Egon Zakrajšek
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Univerze v Ljubljani

Konstantin Momirović
Sveučilišni računski centar u Zagrebu

Vesna Dobrić
Računski centar Fakulteta za fizičku
kulturu u Zagrebu

ALTERNATIVNA DEFINICIJA MJERE POUZDANOSTI POD MODELOM KOJI DOPUŠTA NENULTE KOVARIJANCE VARIJABLI POGREŠKE

ALTERNATIVE DEFINITION OF RELIABILITY MEASURE ACCORDING TO THE MODEL ALLOWING NONZERO COVARIANCES OF ERROR VARIABLES

If error components of items of any composite test are defined as antiimage variables from the set of these items, then maximizing reliability measure

$$\Psi = 1 - \sigma_e^2/\sigma_t^2$$

where σ_e^2 is error variance, and σ_t^2 is total variance of a test, can be reduced to the maximizing of expression

$$\Psi = 1 - (X^T E X) / (X^T R X)$$

where R is item intercorrelation matrix, and $E = U^2 R^{-1} U^2$. i. e. E is covariance matrix of items transformed into antiimage metrics. It was found that maximal reliability of any composite test, according to this model, can be expressed as

$$\Psi^* = 1 - \mu^2$$

where μ is the smallest eigenvalue of the matrix $UR^{-1} U$- i. e. intercorrelation matrix of items transformed into antiimage variables.

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ДОСТОВЕРНОСТИ В МОДЕЛИ, ПОЗВОЛЯЮЩЕЙ НЕНУЛЕВЫЕ КОВАРИАНЦЫ ПЕРЕМЕННЫХ ОШИБОК

Если как компоненты ошибки частиц определенного комплексного измерительного инструмента приняты антиимаж переменные, выведенные из совокупности частиц, в таком случае максимизированную меру достоверности

$$\Psi = 1 - \sigma_e^2 / \sigma_t^2$$

при чем σ_e^2 является дисперсией ошибки, а σ_t^2 общей дисперсией измерительного инструмента, можно виразить:

$$\Psi = 1 - (X^T EX) / (X^T RX)$$

где R является матрицей интеркорреляций цастиц, а $E = U^2 R^{-1} U^2$ матрицей ковариацы частиц трансформированных в антиимаж форму. Определено, что максимальная достоверность определенного комплексного измерительного инструмента имеется в следующей модели:

$$\Psi = 1 - \mu^2$$

при чем μ является наименьшей характерной величиной матрицы интеркорреляций частиц трансформированных в антиимаж переменные, т. е. матрицы $UR^{-1} U$.

Ako se varijance pogreške čestica J_g, g = 1, ..., m nekog kompozitnog mjernog instrumenta T definiraju kao Guttmanove gornje granice unikne varijance tih čestica, tj. kao elementi u^2_g dijagonalne matrice $U^2 = diag^{-1} R^{-1}$, gdje je R matrica interkorelacija čestica, ocjene mjera pouzdanosti, izvedene na temelju klasične teorije pogrešaka mjerenja (Lord i Novick, 1968.), i ocjene koje mogu biti izvedene na temelju modela koji dopušta nenulte kovarijance varijabli pogreške (Momirović i Dobrić, 1976.) daju različite, premda funkcionalno povezane rezultate.

Uz uvjete da su kovarijance varijabli pogreške ravne nuli, i da su kovarijance između »pravih« vrijednosti i pogrešaka čestica J_g, g = 1, ..., m također jednake nuli, maksimaliziranje λ_6, Guttmanove mjere donje granice pouzdanosti (Guttman, 1945.)

$$\lambda_6 = 1 - (x^T S^2 x)\ (x^T R x)^{-1}$$
$$= (x^T C\, x)\ (x^T R\, x)^{-1}.$$

gdje je C matrica varijanci — kovarijanci »pravih« vrijednosti daje, ako je $S^2 = U^2$

$$\lambda_6{}^* = 1 - \Phi^{-1}$$

gdje je Φ najveća svojstvena vrijednost Harrisove matrice $U^{-1} R\, U^{-1}$ (Nicewander, 1975.).

Međutim, ako se varijable pogreške definiraju kao antiimage varijable (Momirović i Dobrić, 1976.), a »prave« varijable kao image varijable, kovarijance varijabli pogrešaka

$$A = U^2 R^{-1} U^2$$

nisu nezavisne; a nisu nezavisne ni kovarijance različito indeksiranih »pravih« i »pogrešnih« varijabli, jer je matrica kroskovarijanci ta dva skupa

$$P = U^2 - U^2 R^{-1} U^2.$$

Zbog toga maksimaliziranje mjere pouzdanosti

$$\rho = (y^T G\, y)\ (y^T R\, y)^{-1},$$

gdje je

$$G = R + U^2\, R^{-1}\, U^2 - 2U^2$$

matrica varijanci-kovarijanci »pravih«, tj. image varijabli, ne daje rezultat jednak onome koji daje maksimiziranje mjere

$$\psi = 1 - (w^T A\, w)\ (w^T R\, w)^{-1}.$$

Momirović i Dobrić (1976.) su našli da je, u zoni dopuštenih vrijednosti,

$$\rho = (1 - \Phi^{-1})^2,$$

gdje je i dalje Φ najveća svojstvena vrijednost matrice $U^{-1} R\, U^{-1}$ (odnosno inverz najmanje svojstvene vrijednosti μ matrice interkorelacija varijabil pogreške $UR^{-1} U$); Uy je, naravno, tim svojstvenim vrijednostima pridruženi svojstveni vektor, i otuda X = Y, a $\lambda_6{}^* = \rho^{\frac{1}{2}}$.

Maksimiziranje mjere ψ je, očito, ekvivalentno minimaliziranju izraza

$$\psi^* = (w^T A\, w)\ (w^T R\, w)^{-1}$$

uz neki pogodan uvjet.

Budući da su, u ovom slučaju, uvjeti $w^T w = 1$ i $w^T R\, w = 1$ ekvivalentni, minimizirajmo ψ^* uz uvjet $w^T R\, w = 1$.

Variranjem

$$A\, w = \lambda\, R\, w$$

pa je ψ^* najmanja svojstvena vrijednost karakteristične jednadžbe

$$(A - \lambda\, R)\ w = o$$

odnosno

$$(R^{-1} A - \lambda\, I) w = o.$$

Ali

$$R^{-1} A = R^{-1}\, U^2\, R^{-1}\, U^2,$$

pa je λ kvadrat najmanje svojstvene vrijednosti matrice $R^{-1}\, U^2$, dakle U^2, jer su matrice $R^{-1}\, U^2$ i $UR^{-1}\, U$ slične.

Otuda

$$\psi = 1 - u^2 = 1 - \Phi^{-2},$$

a $U\, w = U\, y = U\, x = v$ svojstveni vektor matrice $U^{-1} RU^{-1}$. Neka je v normiran tako da je $v^T v = 1$; prema tome, transformacija testovnih rezultata

$$ZU^{-1}\, v = p$$

maksimizira, simultano, i mjere pouzdanosti izvedene pod klasičnim, i mjere izvedene pod modelom koji dopušta nenulte kovarijance varijabli pogreške.

Očito,

$$\psi > \lambda_6{}^* > \rho,$$

pa je ψ gornja granica pouzdanosti ako je U^2 dijagonalna matrica varijanci pogreške čestica testa.

ZAKLJUČAK

Ako se kao komponente pogreške čestica nekog kompozitnog mjernog instrumenta definiraju antiimage varijable izvedene iz skupa čestica, maksimiziranje mjere pouzdanosti

$$\psi = 1 - o^2_e / o^2_t$$

gdje je o^2_e varijanca pogreške, a o^2_t ukupna varijanca mjernog instrumenta svodi se na maksimiziranje izraza

$$\psi = 1 - (x^T E\, x)\ /\ (x^T R\, x)$$

gdje je R matrica interkorelacija čestica, a $E = U^2 R^{-1} U^2$, dakle matrica kovarijanci čestica transformiranih u antiimage oblik. Nađeno je, da je maksimalna pouzdanost nekog kompozitnog mjernog instrumenta, pod ovim modelom

$$\psi^* = 1 - \mu^2$$

gdje je μ najmanja svojstvena vrijednost matrice $U R^{-1} U$, dakle matrice interkorelacija čestica transformiranih u antiimage varijable.

LITERATURA

1. Guttman, L.,
A Basis for Analysing Test-retest Reliability, Psychometrika, 1945, 10, pp. 225—182.
2. Lord, F. M. and M. Novick,
Statistical Theories of Mental Test Scores, Addison-Wesley, Reading, 1968.
3. Momirović, K. i V. Dobrić,
Jedna mjera donje granice pouzdanosti izvedena pod modelom koji dopušta nenulte kovarijance varijabli pogreške, Zbornik sapoćenja »Dani Ramira Bujasa«, Zagreb, 1976.
4. Nicewander, A. W.,
A Relationships between Harris Factors and Guttman's Sixth Bound to Reliability, Psychometrika, 1975, 40, pp. 197—203.