



Pregledni rad/Review paper
Primljen/Received: 22. 10. 2019.
Prihvaćen/Accepted: 06. 12. 2019.

PRIMJENA CROSSOVE ITERATIVNE METODE NA JEDNOSTAVNIM SUSTAVIMA

Mirna Raič, doc. dr. sc.

Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, mirna.raic@gf.sum.ba

Vlaho Akmadžić, prof. dr. sc.

Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, vlaho.akmadzic@gf.sum.ba

Sažetak: U radu se daje kratak osvrt na različite mogućnosti primjene standardnih inženjerskih metoda proračuna. Na primjeru Crossove iterativne metode htjelo se prikazati kako se razvijena metoda uravnoteženja može koristiti u različitim područjima. U ovom radu ona se u području teorije konstrukcija dotiče postupka proračuna statički neodređenih konstrukcija kroz uravnoteženje momenata u čvorovima, a u području hidraulike sustava pod tlakom bavi se problemima analize tečenja u cijevnim mrežama.

Ključne riječi: metode proračuna, uravnoteženje, Crossova metoda, hidraulika sustava pod tlakom, cijevne mreže

APPLICATION OF THE CROSS ITERATIVE METHOD ON SIMPLE SYSTEMS

Abstract: This paper gives a brief overview of the different possibilities of applying standard engineering calculation methods. The intention was to show how a developed balancing method can be used in different fields on the example of Cross iterative method. In the field of structural theory, in this paper it deals with the procedure of calculating statically indeterminate structures by balancing moments in nodes, and in the field of pressure system hydraulics it deals with the problems of analysis of flow in pipe networks.

Key words: calculation methods, balancing, Cross method, hydraulics of pressure systems, pipe networks



1. Uvod

Pristup analizi i proračunu bilo kakvih struktura podrazumijeva korištenje odgovarajućih metoda. Ispravnim korištenjem tih metoda, dobivaju se rješenja analiziranih problema. U radu se stavio naglasak na mogućnost korištenja iste metode proračuna u različitim inženjerskim problemima.

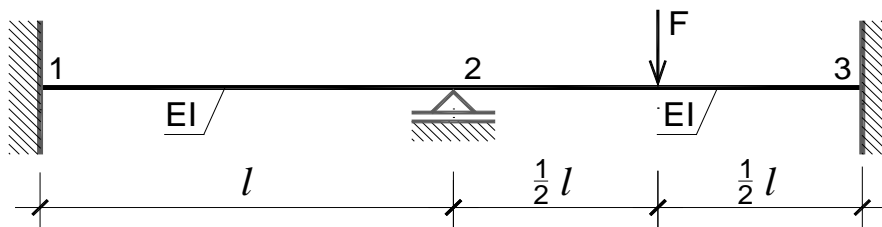
Dakle, govori se o metodi koja se može primijeniti na probleme uravnoteženja momenata u čvorovima statički neodređenih konstrukcija, kao i na probleme hidrauličke analize cijevnih mreža, a radi se o metodi Hardy Crossa [4], [5]. Autor metode je 1929. godine objavio radove koji demonstriraju primjenu ove iterativne metode kod analize kontinuiranih okvira raspodjelom momenata upetosti. Međutim, kasnije se uviđa mogućnost primjene ove metode na analizu hidrauličkih problema i 1949. godine objavljuje istraživanje na temu analize protoka u cijevnim mrežama.

2. Crossova iterativna metoda

Pod pojmom iterativne metode podrazumijevaju se skupine metoda koje, za rješavanje statički neodređenih štapnih konstrukcija, rabe analitičke postupke koji sukcesivnim putem rješavaju zadani skup jednačbi [1], [2], [6], [7]. Crossova iterativna metoda raspodjele momenata je imala najširu primjenu u rješavanju statičkih, a i hidrauličkih zadataka [1], [3].

2.1 Primjer – statika krutoga tijela

U nastavku se navodi primjena ove metode na karakterističnom, statički neodređenom, sustavu sa slike 1. Za zadane veličine: $F = 200\text{kN}$, raspon $l = 4\text{m}$, $EI = \text{const.}$ razdjelne vrijednosti (raspodjele momenata) η navedene su u nastavku.



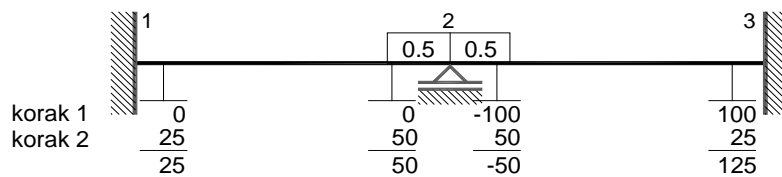
Slika 1. Statički neodređen sustav

$$\eta_{21} = \frac{K_{21}}{\sum K} = \frac{4 \cdot \left(\frac{EI}{4}\right)}{4 \cdot \left(\frac{EI}{4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{EI}{4}\right)} = 0.5, \quad \eta_{23} = \frac{K_{23}}{\sum K} = \frac{4 \cdot \left(\frac{EI}{4}\right)}{4 \cdot \left(\frac{EI}{4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{EI}{4}\right)} = 0.5. \quad (1)$$

Važno je istaknuti kako mora biti ispunjen uvjet:

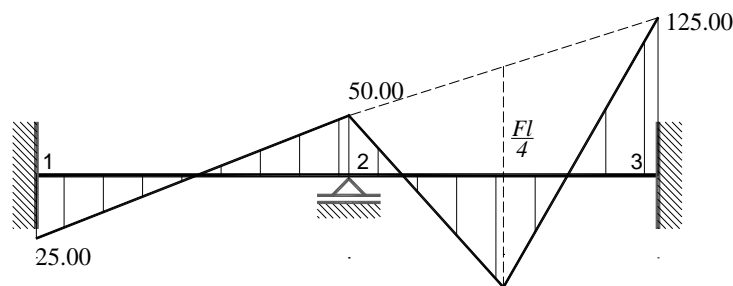
$$\sum \eta_{\text{čvor}} = 1.0. \quad (2)$$

Zatim se, budući su svi čvorovi još uvijek nepomični, izračunavaju momenti upetosti za svaki element, koji u ovom slučaju imaju apsolutnu vrijednost 100 kNm . Za pozitivan predznak momenata usvojeno je da bude u skladu s potpunom metodom pomaka. Dobivene vrijednosti sila pune upetosti (momenata) ispisuju se u koraku 1.



Slika 2. Iterativna shema

U koraku 2 se izračunava zbroj momenata u čvoru 2 i uravnotežuje se s momentom istog intenziteta, a suprotnog predznaka. Dakle, zbroj momenata je -100 i uravnotežuje se s momentom u iznosu 100. On se raspodjeljuje s obzirom na razdjelni faktor čvora 2 na 50 lijevo i 50 desno. Taj moment u iznosu 50 kNm, koji djeluje u čvoru 2, prenosi se na drugi kraj štapa prema čvoru 1, odnosno 3 (50% vrijednosti). Konačni dijagram vidljiv je na slici 3.



Slika 3. Dijagram momenata

2.2 Primjer – hidraulička analiza cijevnih mreža

U svakom prstenu algebarski zbroj gubitaka tlakova mora biti jednak nuli. Međutim, pošto su protoci po linijama pretpostavljeni proizvoljno, vodeći računa samo o kontinuitetu, algebarski zbroj gubitaka će biti različit od nule. Razlika nastaje zbog greške u pretpostavljenom protoku, odnosno zbog razlike (ΔQ) između stvarnog i pretpostavljenog protoka. Radi toga, mora biti ispunjeno:

$$\sum_{i=1}^n s_i \cdot \ell_i \cdot (Q_i + \Delta Q)^2 = 0. \quad (3)$$

Ovdje indeks „i“ označava liniju u prstenu. Cross je pretpostavio kako je popravka za sve linije jednog prstena jednaka. Sada je:

$$\sum_{i=1}^n s_i \cdot \ell_i \cdot Q_i^2 + 2 \cdot \Delta Q \cdot \sum_{i=1}^n s_i \cdot \ell_i \cdot Q_i + (\Delta Q)^2 = 0. \quad (4)$$

Član $(\Delta Q)^2$ se može zanemariti kao mala veličina drugog reda, pa slijedi:

$$\Delta Q = - \frac{\sum_{i=1}^n s_i \cdot \ell_i \cdot Q_i^2}{2 \cdot \sum_{i=1}^n s_i \cdot \ell_i \cdot Q_i} = - \frac{\sum_i h_i (\text{uzimajući u obzir predznak})}{2 \cdot \sum_{i=1}^n s_i \cdot \ell_i \cdot Q_i (\text{ne uzimajući u obzir predznak})}. \quad (5)$$

Specifični koeficijent otpora cijevnog voda definiran je sljedećim izrazom:



$$s = 0.0826 \cdot \frac{\ell}{d^5}. \quad (6)$$

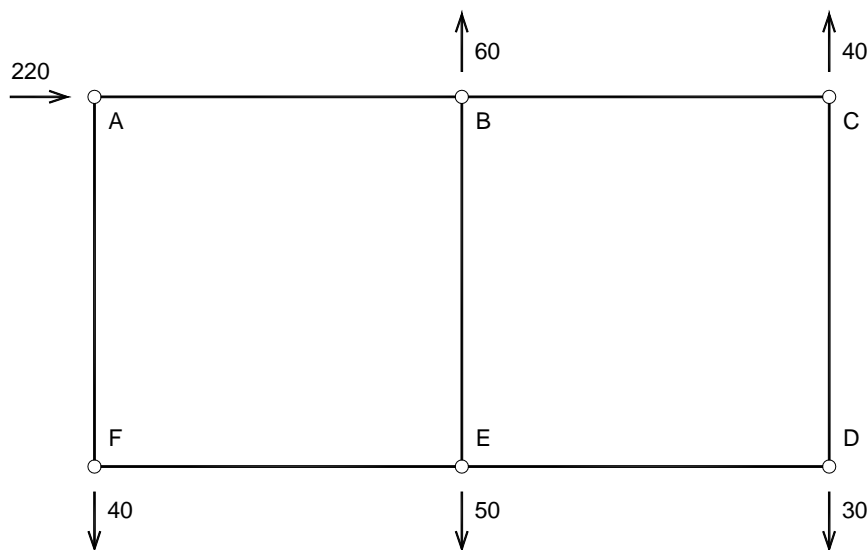
U numeričkom primjeru u nastavku zadatak je odrediti količinu vode koja teče kroz pojedine cijevi, kao i vrijednosti tlaka u čvorovima. Cijevna mreža i zadani protoci u [l/s] prikazani su na slici 4, a zadani podaci dani su u tablicama 1 i 2. Ulazni podaci su: apsolutna hrapavost $k = 0.06$ mm; zadani tlak u čvoru A, $p_A = 70$ m n. m.; kinematička viskoznost $\nu = 1.14 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

Tablica 1. Dužine i promjeri cijevnih vodova

| CIJEV | AB | BC | CD | DE | EF | AF | BE |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| DUŽINA [m] | 600 | 600 | 200 | 600 | 600 | 200 | 200 |
| PROMJER [mm] | 250 | 150 | 100 | 150 | 150 | 200 | 100 |

Tablica 2. Podaci za čvorove

| ČVOR | A | B | C | D | E | F |
|---------|----|----|----|----|----|----|
| m n. m. | 30 | 25 | 20 | 20 | 22 | 25 |



Slika 4. Cijevna mreža

Postupak proračuna provodi se u sljedećim koracima:

1. Definirati prstene. Najjednostavniji način je definirati prstene tako da budu susjedni, odnosno da im je bar jedna grana zajednička. Na primjer, prsten 1 definiran je čvorovima ABEFA i prsten 2 definiran čvorovima BCDEB (slika 5).
2. Pridružiti procijenjene protoke u cijevima. Dovoljno je za svaki prsten odrediti po jednu vrijednost protoka, dok se preostali dio protoka određuje iz uvjeta očuvanja kontinuiteta u čvorovima. Na primjer, uzme li se u obzir kako je ukupni dotok u sustav 220 l/s, te ako se pretpostavi da je protok $Q_{AB} = 120$ l/s, onda je $Q_{AF} = 100$ l/s.
3. Koeficijent gubitka tlaka računa se za svaku cijev.

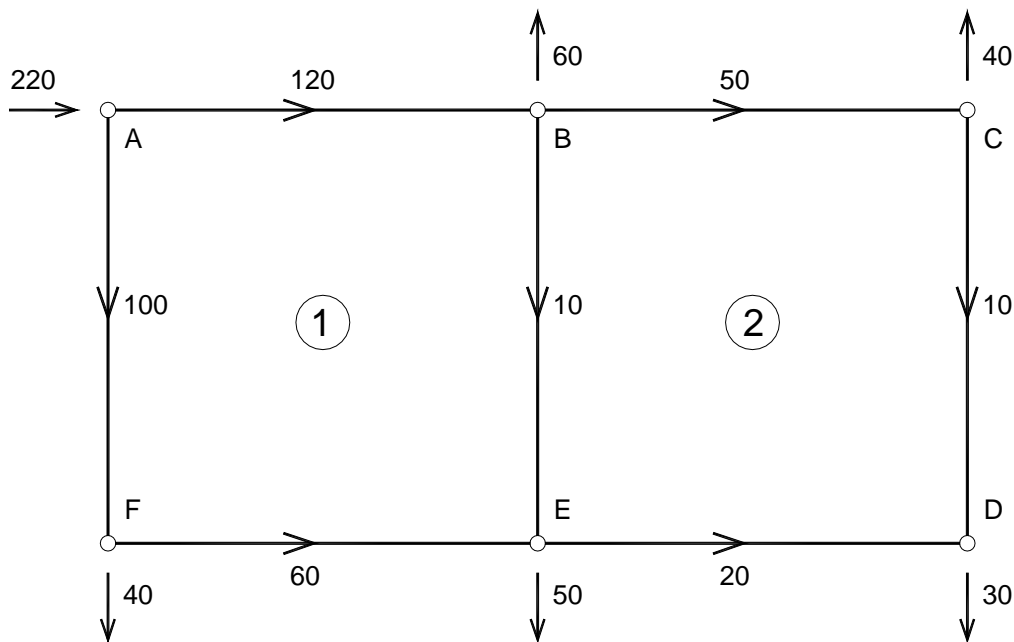


$$K = \frac{\lambda \cdot \ell}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2}. \quad (7)$$

$$h_L = K \cdot Q \cdot |Q|. \quad (8)$$

Iz Moodyevog dijagrama određuje se koeficijent λ . Kao alternativa, može se koristiti Barrova jednačba:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.70 \cdot D} + \frac{5.1286}{\text{Re}^{0.89}} \right). \quad (9)$$



Slika 5. Raspodjela protoka po vodovima

Ako Reynoldsov broj ima relativno malu vrijednost ($\leq 10^5$), moguće je nastaviti proračun iterativnim metodama mijenjajući vrijednost za λ , tako da rezultat konvergira rješenju.

Nakon toga, kao što je prikazano u nastavku, proračun se radi tablično (tablice 3 do 5). Linijski gubici se izračunavaju iz izraza:

$$h_L = r \cdot Q^2, \quad (10)$$

gdje „r“ predstavlja koeficijent otpora cijevnog voda izračunat na način:

$$r = s \cdot \ell. \quad (11)$$

Oznaka „s“ predstavlja specifičnu provodljivost cijevnog voda, dok se oznaka „l“ odnosi na dužinu pojedinog cijevnog voda.



Tablica 3. Proračun za prsten 1

| PRSTEN | CIJEV | k/D | Q [m ³ /s] | Re (*10 ⁵) | λ | K | h _L [m] | h _L /Q [m/m ³ /s] |
|--------|-------|---------|--------------------------|---------------------------|---------|-------|-----------------------|--|
| 1 | AB | 0.00024 | 0.12 | 5.36 | 0.01585 | 805 | 11.59 | 96.56 |
| | BE | 0.00060 | 0.01 | 1.12 | 0.02066 | 34180 | 3.41 | 341.46 |
| | EF | 0.00040 | -0.06 | 4.48 | 0.01744 | 11399 | -41.00 | 683.26 |
| | FA | 0.00030 | -0.10 | 5.58 | 0.01640 | 847 | -8.47 | 84.72 |
| Σ = | | | | | | | -34.46 | 1205.99 |

Za prvi prsten vrijednost ΔQ iznosi:

$$\Delta Q = \frac{-\sum h}{2 \cdot \sum \frac{h}{Q}} = \frac{-(-34.46)}{2 \cdot 1205.99} = 0.01429 = 14.29 \text{ l/s.} \quad (12)$$

Tablica 4. Proračun za prsten 2

| PRSTEN | CIJEV | k/D | Q [m ³ /s] | Re (*10 ⁵) | λ | K | h _L [m] | h _L /Q [m/m ³ /s] |
|--------|-------|---------|--------------------------|---------------------------|---------|-------|-----------------------|--|
| 2 | BC | 0.00040 | 0.05 | 3.72 | 0.01761 | 11511 | 28.75 | 574.98 |
| | CD | 0.00060 | 0.01 | 1.12 | 0.02066 | 34180 | 3.41 | 341.46 |
| | DE | 0.00040 | -0.02 | 1.49 | 0.01898 | 12402 | -4.96 | 247.79 |
| | EB | 0.00060 | -0.024 | 2.71 | 0.01927 | 31877 | -18.70 | 771.61 |
| Σ = | | | | | | | 8.51 | 1935.85 |

Za drugi prsten vrijednost ΔQ iznosi:

$$\Delta Q = \frac{-\sum h}{2 \cdot \sum \frac{h}{Q}} = \frac{-(8.51)}{2 \cdot 1935.85} = -2.20 \text{ l/s.} \quad (13)$$

Ponovljeni proračun (prva iteracija) za prvi prsten naveden je u tablici 5.

Tablica 5. Proračun za prsten 1 – prva iteracija

| PRSTEN | CIJEV | k/D | Q [m ³ /s] | Re (*10 ⁵) | λ | K | h _L [m] | h _L /Q [m/m ³ /s] |
|--------|-------|---------|--------------------------|---------------------------|---------|-------|-----------------------|--|
| 1 | AB | 0.00024 | 0.1343 | 6.00 | 0.01575 | 800 | 14.42 | 107.35 |
| | BE | 0.00060 | 0.0243 | 2.71 | 0.01927 | 31873 | 18.78 | 773.38 |
| | EF | 0.00040 | -0.0451 | 3.24 | 0.01776 | 11608 | -21.96 | 504.63 |
| | FA | 0.00030 | -0.0857 | 4.79 | 0.01654 | 855 | -6.28 | 73.21 |
| Σ = | | | | | | | 4.97 | 1458.57 |



Za prvi prsten ponovljeni proračun daje vrijednost ΔQ od:

$$\Delta Q = \frac{-\sum h}{2 \cdot \sum \frac{h}{Q}} = \frac{-(4.97)}{2 \cdot 1458.57} = -1.70 l / s. \quad (14)$$

Postupak proračuna se ponavlja i za prsten 2. Iteracije se nastavljaju i dalje. Navedeno rješenje dobiveno za $\Sigma h < 0.01$ m, prikazano je u tablicama 6 i 7. U ovisnosti o problemu koji se rješava, prihvatljiv je i rezultat s većom tolerancijom.

Tablica 6. Rezultati proračuna po cijevnim vodovima

| CIJEV | Q [m ³ /s] | h _L [m] |
|-------|--------------------------|-----------------------|
| AB | 0.1337 | 14.30 |
| BE | 0.0237 | 17.96 |
| FE | 0.0477 | 26.20 |
| AF | 0.0863 | 6.35 |
| BC | 0.0377 | 16.61 |
| CD | 0.0011 | 4.38 |
| ED | 0.0186 | 4.32 |

Tablica 7. Rezultati proračuna po čvorovima

| ČVOR | TLAK [m] |
|------|-------------|
| A | 40.00 |
| B | 30.70 |
| C | 19.09 |
| D | 14.71 |
| E | 15.74 |
| F | 38.65 |

3. Zaključak

Cilj bilo koje metode je na uniforman način riješiti zadane probleme. Ovdje se htio dati naglasak na mogućnost korištenje principa odgovarajuće metode na rješavanje problema iz različitih područja istraživanja. U navedenim primjerima demonstrirana je mogućnost korištenja Crossovog iterativnog postupka kod rješavanja problema iz područje teorije konstrukcija na statički neodređenim sustavima i kod hidrauličke analize tečenja u cijevnim mrežama.



4. Literatura

1. Akmadžić, V.; Smoljanović, H.; Balić, I.: *Građevna statika II - Metoda pomaka kroz primjere*, Sveučilište u Mostaru, Mostar, 2018.
2. Akmadžić, V.; Trogrlić, B.; Prusac, K.: *Građevna statika II - Metoda sila kroz primjere*, Sveučilište u Mostaru, Mostar, 2016.
3. Brkić, D.: *An improvement of Hardy Cross method applied on looped spatial natural gas distribution networks*, Applied Energy, 86, pp. 1290-1300, 2009.
4. Cross, H.: *Analysis of flow in networks of conduits or conductors*, Engineering Experiment Station, Bulletin No. 286, 1936., University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering.
5. Cross, H., Morgan, N. D.: *Continuous Frames of Reinforced Concrete*, John Willey & Sons, New York, 1932.
6. Fresl, K., Gidak, P., Hak, S.: *Iz povijesti razvoja iteracijskih postupaka*, Građevinar, vol.62, br. 10., str. 959-970, 2010.
7. Mihanović, A.; Trogrlić, B.; Akmadžić, V.: *Građevna statika II*, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Split, 2014.