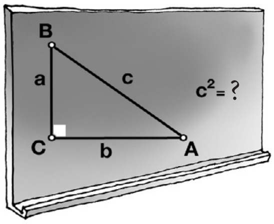
DOKAZI NEKIH TVRDNJI VEZANIH ZA PRAVOKUTNI TROKUT

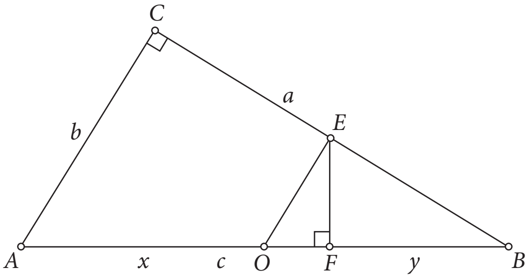
Šefket Arslanagić, Sarajevo

U ovome članku dokazat ćemo nekoliko zanimljivih tvrdnji vezanih uz pravokutni trokut.

Tvrdnja 1. Razlika kvadrata odsječaka koje čini okomica nacrtana iz polovišta jedne od kateta na hipotenuzu pravokutnog trokuta jednaka je kvadratu druge katete.

Dokaz: Neka je ΔABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C, a točka E polovište katete $\overline{BC}$. Pri tome je $EF \perp AB$, gdje je točka $F \in \overline{AB}$. Uzmimo da je $|AF| = x$, $|BF| = y$, a točka O je polovište hipotenuze $\overline{AB}$ (Slika 1.).





Slika 1.

Imamo

$$|OF| = |AF| - |AO| = x - \frac{|AF| + |BF|}{2}, \text{ tj.}$$

$$|OE| = x - \frac{x+y}{2}$$

ili

$$|OE| = \frac{x-y}{2}. \tag{1}$$

Dužina $\overline{OE}$ očigledno je srednjica trokuta ΔABC pa slijedi:

$$|OE| = \frac{1}{2}|AC|, \text{ tj.}$$

$$|OE| = \frac{b}{2}. \tag{2}$$

Budući da je $\overline{OE} \parallel \overline{AC}$ i $EF \perp AB$, slijedi da je $|\measuredangle EOF| = |\measuredangle CAB|$ i $|\measuredangle OEF| = |\measuredangle ABC|$, pa su pravokutni trokuti ΔOEF i ΔABC slični. Dakle, slijedi:

MATKA 107.indd 150 10.2.2019. 16:58:50

$$\frac{|OE|}{|AB|}=\frac{|OF|}{|AC|},$$

a odavde zbog (1) i (2) redom vrijedi:

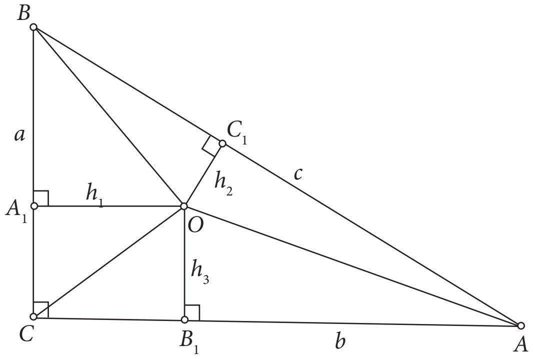
$$\frac{\frac{b}{2}}{x+y}=\frac{\frac{x-y}{2}}{b}\Rightarrow\frac{b}{2(x+y)}=\frac{x-y}{2b}\Rightarrow b^2=(x-y)(x+y)\text{, tj. } x^2-y^2=b^2\text{, što}$$

je trebalo dokazati.

Tvrdnja 2. Neka je točka O unutar pravokutnog trokuta ΔABC s pravim kutom u vrhu C takva da su površine trokuta ΔAOB, ΔBOC i ΔAOC jednake. Tada vrijedi jednakost:

$$|OA|^2+|OB|^2=5|OC|^2.$$

Dokaz: Nacrtajmo iz točke O visine $\overline{OA_1}, \overline{OC_1}$ i $\overline{OB_1}$ (pri čemu je $|OA_1|=h_1$, $|OC_1|=h_2$ i $|OB_1|=h_3$) na stranice $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ pravokutnog trokuta ΔABC. Neka je $|AC|=b, |BC|=a$ i $|AB|=c$ (Slika 2.).



Slika 2.

Sada na osnovi Pitagorinog poučka primijenjenog na pravokutne trokute ΔOB_1A i ΔOA_1B dobivamo

$$|AB_1|^2+|OB_1|^2=|OA|^2 \text{ i } |BA_1|^2+|OA_1|^2=|OB|^2,$$

odnosno

$$(b-h_1)^2+h_3^2=|OA|^2 \text{ i } (a-h_3)^2+h_1^2=|OB|^2,$$

a odavde

$$|OA|^2+|OB|^2=(a-h_3)^2+(b-h_1)^2+h_1^2+h_3^2$$

$$\Rightarrow|OA|^2+|OB|^2=a^2+b^2-2ah_3-2bh_1+2(h_1^2+h_3^2). \quad (3)$$

Matka 27 (2018./2019.) br. 107

MATKA 107.indd 151 10.2.2019. 16:58:51

Iz uvjeta tvrdnje imamo:

$$p_{\Delta OBC}=p_{\Delta OCA}=p_{\Delta OAB}\text{, tj.}$$

$$\frac{1}{2}h_1a=\frac{1}{2}h_3b=\frac{1}{3}p_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}ab\text{, tj.}$$

$$b=3h_1\ \text{ i }\ a=3h_3. \tag{4}$$

Sada iz (3) i (4) slijedi:

$$|OA|^2+|OB|^2=9h_3^2+9h_1^2-6h_3^2-6h_1^2+2\left(h_1^2+h_3^2\right),$$

odnosno

$$|OA|^2+|OB|^2=5\left(h_1^2+h_3^2\right). \tag{5}$$

Budući da za pravokutni trokut ΔOCB_1 vrijedi $|OC|^2=|CB_1|^2+|OB_1|^2$, možemo pisati

$$|OC|^2=h_1^2+h_3^2, \tag{6}$$

pa iz (5) i (6) dobivamo

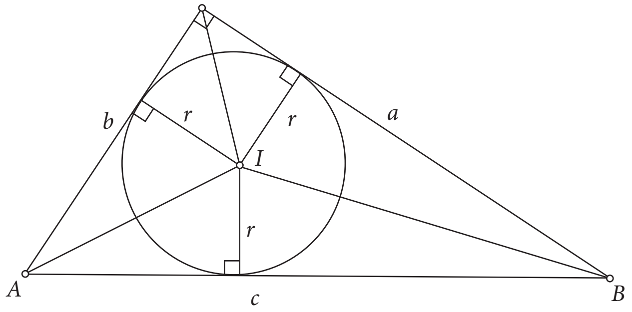
$$|OA|^2+|OB|^2=5|OC|^2\text{, što je trebalo dokazati.}$$

Tvrdnja 3. U pravokutnom trokutu ΔABC vrijede nejednakosti

$$\text{a) } r<\frac{1}{2}a\,; \qquad \text{b) } r\le\frac{\sqrt{2}-1}{2}c<\frac{c}{4},$$

gdje su *a* i *b* duljine kateta, *c* duljina hipotenuze, a *r* polumjer kružnice upisane tome trokutu.

Dokaz: Neka je točka *I* središte kružnice upisane u pravokutni trokut ΔABC, a *r* polumjer kružnice upisane u taj trokut (Slika 3.).



Slika 3.

Tada imamo:

$$p_{\Delta ABI}+p_{\Delta BCI}+p_{\Delta ACI}=p_{\Delta ABC}, \qquad \text{tj.} \quad \frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}=\frac{ab}{2},$$

MATKA 107.indd 152 10.2.2019. 16:58:51

a odavde je $r(a+b+c)=ab$, što možemo pisati kao $r=\dfrac{ab}{a+b+c}$. Dalje vrijedi:

$$r=\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{a+b-c}{a+b-c};\ (a+b>c)\ \Rightarrow r=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2}\ \Rightarrow r=\frac{ab(a+b-c)}{a^2+b^2+2ab-c^2},$$

a odavde zbog $a^2+b^2=c^2$ (Pitagorin poučak) vrijedi $r=\dfrac{ab(a+b-c)}{2ab}$, tj.

$$r=\frac{a+b-c}{2}. \tag{7}$$

Dokažimo sada dane nejednakosti.

a) Zbog $b<c$ imamo iz (7):

$$r=\frac{a+b-c}{2}<\frac{a+c-c}{2}=\frac{1}{2}a,\ \text{tj.}\ r<\frac{1}{2}a,\ \text{što je trebalo dokazati.}$$

b) Dokazat ćemo prvo nejednakost

$$a+b\le c\sqrt{2}. \tag{8}$$

Vrijedi da je $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)=2c^2$, a odavde je $(a+b)^2\le 2c^2$, tj. $a+b\le c\sqrt{2}$.

Sada na osnovi (7) i (8) slijedi:

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)\le\frac{1}{2}(c\sqrt{2}-c),\ \text{tj.}\ r\le\frac{\sqrt{2}-1}{2}c<\frac{c}{4},$$

jer je $\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2<\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$. Ovime je dokazana i dana nejednakost b).

Napomena 1. Vrijedi jednakost u nejednakosti (8) ako je u pitanju pravokutni jednakokračni trokut ΔABC.

Literatura:

1. Arslanagić, Š. (2005.). *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo.
2. Marić, A. (1996.). *Planimetrija – Zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb.
3. Marić, A. (2007.). *Trokut*, Element, Zagreb.
4. Stošić, V. (2017.). *Planimetrija – Odabrani zadaci za osnovnu školu*, Element, Zagreb.

MATKA 107.indd 153 10.2.2019. 17:01:07