)$, Gompertzova funkcija je funkcija s pozitivnom asimetrijom. Za više detalja vidi u [10], [11], [17], [24].

5) »... beacause Egypt achieved her cultural summit early, subsequent generation were unable to improve on the original model.« (3) (... »zbog toga što je Egipat dosegao svoj kulturni vrh rano, naredne generacije nisu mogle poboljšati originalni model« — bez prelaska na novi model ponašanja).

Ukoliko u jednadžbi (6) umjesto konstante c stavimo izraz (m/t) dobivamo novu diferencijalnu jednadžbu:

$$y' = \frac{m}{t}\,y\,(A - y) \tag{21}$$

čime je iskazana činjenica da na brzinu porasta y' sve slabije utiču i y i (A — y) ukoliko je t veći.

Rješenje jednadžbe (21) je tzv. Weblusova funkcija:

$$y = \frac{A}{1 + (b/t)^c} \tag{22}$$

gdje je $c = Am$. Primjetimo da b predstavlja vremenski razmak od $t = 0$ do trenutka kada funkcija dođe na nivo A/2 (polovina zasićenja). Točka infleksije Weblusove funkcije je:

$$I\left(b\left[\frac{c-1}{c+1}\right]^{1/c}, \frac{A\,(c-1)}{2c}\right),\ c > 1$$

Primjetimo također da $c \leq 1$ nema smisla, te da je Weblusova funkcija uvijek pozitivna ali promjenjive asimetrije. Naime, funkcija $c \to y_I(c) = \frac{A\,(c-1)}{c}$ raste na intervalu $[1, +\infty)$ od 0 do 1/2.

7. Zaključak

U ekonomskim istraživanjima u kojima su korištene trend funkcije, donedavno su istraživani slučajevi koji su se svodili na linearne probleme najmanjih kvadrata (linearna, kvadratna, eksponencijalna funkcija itd.). Primjena sistemskog pristupa i kompjutorske tehnike otvorila je mogućnost izučavanja ekonomskih fenomena s realnijim pretpostavkama, tj. s pretpostavkama o nelinearnosti procesa, jer je linearnost ekonomskih procesa valjana pretpostavka samo u vrlo kratkom roku. Međutim, korištenje trend-funkcija, koje podrazumijevaju rješavanje nelinearnih problema najmanjih kvadrata stvara dodatne probleme koji proizlaze iz činjenice da takvi problemi nemaju uvijek rješenja, a najčešće zahtijevaju dodatnu matematičku analizu područja traženih parametara, kao i zadanih podataka.

S — funkcije koje imaju mogućnost variranja od pozitivne do negativne asimetrije bolje opisuju ekonomske pojave, što se vidi i u radu analiziranim ekonomskim problemima (vidi t. 5). Zbog izuzetnog značaja svojstava S — funkcije u ekonomskim istraživanjima, u okviru potprojekta »Zakon vrijednosti u funkciji upravljanja razvojem« nastavit će se s istraživanjima primjene i izradom odgovarajućeg korisničkog softwarea.

LITERATURA:

[1] *Atanasković, S.:* Predviđanje prodaje pomoću kompleksnih funkcija, Marketing 4 (1971), 9-13.

[2] *Bard, Y.:* Nonlinear Parameter Estimation, Academic Press, New York 1974.

[3] *Dimont, M. I.:* The Indestructible Jews, New American Library, 1971.

[4] *Foster, R.:* Innovation, Macmillan, London 1986.

[5] *Gill, P.E.:* — Murray W. — Wright M.H.: Practical optimization, Academic Press, 1981.

[6] *Golub, G.H.* and *Pereyra, V.:* The differentation of pseudoinverses and nonlinear least squares problems whose variábles separate, Siam J. Numer. Anal. 10 (1973), 413-432.

[7] *Graff, P.:* Die Wirtschaftsprognose, J.C. B. Mohr (Paul. Siebeck) Tübingen 1977.

[8] *Häussler, W.M.:* A Kantorovich-type Convergence analysis for the Gauss-Newton-method, Numer. Math. 48 (1986), 119-125.

[9] *Indihar, S.:* O logistični krivulji, Naše gospodarstvo, Maribor 19 (1973), 314--320.

[10] *Indihar, S.:* Primena S-kriva u prognosticiranju, manuskript

[11] *Kosanović, S., — Maronić, M., — Novak, B., — Schön, B., — Scitovski, R.:* Model razvoja poljoprivrede i prehrambene industrije Slavonije i Baranje, Zavod za ekonomska istraživanja, Ekonomski fakultet, Osijek 1981.

[12] *Kosanović S., — Scitovski, R.:* Analiza primjene S-krivulja, SYMOPIS' 88, Institut Mihajlo Pupin Beograd 1988.

[13] *Lewandowski, R.:* Prognose-und Informationssysteme und ihre Anwendungen, Band 1. Walter de Gruyter, Berlin — New York 1974.

[14] *Lewandowski, R.:* Prognose-und Informationssysteme und ihre Anwendungen, Band 2. Mittelfristige Prognose — und Marketing — Systeme Walter de Gruyter, Berlin — New York 1980.

[15] *Lindström, P.:* Algorithms for nonlinear least squares particulary problems with constaints, Report UMINF--106.83, University of Umea, Dept. of Numerical Analysis, Umea 1983.

[16] *Marquardt, D.W.:* An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters, Siam J. on Appl. Math. 2(1963), 431-441.

[17] *Martens, P.:* Prognoserechnung, Physica-Verlag, Würzburg-Wien 1981.

[18] *Meadows, D.H., — Meadows, D.L., — — Dennis, L., — Behrens, R.J., — William, W. III:* The Limits to Growth, Pan Books Ltd., London, 1974.

[19] *Mesarović, M., — Pestel, E.:* Čovječanstvo na raskršću, Stvarnost, Zagreb 1976.

[20] *Nazareth, L.:* Some recent approaches to solving large residual nonlinear least squares problems, SIAM Review 22 (1980), 1-11.

[21] *Ruhe, A., — Wedin, P.A.:* Algorithms for separable nonlinear least squares problems, SIAM Review 22 (1980), 318-337.

[22] *Schaback, R.:* Convergence analysis of the general Gauss-Newton algorithm, Numer. Math. 46 (1985), 281-309.

[23] *Schön, B., — Scitovski, R.:* Pokušaj prilagođavanja logističke funkcije zadanom empirijskom statističkom materijalu, Statistička revija, 27 (1977), 178-194.

[24] *Schön, B., i Scitovski, R.:* Prognoza broja stanovnika i prirodnog priraštaja SFRJ, Statistička revija, 31 (1981), 1-4.

[25] *Scitovski, R., — Kosanović, S.:* Rate of Change in Ecconomic Research, Economic Analysis, 19 (1985), 65-75.

[26] *Scitovski, R.:* Linearne aproksimacije u smislu metode najmanjih kvadrata, Statistička revija, 30. (1980), 207-220.

[27] *Scitovski, R.:* Nelinearni problemi najmanjih kvadrata gdje se varijable mogu separirati, Statistička revija, 32 (1982), 221-232.

[28] *Scitovski, R.:* An approach in solving nonlinear least squares problems, Conference on Applied Mathematics, Split 1984, 109-113.

[29] *Scitovski, R.:* Searching method and existence of solution of special nonlinear least squares problems, Glasnik matematički 20 (1985), 451-467.

[30] *Scitovski, R.:* Uvjet pretežnog rasta i Čebiševljeva nejednakost, VI seminar primjenjene matematike, Prirodno — matematički fakultet, Beograd 1988.

[31] *Weber, J.A.:* Growth Ppportunity Analysis, Prentice-Hall, Reston 1976.

Dr. S. Kosanović and Dr. R. Scitovski

Summary

MATHEMATICAL MODELLING OF ECONOMIC PHENOMENA TENDING TO SATURATION

In economic research it is often required to describe a phenomenon by a function whose value asymptotically approaches the level of saturation. In the study the class of so called S funcitons that serve for the short-run and long-run forecast is observed. The analysis of class functions that depending on the parameter can have positive or negative asymmetry or can be transformed into the known logistic function is specially emphasized. Evaluation of the parameters of such funcctions is a compound non-linear problem of the least squares that needn't always be solved. Economic interpretation of the properties of these functions is especially important for strategic managing of the economic systems.