

Pregledni rad
UDK: 519.852:658.5
Datum primitka članka u uredništvo: 29. 4. 2019.
Datum slanja članka na recenziju: 18. 6. 2019.
Datum prihvaćanja članka za objavu: 20. 11. 2019.

Paulina Dejanović*
Izv. prof. dr. sc. Tunjo Perić**

PRIMJENA FUZZY VIŠEKRITERIJSKOG LINEARNOG PROGRAMIRANJA U RJEŠAVANJU PROBLEMA OPTIMIZACIJE PLANA PROIZVODNJE I TEHNOLOŠKIH VARIJANTI

APPLYING THE FUZZY MULTI-OBJECTIVE LINEAR PROGRAMMING METHODOLOGY TO SOLVE A PROBLEM OF PRODUCTION PLAN AND TECHNOLOGICAL VARIANTS OPTIMIZATION

SAŽETAK: U ovom se radu istražuje efikasnost primjene metodologije fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja za rješavanje višekriterijskog problema optimizacije plana proizvodnje i tehnoloških varijanti u poduzeću koje se bavi proizvodnjom metalnih proizvoda. U radu se najprije prikazuje teorijski model višekriterijskog linearnog programiranja i metoda fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja za njegovo rješavanje. Potom je prikazana metoda primijenjena na rješavanje konkretnog problema optimizacije plana proizvodnje i tehnoloških varijanti u poduzeću koje se bavi proizvodnjom metalnih proizvoda. Dobiveni rezultati ukazuju na mogućnost efikasne primjene ove metode u rješavanju konkretnog problema te na njene prednosti u odnosu na primjenu nekih drugih metoda (metoda STEM, metoda surogat vrijednosti razmjene).

KLJUČNE RIJEČI: optimizacija, proizvodni program, tehnološke varijante, višekriterijsko programiranje, fuzzy linearno programiranje.

ABSTRACT: This paper investigates the efficiency of applying the fuzzy multi-objective linear programming methodology to solve the multi-objective problem of the production plan and technological variants optimization in a company which deals with the production of metal products. The paper first presents the theoretical model of multi-objective linear programming and the fuzzy multi-objective linear programming method-

* Paulina Dejanović, studentica diplomskog studija na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: pdejanovi@net.efzg.hr

** Izv. prof. dr. sc. Tunjo Perić, izvanredni profesor na Katedri za matematiku Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: tperic@efzg.hr

ology for its solution. Then the presented method applies to solve the specific problem of optimization of production plan and technological variants in a company engaged in the production of metal products. The obtained results indicate the possibility of efficient application of this method in solving the specific problem and its advantages in relation to the application of some other methods (STEM method, Surrogate worth Trade-of Method).

KEY WORDS: optimization, production plan, technological variants, multi-objective programming, fuzzy linear programming.

1. UVOD

Optimizacija plana proizvodnje i tehnoloških varijanti predstavlja jedan od najznačajnijih problema s kojim se suočavaju proizvodna poduzeća. Po svojoj prirodi optimizacija plana proizvodnje i tehnoloških varijanti jest višekriterijski problem za čije se rješavanje mogu primijeniti metode višekriterijskog programiranja (Perić, 2008; Perić i Bratić, 2015.).

Za rješavanje problema višekriterijskog programiranja predložene su brojne metode (vidi: Perić, 2008; Matejaš i Perić, 2014.). Međutim, predložene metode višekriterijskog programiranja nisu jednako efikasne niti prema analitičkim kriterijima, a niti prema kriterijima donositelja odluke. Perić (2008.) navodi i klasificira brojne kriterije efikasnosti metoda višekriterijskog programiranja te naglašava problem odabira efikasne metode višekriterijskog programiranja pri rješavanju proizvodnih problema. Također, naglašava da ne postoji univerzalna metoda višekriterijskog programiranja koja bi bila jednako efikasna pri rješavanju svih problema višekriterijskog programiranja. Time istraživanje efikasnosti primjene različitih metoda višekriterijskog programiranja pri rješavanju optimizacijskih problema dobiva još veće značenje. Ovaj rad se bavi istraživanjem efikasnosti primjene metode fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja pri rješavanju problema optimizacije plana proizvodnje i tehnoloških varijanti u poduzeću koje se bavi proizvodnjom metalnih proizvoda.

Metoda fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja zasniva se na pretpostavci da donositelj odluke nije u stanju jasno odrediti aspiracijske razine funkcija cilja te da vrijednosti tehničkih, tehnoloških i tržišnih ograničenja nisu čvrsto definirane. Metoda pretpostavlja da je donositelj odluke u stanju odrediti donju i gornju granicu svojih aspiracija za svaku funkciju cilja, kao i intervale u kojima se nalaze vrijednosti ograničenja. Sama metoda koristi teoriju fuzzy skupova (Zadeh, 1965.) za određivanje funkcija pripadnosti vrijednosti funkcija cilja aspiracijskim intervalima tih funkcija, kao i za određivanje funkcija pripadnosti ograničenja definiranim intervalima u kojima se nalaze vrijednosti ograničenja. Nakon određivanja funkcija pripadnosti formira se model linearnog programiranja zasnovan na mini/max metodi (Lai i Hwang, 1996.).

Zimmermann (1978.) prvi uvodi prilaz fuzzy programiranja za rješavanje problema višekriterijskih problema. Daljnje istraživanje nastavili su Narasimhan (1980., 1981.), Hannan (1981.) i Ignizio (1982.), koji su uveli primjenu teorije fuzzy skupova pri rješavanju problema s višestrukim ciljevima. Nakon Zimmermannove metode fuzzy linearnog programiranja razvijene su brojne metode koje za rješavanje višekriterijskih problema koriste teoriju fuzzy skupova. Među tim metodama najvažnija je metoda fuzzy ciljnog programiranja s brojnim varijantama (Mohamed, 1996; Lai i Hwang, 1996; Hu, Teng i Li, 2007; Kumar, Kaur i Singh, 2011; Kumar i Kaur, 2013.).

Metoda fuzzy ciljnog programiranja proširena je na upotrebu nelinearnih funkcija pripadnosti (Yang, Ignizio i Kim, 1991.) te na rješavanje višekriterijskih problema s prioritetima (Hu, Teng i Li, 2007.). Fuzzy ciljno programiranje primijenjeno je na rješavanje problema višekriterijskoga razlomljeno-linearnog programiranja (Ohta i Yamaguchi, 1996; Pal, Moitra i Maulik, 2003.) i višerazinskoga višekriterijskog linearnog programiranja (Baky, 2010.).

Brojne su primjene metoda fuzzy programiranja: u poljoprivredi i alokacijskim problemima (Sharma, Jana i Gaur, 2007.), odabiru portfelja financiranja (Parra, Terol i Uria, 2001.), rješavanju višekriterijskih problema transporta (Abd El-Wahed i Lee, 2006.).

Nakon uvoda u drugom dijelu rada se prikazuje značenje optimizacije plana proizvodnje i tehnoloških varijanti primjenom metoda matematičkog programiranja. Treći dio rada prikazuje metodu fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja. U četvrtom dijelu rada prikazani su rezultati analize efikasnosti primjene metode fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja pri rješavanju navedenog problema. Na kraju se navode zaključci i popis korištene literature.

2. TEORIJSKO ZNAČENJE OPTIMIZACIJE PLANA PROIZVODNJE I TEHNOLOŠKIH VARIJANTI

Proizvodni program zajednički je naziv za sve vrste i količine proizvoda koje poduzeće proizvodi. Podložan je promjenama odnosno poduzeća imaju slobodu mijenjati svoj proizvodni program u skladu s promjenama i zahtjevima tržišta, naravno ako im to dopuštaju tehnološke, tehničke i financijske mogućnosti, stoga bi poduzeća trebala planirati proizvodni program u dugom i kratkom roku.

Proizvodni program utječe na pozicioniranje poduzeća na tržištu, zbog toga bi svako poduzeće trebalo težiti ostvarivanju optimalnog proizvodnog programa. Takav program se definira kao onaj „koji poduzeću osigurava najvišu razinu rezultata poslovanja izraženu ekonomskim parametrima“ (Perić, 2008.).

Način proizvodnje odnosno postupak proizvodnje predmeta poslovanja nekog poduzeća naziva se tehnološkom varijantom. Pod predmetom poslovanja podrazumijeva se, naravno proizvod ili više njih čijom se proizvodnjom organizacija bavi. Nekada se proizvod može proizvesti na više različitih načina, a da bi poduzeće koje ga proizvodi ostvarivalo odgovarajuću dobit i poslovalo racionalno, treba izabrati onaj način ili tehnološku varijantu koja je najpovoljnija. Upravo ta „najpovoljnija tehnološka varijanta za proizvodnju određenog proizvoda jest ona varijanta po kojoj poduzeće ostvaruje najviši rezultat poslovanja izražen ekonomskim parametrima“ (Perić, 2008.). Ovako opisana tehnološka varijanta je optimalna te bi prema njoj poduzeće trebalo proizvoditi.

Optimizacija je definirana kao matematički postupak kojim se pri rješavanju određenoga problema određuje najbolji mogući izbor ekonomskih i tehničkih veličina prema unaprijed definiranim kriterijima. Optimizacija se promatra u okviru operacijskih istraživanja, koja se primjenjuju za rješavanje problema vođenja i koordinacije aktivnosti unutar organizacije. S obzirom da operacijska istraživanja probleme promatraju s različitih stajališta, razvijene su brojne metode za rješavanje različitih problema koji se razmatraju. Neki od

problema mogu biti: određivanje optimalnog proizvodnog programa, tehnoloških varijanti, opterećenja strojeva, raspored radnika na radnim zadacima. Rješenje pojedinih navedenih problema može se dobiti korištenjem neke od metoda jednokriterijskog i višekriterijskog linearnog i nelinearnog programiranja, metoda simulacije, metoda asignacije i slično. Prema tome operacijska istraživanja primjenjiva su u područjima kao što su: transport, proizvodnja, ekonomija (financijsko planiranje), zdravstvo, vojska.

Ako se radi o većem broju ekonomskih problema prevedenih na matematički oblik, rješavanje će se sastojati u određivanju ekstrema, to jest minimuma ili maksimuma funkcije više varijabli uz dana ograničenja, pri čemu će rješenje biti ona alternativa koja je optimalna ili najbolja prema određenom kriteriju. Višekriterijsko programiranje pridonijelo je proširenju pojma optimalnosti jer uvodi koncept „Pareto optimalnosti“ u metode za rješavanje modela višekriterijskog programiranja.

3. MODEL VIŠEKRITERIJSKOG PROGRAMIRANJA I NJEGOVO RJEŠAVANJE METODOM FUZZY VIŠEKRITERIJSKOG LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Kao što sam naziv govori, višekriterijsko programiranje je proces u kojemu se traži rješenje problema matematičkog programiranja s više funkcija kriterija (cilja). To je „proces određivanja nedominiranih rješenja iz skupa mogućih rješenja i određivanje preferiranog rješenja iz skupa nedominiranih rješenja“ (Perić, 2008.). Koncept nedominiranosti karakterističan je u višekriterijskom programiranju, a naziva se još i Pareto optimalnost. Pareto optimalnost općenito označava stanje u kojemu se položaj jednog člana skupa ne može poboljšati, a da se pritom ne pogorša položaj nekog drugog člana skupa. Pareto optimalan skup je skup rješenja koja su međusobno nedominirana.

Kao što je već rečeno problem višekriterijskog programiranja je ukratko problem izbora vrijednosti za svaku od varijabli x_1, x_2, \dots, x_n vektora odlučivanja $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, pri čemu se želi optimizirati K ($K \geq 2$) funkcija cilja $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_K(\mathbf{x})$. U problemu višekriterijskog programiranja pretpostavlja se da se želi maksimizirati (ili minimizirati) svaka od funkcija cilja istovremeno odnosno da se traže ekstremi funkcija cilja na zadanom skupu ograničenja. Ograničenja modela formiraju skup mogućih rješenja \mathbf{S} . U vezi s time, uzima se da je \mathbf{x} (vektor varijabli odlučivanja) element skupa mogućih rješenja, tj. $\mathbf{x} \in \mathbf{S}, \mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}^n$.

Prema navedenim uvjetima, model višekriterijskog programiranja može se prikazati na sljedeći način:

$$\max \mathbf{f} = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_K(\mathbf{x})], \quad K \geq 2 \quad (1)$$

pri čemu je

$$\mathbf{x} \in \mathbf{S}$$

Višekriterijsko programiranje se dijeli u dvije velike skupine: (1) višekriterijsko linearno i (2) višekriterijsko nelinearno programiranje. Višekriterijsko linearno programiranje, kojim se bavimo u ovom radu, poznaje brojne metode, kao što su: metoda globalnog kriterija, metoda funkcija korisnosti, linearno ciljno programiranje, metoda Surogat vrijednosti

razmjene, metoda STEM i druge. Kako je rečeno u uvodnom dijelu, za potrebe ovoga rada opisan će se metoda fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja. Kao uvod u metodu prvo će se objasniti pojam fuzzy logike.

Riječ *fuzzy* označava nešto neodređeno, nejasno, neizrazito, zamućeno ili zamrljano. Izraz koji je primjeren za potrebe ovoga rada jest *nejasno*. U okviru matematičkog programiranja *fuzzy* se odnosi na fuzzy (nejasan) problem odnosno na formuliranje istog. Kod uobičajenog linearnog programiranja parametri moraju biti definirani jasno i precizno te često postoji pretpostavka da se postavljeni „problem može riješiti samo ako je jasno formuliran“ (Barković, 1997.), međutim to nije pravilo. Problem linearnog programiranja moguće je postaviti i na način da zadrži fuzzy (nejasno) svojstvo. To potvrđuje i činjenica da su vrijednosti mnogih parametara linearnog programiranja procijenjene od strane eksperata (Kumar i Kaur, 2013.). Postavljanje problema odlučivanja u fuzzy obliku realističnije je i bolje prilagođeno stvarnim problemima. To dokazuje činjenica da znanje eksperata nije u potpunosti točno i precizno te da u stvarnosti često nije moguće parametre problema, čije se rješenje traži, definirati u savršenim uvjetima. Prema navedenim tvrdnjama moguće je zaključiti da bi bilo bolje problem linearnog programiranja definirati u fuzzy okolini.

Za fuzzy višekriterijsko linearno programiranje vezani su pojmovi funkcije pripadnosti i fuzzy broja.

Definicija 1: Funkcija pripadnosti

Ako se pretpostavi da za svaki podskup A nekog temeljnog skupa X postoji tzv. karakteristična funkcija: $f_A: X \rightarrow \{0,1\}$ koja za svaki element $x \in X$ kaže je li element skupa A ili nije: $f_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$ i $f_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A$ (Bronstein *et. al.*, 2004.). Za razliku od toga, može se izvesti relacija funkcije pripadnosti elementa x skupu A oblika:

$$\mu_A: x \rightarrow [0, 1]. \quad (2)$$

Takva funkcija pripadnosti govori da se svakom elementu $x \in X$ pridružuje broj $\mu_A(x)$ iz intervala $[0, 1]$, koji označava stupanj pripadnosti elementa x skupu A (Bronstein *et. al.*, 2004.). Skup A , podskup je skupa X , koji je definiran na skupu realnih brojeva \mathbf{R} . Skup A naziva se fuzzy skup te vrijedi:

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}. \quad (\text{Kumar } et. al., 2011.) \quad (3)$$

Definicija 2: Fuzzy broj

Fuzzy broj A , prikazan na način: $A = (a, b, c)$, bit će trokutasti fuzzy broj, ako je njegova funkcija pripadnosti sljedećeg oblika (Kumar *et. al.*, 2011.):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x = b \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ \frac{x-c}{b-c} & b < x < c \\ 0 & x \leq a \wedge x \geq c. \end{cases} \quad (4)$$

Za trokutasti fuzzy broj (a, b, c) se kaže da je nenegativan fuzzy broj ako je $a \geq 0$. Također, važno je navesti da će dva fuzzy broja $A = (a, b, c)$ i $B = (e, f, g)$ biti jednaka samo ako vrijedi da je $a = e, b = f$ i $c = g$.

Klasičan model fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja može se prikazati na sljedeći način:

Funkcije cilja:

$$\max \mathbf{x}^T \mathbf{c}_k \cong f_k, \quad k = 1, \dots, K$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\cong \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5)$$

gdje su:

- \mathbf{c}_k = vektor koeficijenata k -te funkcije cilja
- \mathbf{A} = matrica koeficijenata sustava ograničenja
- \mathbf{x} = vektor varijabli odlučivanja
- \mathbf{b} = vektor vrijednosti ograničenja,
- \cong označava približno jednako.

Nakon definiranja osnovnog modela, potrebno je izvesti funkcije pripadnosti ograničenja i funkcije pripadnosti funkcija cilja. Pripadajuća funkcija pripadnosti ograničenja modela glasi:

$$\mu_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{za } \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i - d_{b_i} \wedge \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i + d_{b_i} \\ 1 - \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i}{d_{b_i}} & \text{za } b_i < \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} < b_i + d_{b_i} \\ 1 - \frac{b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}}{d_{b_i}} & \text{za } b_i - d_{b_i} < \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} < b_i \end{cases} \quad (6)$$

gdje parametar d_{b_i} ($i = 1, 2, \dots, m$) označava vrijednost za koju je maksimalno moguće podbaciti odnosno prekoračiti ograničenje b_i .

Funkcija pripadnosti k -te funkcije cilja je:

$$\mu_{f_k}(\mathbf{x}^T \mathbf{c}_k) = \begin{cases} 0 & \text{za } \mathbf{x}^T \mathbf{c}_k \leq f_{k_D} \\ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{c}_k - f_{k_D}}{f_{k_G} - f_{k_D}} & \text{za } f_{k_D} < \mathbf{x}^T \mathbf{c}_k < f_{k_G} \\ 1 & \text{za } \mathbf{x}^T \mathbf{c}_k \geq f_{k_G} \end{cases} \quad (7)$$

S obzirom da je fuzzy višekriterijsko linearno programiranje metoda višekriterijskog programiranja, u kojemu se pojavljuje više funkcija cilja, problem koji nastaje sastoji se u „međusobnom uspoređivanju različitih ciljeva“ (Barković, 1997). Što znači da se na jednoj

strani pokušava maksimizirati vrijednost prvotne jasno formulirane funkcije cilja z , dok se na drugoj strani želi postići što je moguće veće zadovoljstvo donositelja odluke u pogledu restrikcija (Sharma *et. al.*, 2007.). Radi toga se formulira i funkcija pripadnosti različitih vrijednosti funkcije cilja z_k . Navedena funkcija pripadnosti prikazuje koliko neka funkcija postiže vrijednosti između 0 i 1, tj. $\mu_{z_k}(x^T c_k) \in [0, 1]$ (Sharma *et. al.*, 2007.). Prema tome, potrebno je odrediti donju i gornju aspiracijsku razinu funkcija cilja. Donja aspiracijska razina funkcije cilja z_{k_l} je ona ispod koje se ne smije ići, dok je gornja granica tolerancije z_{k_u} - ona koju se ne smije prekoračiti „i kojom bi donositelj odluke trebao biti u potpunosti zadovoljan“ (Barković, 1997.). Opisane vrijednosti određuje donositelj odluke na temelju tablice isplata i njegovih preferencija. Tablica isplata je tablica koja prikazuje vrijednosti svih funkcija cilja za ostvarene optimalne vrijednosti funkcija cilja.

Navedeni uvjeti, malo ili veliko prekoračenje granica zadanih ograničenja te minimalne i maksimalne vrijednosti funkcija cilja odnosno donje i gornje aspiracijske razine „predstavljaju suprotne ciljeve koji se moraju agregirati u jednu novu funkciju“ (Barković, 1997.). Kao što je već rečeno, u stvarnosti nije moguće precizno odrediti vrijednosti ciljeva i ograničenja, stoga je prihvatljivije koristiti jezično nejasnu izjavu „približno ili otprilike“. U skladu s time, može se formulirati sljedeći model višekriterijskog programiranja:

naći takvo \mathbf{x}

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{c}_k &\cong \tilde{z}_k, \quad k = 1, \dots, K \\ (\mathbf{A}\mathbf{x})_i &\cong \tilde{b}_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Gdje \tilde{z}_k , $\forall k$ i \tilde{b}_i , $\forall i$, izražavaju ciljeve kao na primjer: „profit bi trebao biti oko z_k odnosno vrijednost ograničenja bi trebala biti oko b_i (Lai i Hwang, 1996.).

Uzimajući u obzir funkcije pripadnosti, rješenje modela (8) svodi se na rješavanje sljedećeg modela linearnog programiranja:

$$\max \lambda \quad (9)$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} \mu_{z_k}(\mathbf{x}^T \mathbf{c}_k) &\geq \lambda, \quad k = 1, \dots, K \\ \mu_i(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}) &\geq \lambda, \quad i = 1, \dots, m \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

gdje predstavlja novu varijablu koja se uvodi u model i koja se želi maksimizirati, a naziva se minimalni operator odnosno funkcija cilja maksimizira minimalno zadovoljstvo.

4. ANALIZA EFIKASNOSTI PRIMJENE METODE FUZZY VIŠEKRITERIJSKOG LINEARNOG PROGRAMIRANJA PRI OPTIMIZACIJI PLANA PROIZVODNJE I TEHNOLOŠKIH VARIJANTI

Četvrto poglavlje ovoga rada pokazat će na primjeru poduzeća iz metalne industrije kakva je efikasnost primjene fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja u rješavanju problema optimizacije plana proizvodnje i tehnoloških varijanti. Podaci za postavljanje modela preuzeti su iz (Perić, 2008.).

Postavljanje problema

Poduzeće za razdoblje siječanj – prosinac tekuće godine, pored pojedinačne proizvodnje po narudžbi, predviđa proizvodnju 11 različitih proizvoda koje ćemo označiti brojevima 1 do 11. Neto prodajna cijena, bruto-dobit i neto-dobit po proizvodu prikazani su u sljedećoj tablici:

Tablica 1. Neto prodajna cijena, bruto-dobit i neto-dobit po proizvodu

Proizvod (i)	Neto prodajna cijena ($c_{i,g3}$)	Bruto-dobit	Neto-dobit ¹ ($c_{i,g1}$)
1	12,80	3,07	0,77
2	78,00	18,72	4,68
3	14,50	3,84	0,87
4	10,80	2,59	0,65
5	9,81	2,35	5,89
6	13,60	3,26	0,82
7	15,80	3,79	0,95
8	20,30	4,87	1,22
9	19,80	4,75	1,19
10	13,45	3,23	0,81
11	218,50	52,44	13,11

Izvor: Perić (2008.).

Za proizvodnju različitih proizvoda predviđen je utrošak različite količine direktno proizvodnog rada, koji je različit po pojedinim varijantama. Utrošak direktno proizvodnog rada po proizvodima i varijantama te koeficijenti ekvivalencije dobiveni dijeljenjem potrebnog radnog vremena za proizvodnju svakog proizvoda po različitim varijantama potrebnim radnim vremenom za proizvodnju proizvoda 3 (prema autorovom slobodnom odabiru) po različitim varijantama prikazani su u sljedećoj tablici:

¹ Pretpostavlja se da bruto-dobit i neto-dobit po proizvodu ne ovise o tehnološkoj varijanti po kojoj je proizvod izrađen.

Tablica 2. Utrošak direktno-proizvodnog rada i koeficijenti ekvivalencije

Proizvod (i)	Utrošak direktno proizvodnog rada u minutama i koeficijenti ekvivalencije							
	Var. U-7	Koeficijent ekvivalencije ($c_{i,12}$)	Var. U-11	Koeficijent ekvivalencije ($c_{i,22}$)	Var. NC-P	Koeficijent. Ekvivalencije ($c_{i,32}$)	Var. NC-A	Koeficijent. Ekvivalencije ($c_{i,42}$)
1	18	1,28	-	0,00	9	1,80	7	1,40
2	132	9,43	-	0,00	66	13,20	-	0,00
3	14	1,00	10	1,00	5	1,00	5	1,00
4	15	1,07	9	0,90	-	0,00	-	0,00
5	9	0,64	8	0,80	5	1,00	3	0,60
6	13	0,93	12	1,20	6	1,20	5	1,00
7	22	1,57	20	2,00	-	0,00	-	0,00
8	30	2,14	25	2,50	-	0,00	-	0,00
9	18	1,28	14	1,40	11	2,20	-	0,00
10	14	1,00	11	1,10	7	1,40	5	1,00
11	250	17,80	200	20	145	29	-	0,00

Izvor: Perić (2008.).

Proizvodni pogon za struganje sastoji se od 7 strojeva za struganje U-7 (univerzalni poluautomatski stroj), jednog stroja U-11 (univerzalni poluautomatski stroj), 2 stroja NC-P (namjenski poluautomatski stroj) i jednog stroja NC-A (namjenski automatski stroj). Potrebna vremena izrade pojedinih proizvoda na navedenim strojevima za struganje prikazana su u tablici 3.

Tablica 3. Vrijeme rada strojeva za struganje

Proizvod (i)	Vrijeme rada strojeva za struganje u minutama ²			
	Var. U-7 ($a_{i,1}$)	Var. U-11 ($a_{i,2}$)	Var. NC-P ($a_{i,3}$)	Var. NC-A ($a_{i,4}$)
1	10	-	6	5
2	80	-	40	-
3	8	8	4	4
4	5	5	-	-
5	4	5	3	2
6	6,5	6,5	3	3
7	6	5,5	-	-
8	25	21	-	-
9	6,5	5,8	5	-
10	12	10	7	5
11	47	39	30	-
Raspoloživi kapacitet	405000	101000	130460	99490

Izvor: Perić (2008.).

² Vrijeme rada na izradi proizvoda pored operacije struganja uključuje i neke druge operacije (sječenje, glodanje, brušenje, termička obrada). Neke od ovih operacija obavljaju se na stroju za struganje, što ovisi o vrsti proizvoda i vrsti stroja za struganje. Operacija struganja na pojedinim vrstama strojeva obavlja se s različitim finoćama, što ima za posljedicu neke dodatne operacije u cilju kvalitetne obrade proizvoda pa prema tome, dodatno vrijeme za izradu proizvoda ovisi o vrsti stroja za struganje. Budući da je kod ovih proizvoda struganje najznačajnija operacija, odabir tehnoloških varijanti izvršit će se imajući u vidu ovu operaciju.

Potrošnja osnovnog materijala u kilogramima za izradu pojedinih proizvoda na određenim strojevima za struganje prikazana je u tablici 4.

Tablica 4. Potrošnja osnovnog materijala u kilogramima

Proizvod	Potrošnja osnovnog materijala u kilogramima			
	Var. U-7 (b_{i1})	Var. U-11 (b_{i2})	Var. NC-P (b_{i3})	Var. NC-A (b_{i4})
1	0,41	-	0,40	0,40
2	1,75	-	1,70	-
3	0,35	0,35	0,34	0,34
4	0,40	0,40	-	-
5	0,49	0,47	0,45	0,44
6	0,36	0,35	0,35	0,33
7	0,71	0,69	-	-
8	0,66	0,65	-	-
9	0,42	0,41	0,41	-
10	0,33	0,31	0,30	0,30
11	3,15	3,10	3,05	-

Izvor: Perić (2008.).

Ograničena je mogućnost nabave osnovnog materijala u navedenom vremenskom razdoblju na 46000 kg.

Budući da se radi o specifičnim proizvodima, koji su namijenjeni uskom krugu kupaca, poduzeće ima ograničenja u pogledu mogućnosti prodaje, tako da se predviđa za naredni planski period: najviše se može prodati: 7500 komada proizvoda 1; 4500 komada proizvoda 2; 14500 komada proizvoda 3; 8000 komada proizvoda 4; 25500 komada proizvoda 5; 15500 komada proizvoda 6; 9500 komada proizvoda 7; 4500 komada proizvoda 8; 8500 komada proizvoda 9; 8500 komada proizvoda 10 i 4500 komada proizvoda 11.

Na osnovi prethodno navedenih podataka može se formirati model višekriterijskog linearnog programiranja. Poduzeće je odlučilo maksimizirati funkciju bruto-dobiti i funkciju obujma proizvodnje, a budući da poduzeće izvozi proizvode 1, 3, 4, 5 i 10, funkcija prihoda ostvarenog izvozom treća je funkcija cilja koja će se maksimizirati.

Postavljanje modela

U nastavku će se formirati funkcije cilja i pripadajuća ograničenja modela. Neka je $x_{i,g}$ količina i -tog proizvoda izrađenog po g -toj tehnološkoj varijanti $i \in \{1, \dots, 11\}$, $g \in \{1, \dots, 4\}$

Funkcije cilja:

Bruto – dobit:

$$\max f_1 = \sum_{i=1}^{11} \sum_{g=1}^4 c_{i,g1} x_{i,g}, \quad (10)$$

gdje je $c_{i,g1}$ neto profit iz tablice 1.

Obujam proizvodnje:

$$\max f_2 = \sum_{i=1}^1 c_{i,12} x_{i,1} + \sum_{i=1}^1 c_{i,22} x_{i,2} + \sum_{i=1}^1 c_{i,32} x_{i,3} + \sum_{i=1}^1 c_{i,42} x_{i,4},$$

gdje su $c_{i,12}$, $c_{i,22}$, $c_{i,32}$, $c_{i,42}$ koeficijenti ekvivalencije iz tablice 2.

Prihod ostvaren izvozom:

$$\max f_3 = \sum_{i \in I} \sum_{g=1}^4 c_{i,g} x_{i,g},$$

gdje su $c_{i,g}$ neto prodajne cijene iz tablice 1, dok je $I = \{1, 3, 4, 5, 10\}$

Ograničenja:

Strojevi U-7:

$$(1) \sum_{i=1}^{11} a_{i,1} x_{i,1} \leq 405000, \quad (2) \sum_{i=1}^{11} a_{i,2} x_{i,2} \leq 101000, \quad (3) \sum_{i=1}^{11} a_{i,3} x_{i,3} \leq 130460, \quad (4) \sum_{i=1}^{11} a_{i,4} x_{i,4} \leq 99490,$$

Ograničenje sirovine:

$$(5) \sum_{i=1}^{11} b_{i,1} x_{i,1} + \sum_{i=1}^{11} b_{i,2} x_{i,2} + \sum_{i=1}^{11} b_{i,3} x_{i,3} + \sum_{i=1}^{11} b_{i,4} x_{i,4} \leq 46000,$$

Tržišni kapacitet

$$\begin{aligned} (6) \quad x_{1,1} + x_{1,3} + x_{1,4} &\leq 7500 & (7) \quad x_{2,1} + x_{2,3} &\leq 4500 \\ (8) \quad x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} &\leq 14500 & (9) \quad x_{4,1} + x_{4,2} &\leq 8000 \\ (10) \quad x_{5,1} + x_{5,2} + x_{5,3} + x_{5,4} &\leq 25500 & (11) \quad x_{6,1} + x_{6,2} + x_{6,3} + x_{6,4} &\leq 15500 \\ (12) \quad x_{7,1} + x_{7,2} &\leq 9500 & (13) \quad x_{8,1} + x_{8,2} &\leq 4500 \\ (14) \quad x_{9,1} + x_{9,2} + x_{9,3} &\leq 8500 & (15) \quad x_{10,1} + x_{10,2} + x_{10,3} + x_{10,4} &\leq 8500 \\ (16) \quad x_{11,1} + x_{11,2} + x_{11,3} &\leq 4500 \end{aligned}$$

Ograničenje nenegativnosti varijabli

$$(17) \quad x_{i,g} \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 11\}, \quad g \in \{1, \dots, 4\}$$

Model (3.10) je model višekriterijskog linearnog programiranja sastavljen od tri funkcije cilja i 16 ograničenja. Model je najprije riješen primjenom metode linearnog programiranja zasebno maksimizirajući svaku od tri funkcije cilja na danom skupu ograničenja. Dobivena rješenja prikazana su u tablici 5.

Tablica 5: Tablica isplata – marginalna rješenja

Rješenje	Vrijednosti varijabli	Vrijednosti funkcija cilja		
		f_1	f_2	f_3
$\max f_1$	$x_{2,1} = 2199,$ $x_{2,3} = 2074,$ $x_{3,3} = 11877,$ $x_{3,4} = 2611,$ $x_{4,1} = 8000,$ $x_{6,4} = 15500,$ $x_{7,1} = 7347,$ $x_{9,1} = 8500,$ $x_{10,4} = 8500,$ $x_{11,1} = 1910,$ $x_{11,2} = 2590$	533344	203499,76	410960,50
$\max f_2$	$x_{1,4} = 7500,$ $x_{2,1} = 4254,$ $x_{3,4} = 3872,$ $x_{4,1} = 8000,$ $x_{5,1} = 4369,$ $x_{6,4} = 15500,$ $x_{7,2} = 9500,$ $x_{9,1} = 1112,$ $x_{9,2} = 7388,$ $x_{11,2} = 151,$ $x_{11,3} = 4369$	510011,59	241245	281403,89
$\max f_3$	$x_{1,1} = 7500,$ $x_{4,1} = 8000,$ $x_{3,1} = 14500,$ $x_{5,1} = 25500,$ $x_{10,1} = 8500$	181585	156756	757130

Izvor: autori.

Iz tablice 5. je vidljivo da imamo tri rješenja koja daju različite vrijednosti funkcijama cilja pa je donositelju odluke teško donijeti odluku o odabiru za njega najboljeg rješenja.

Rješenja prikazana u tablici 5. bit će potrebna u nastavku rada, jer su to referentne vrijednosti na temelju kojih će donositelj odluke odrediti donje i gornje razine aspiracijskih vrijednosti funkcija cilja. Autori ovoga rada preuzeli su ulogu donositelja odluke te su za funkcije cilja odredili donju (f_{kD}) i gornju razinu (f_{kG}) svojih aspiracija ($k \in \{1, 2, 3\}$), dok su za ograničenja pretpostavili da su fiksno zadana:

$$f_{1D} = 181585, f_{1G} = 533344, f_{2D} = 156756, f_{2G} = 241245, f_{3D} = 281403,89, f_{3G} = 757139.$$

Na temelju zadanih donjih i gornjih aspiracijskih razina formiraju se funkcije pripadnosti funkcija cilja.

Funkcija pripadnosti funkcija cilja izgledaju ovako:

$$\mu_1(f_1(x)) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } f_1(x) \leq 181585 \\ \frac{f_1(x) - 181585}{533344 - 181585} & \text{ako je } 181585 < f_1(x) < 533344 \\ 1 & \text{ako je } f_1(x) \geq 533344 \end{cases} \quad (11)$$

$$\mu_2(f_2(x)) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } f_2(x) \leq 156756 \\ \frac{f_2(x) - 156756}{241245 - 156756} & \text{ako je } 156756 < f_2(x) < 241245 \\ 1 & \text{ako je } f_2(x) \geq 241245 \end{cases} \quad (12)$$

$$\mu_3(f_3(x)) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } f_3(x) \leq 281403,89 \\ \frac{f_3(x) - 281403,89}{757130 - 281403,89} & \text{ako je } 281403,89 < f_3(x) < 757130 \\ 1 & \text{ako je } f_3(x) \geq 757130 \end{cases} \quad (13)$$

Zatim se funkcija pripadnosti preoblikuje u ograničenja modela fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja:

$$\frac{f_1(x) - 181585}{533344 - 181585} \geq \lambda \Leftrightarrow f_1(x) - 351759\lambda \geq 181585 \quad (14)$$

$$\frac{f_2(x) - 156756}{241245 - 156756} \geq \lambda \Leftrightarrow f_2(x) - 84489\lambda \geq 156756 \quad (15)$$

$$\frac{f_3(x) - 281403,89}{757130 - 281403,89} \geq \lambda \Leftrightarrow f_3(x) - 475726,11\lambda \geq 281403,89 \quad (16)$$

Nakon što su izvedene, potrebne funkcije pripadnosti uvrštavaju se u prethodno prikazan model (9). Prema tome model fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja sada glasi:

$$\max \lambda \quad (17)$$

uz ograničenja

$$f_1(x) - 351759\lambda \geq 181585; \quad f_2(x) - 84489\lambda \geq 156756; \quad f_3(x) - 475726,11\lambda \geq 281403,89;$$

$$\sum_{i=1}^{11} a_{i1}x_{i1} \leq 405000; \quad \sum_{i=1}^{11} a_{i2}x_{i2} \leq 101000; \quad \sum_{i=1}^{11} a_{i3}x_{i3} \leq 130460; \quad \sum_{i=1}^{11} a_{i4}x_{i4} \leq 99490;$$

$$\sum_{i=1}^{11} b_{i1}x_{i1} + \sum_{i=1}^{11} b_{i2}x_{i2} + \sum_{i=1}^{11} b_{i3}x_{i3} + \sum_{i=1}^{11} b_{i4}x_{i4} \leq 46000; \quad x_{1,1} + x_{1,3} + x_{1,4} \leq 7500, \quad x_{1,1} + x_{1,3} + x_{1,4} \leq 7500$$

$$; \quad x_{2,1} + x_{2,3} \leq 4500; \quad x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} \leq 14500; \quad x_{4,1} + x_{4,2} \leq 8000;$$

$$x_{5,1} + x_{5,2} + x_{5,3} + x_{5,4} \leq 25500; \quad x_{6,1} + x_{6,2} + x_{6,3} + x_{6,4} \leq 15500; \quad x_{7,1} + x_{7,2} \leq 9500;$$

$$x_{8,1} + x_{8,2} \leq 4500; \quad x_{9,1} + x_{9,2} + x_{9,3} \leq 8500; \quad x_{10,1} + x_{10,2} + x_{10,3} + x_{10,4} \leq 8500;$$

$$x_{11,1} + x_{11,2} + x_{11,3} \leq 4500; \quad x_{i,g} \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 11\}, \quad g \in \{1, \dots, 4\}.$$

Rješenje ovoga fuzzy linearnog modela dobiveno je pomoću Microsoft Excel Solvera koji koristi simpleks metodu za rješavanje problema linearnog programiranja (tablica 6.).

Tablica 6: Nedominirano rješenje modela fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja

Rješenje	Vrijednosti varijabli	Vrijednosti funkcija cilja		
		f_1	f_2	f_3
Model (17)	$x_{1,4} = 7500, x_{2,1} = 2327, x_{3,1} = 14500,$ $x_{4,1} = 8000, x_{5,1} = 15702, x_{7,2} = 7180,$ $x_{8,2} = 2648, x_{10,4} = 8500, x_{11,2} = 151,$ $x_{11,3} = 4349, \lambda = 0.79796$	478217 (90% od z_1^*)	224175 (93% od z_2^*)	661014 (87% od z_3^*)

Izvor: autor.

Tablica 7: Iskorištenost pojedinih ograničenja

Ograničenje	Iskorištenost ograničenja
Raspoloživi kapacitet strojeva U-7	100 %
Raspoloživi kapacitet strojeva U-11	100 %
Raspoloživi kapacitet strojeva NC-P	100 %
Raspoloživi kapacitet strojeva NC-A	80,41 %
Ograničenje raspoloživih sirovina	100 %
Prodaja proizvoda 1	100 %
Prodaja proizvoda 3	100 %
Prodaja proizvoda 4	100 %
Prodaja proizvoda 5	61,58 %
Prodaja proizvoda 6	0,00 %
Prodaja proizvoda 7	75,58 %
Prodaja proizvoda 9	0,00 %
Prodaja proizvoda 10	100 %
Prodaja proizvoda 2	51,72 %
Prodaja proizvoda 8	58,84 %
Prodaja proizvoda 11	100 %

Izvor: autori.

Kako bi donositelj odluke procijenio je li dobiveno rješenje zadovoljavajuće, usporedit će ga s marginalnim rješenjima iz tablice 5. (vidljivo u tablici 6.) te će izračunati vrijednosti funkcija pripadnosti uvrštavanjem dobivenih vrijednosti funkcija cilja u relaciju (11), (12) i (13):

$$\mu_1(f_1(x)) = 0,8433, \quad \mu_2(f_2(x)) = 0,798, \quad \mu_3(f_3(x)) = 0,798.$$

Primjećujemo da se odstupanja dobivenih vrijednosti funkcija cilja od njihovih marginalnih vrijednosti nalaze između 87 i 93 posto, dok se odgovarajuće funkcije pripadnosti kreću od 0,798 do 0,8433. To nam kazuje da smo dobili rješenje koje svim funkcijama cilja daje približno jednako značenje, što ovoj metodi daje značajnu prednost u odnosu na neke druge metode višekriterijskog programiranja. Rješenje dobiveno primjenom ove metode usporedili smo s rješenjima dobivenim metodom STEM i metodom SWT (Perić, 2008.):

Tablica 8: Dobivena rješenja metodama STEM i SWT

Metoda	f_1	f_2	f_3
STEM	519706,93 (97% od f_1^*)	224968 (93% od f_2^*)	650000 (86% od f_3^*)
SWT	519705.2 (97% od f_1^*)	225245 (93% od f_2^*)	650000 (86% od f_3^*)

Izvor: Perić (2008.).

Iz tablice 8. vidimo da su metode STEM i SWT dale približno jednaka rješenja koja se razlikuju od rješenja dobivenog primjenom metode fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja. Metoda fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja daje nešto veću vrijednost funkciji f_3 , a manju vrijednost funkciji f_1 . Prema tome, metoda fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja dala je rješenje koje funkcijama cilja daje vrijednosti s postotkom ostvarenja marginalnih vrijednosti funkcija cilja između 87 i 93 %, za razliku od metoda STEM i SWT koje su dale rješenja s vrijednostima funkcija cilja koje imaju postotak ostvarenja njihovih marginalnih vrijednosti između 86 i 97 %.

Metoda fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja ima prednost u odnosu na metode STEM i SWT jer od donositelja odluke traži jedino informaciju o donjim i gornjim aspiracijskim razinama funkcija cilja, koje nije teško osigurati. Te se informacije čak mogu preuzeti iz tablice isplata. Metode STEM i SWT su interaktivne metode koje od donositelja odluke traže aktivno sudjelovanje u procesu rješavanja problema osiguravajući brojne informacije vezane uz relativnu važnost funkcija cilja, kao i mogućnost prepoznavanja preferiranog rješenja. Te informacije nije jednostavno osigurati.

5. ZAKLJUČAK

U ovom je radu testirana efikasnost primjene metodologije fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja u rješavanju problema planiranja proizvodnje i tehnoloških varijanti. Dobiveni rezultati ukazuju na visoku razinu efikasnosti primijenjene metodologije. Opisani pristup traženja rješenja zadanog problema u nejasnom okruženju ima značajne prednosti u odnosu na upotrebu nekih drugih metoda koje su također upotrijebljene za rješavanje navedenoga problema (metoda STEM i SWT). Metoda fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja od donositelja odluke traži informaciju o njegovim aspiracijama izraženim kroz određivanje donje i gornje granice vrijednosti funkcija cilja i ograničenja, što za donositelja odluke može jednostavno osigurati oslanjajući se na vrijednosti funkcija cilja iz tablice marginalnih rješenja. Ova je metoda također jednostavna za korištenje.

LITERATURA

1. Abd El_Wahed, W. F., Lee, S. M. (2006). Interactive fuzzy goal programming for multi-objective transportation problems, *Omega* 34: 158-166.
2. Baky, I. A. (2010). Solving multi-level multi-objective linear programming problems through fuzzy goal programming approach, *Applied Mathematical Modelling* 34(9): 2377-2387.
3. Barković, D. (1997) Operacijska istraživanja, *Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Ekonomski fakultet Osijek*, Osijek.

4. Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., Muhlig, H. (2004). *Matematički priručnik*, Zagreb: Golden marketing – Tehnička knjiga.
5. Hannan, E. L. (1981). Fuzzy programming with multiple fuzzy goals, *Fuzzy sets and systems* 6: 235-248.
6. Hu, C.-F., Teng, C.-J., Li, S.-Y. (2007). A fuzzy goal programming approach to multiobjective optimization problem with priorities, *European Journal of Operational Research* 176: 1319-1333.
7. Ignizio, J. P. (1982). On the rediscovery of fuzzy goal programming, *Decision Science* 13: 331-336.
8. Kumar, A., Kaur, J. (2013). General Form of Linear Programming Problems with Fuzzy Parameters. *Journal of Applied Research and Technology* 11: 629-635.
9. Kumar, A., Kaur, J., Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. *Elsevier* 35: 817-823.
10. Lai, Y.-J., Hwang, C.-L. (1996). *Fuzzy Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications*, Springer, Berlin Heidelberg.
11. Matejaš, J., Perić, T. (2014). A new iterative method for solving multiobjective linear programming problem. *Applied Mathematics and Computation* 243:746-754.
12. Mohamed, R. H. (1996). The relationship between goal programming and fuzzy programming, *Fuzzy Sets and Systems* 89: 215-222.
13. Narasimhan, R. (1980). Goal programming in a fuzzy environment, *Decision Science* 11: 325-336.
14. Narasimhan, R. (1981). On fuzzy goal programming – some comments, *Decision Science* 12: 532-538.
15. Ohta, H., Yamaguchi, T. (1996). Linear fractional goal programming in consideration of fuzzy solution, *European Journal of Operational Research* 92: 157-165.
16. Pal, B. B., Moitra, B. N., Maulik, U. (2003). A goal Programming procedure for fuzzy multiobjective linear fractional programming problems, *Fuzzy Sets and Systems* 139: 395-405.
17. Parra, M. A., Terol, A. B., Uria, M.V.R. (2001). A fuzzy goal programming approach to portfolio selection, *European Journal of Operational Research* 133: 287-297.
18. Perić, T. (2008). *Višekriterijsko programiranje – metode i primjene*, Zagreb: Alka script d.o.o.
19. Perić, T., Bratić, F. (2015). Production Plan and Technological Variants Optimization by Goal Programming Methods, *International Journal of Economics and Management Engineering* 9(6): 1952-1958.
20. Sharma, D. K., Jana, R. K., Gaur, A. (2007). Fuzzy goal programming for agricultural land allocation problems. *Yugoslav Journal of Operations Research* 17(1): 31-42.
21. Yang, T., Ignizio, J. P., Kim, H. J. (1991) Fuzzy programming with nonlinear membership functions: piecewise linear approximation, *Fuzzy sets and systems* 41: 39-53.
22. Zadeh L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control* 8: 338-353.
23. Zimmermann H. J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems* 1: 45-55.