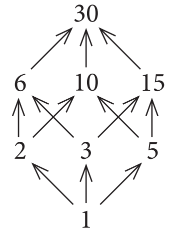
I OVO JE ČAROBMATIKA (RELACIJE, ODNOSI, RELACIJA EKVIVALENCIJE)

Jadranka Delač-Klepac, Zagreb

Matka 27 (2018./2019.) br. 107

Što vidite na ovoj skici?



Slika 1.

Što bi mogle značiti ove strelice?

Kako su povezani djelitelji (faktori) broja 30?

Koji je najveći djelitelj broja 30? Koji je najmanji?

Zašto je broj 1 sam u donjem retku?

Gdje se nalazi broj 3? Zašto baš na tome mjestu?

Koliko ima različitih djelitelja broja 30?

U kojem su oni odnosu?

Pronalazite li i prepoznajete li neku strukturu u gornjoj skici?

Naučili smo da matematika i čarobmatika postavljaju različita pitanja i traže odgovarajuće odgovore na njih. Primjerice, to su pitanja poput:

Zašto je broj pomnožen nulom uvijek jednak nuli?

Zašto nulom ne možemo dijeliti?

Zašto broj π ima beskonačno mnogo decimala?

Koliko je $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \ldots$?

Je li ∞ uopće broj?

Na koliko simetričnih načina mogu popločiti ravnu površinu tako da se uzorak može ponavljati unedogled?

Koliko ima parova u skupu koji čine prosti brojevi blizanci (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19)...? Ima li ih beskonačno mnogo?

Koliko si visok? **Je li** Ante viši od tebe?

Kako to da skup svih prirodnih brojeva i skup svih cijelih brojeva imaju jednako mnogo elemenata?

Ako je Marko Anin prijatelj, a Ana Nikolina prijateljica, **jesu li tada** prijatelji Marko i Nikola?

Na neka pitanja znamo odgovore, a na neka ne. Za mnoga još tražimo odgovore.

Matematika nije učenje formula napamet i baratanje brojkama. Matematika bi trebala biti istraživanje kako otkriti neki uzorak, neku pravilnost, formulu, **način razmišljanja** te kako ih primijeniti na nešto drugo ili drukčije kako bismo riješili taj drugi problem.

Da, matematika se ne bavi samo brojevima i odgovorima na pitanja: što, kako, zašto, gdje, koliko, kuda... itd., već i odnosima, tj. **relacijama** između brojeva, ali i **odnosima** i **strukturama** između nekih drugih objekata koji ne moraju biti brojevi. To mogu biti ljudi, automobili, vektori, matrice, funkcije i još mnogi čarobni objekti koji se kriju oko nas, a mi ih uvijek ne vidimo. Ako uočimo pravilnosti u nekim strukturama koje sačinjavaju različiti objekti, koristeći metode koje smo prije spominjali (u nekim *Matkama*) kao analogije, generalizacije, apstrakcije, eliminacije, preslikavanja i sl., možemo lakše razumjeti kako funkcioniraju neke druge stvari koje nas okružuju.

Kada učitelj kaže „Svi učenici u razredu meni su jednaki!" – je li to točno? Kada je točno? Je li točno u matematičkom smislu?

Hm... Mislim da i nije. Ne postoji nitko na svijetu tko je meni jednak. Identičan. Nitko tko misli kao ja i ima isti broj vlasi kose na glavi kao ja. Niti ima iste prijatelje, iste roditelje, istog brata...

Znači, ja sam jedina, jedinstvena, samo svoja!

Što je to učitelj želio reći i poručiti tom rečenicom? Što je on to mjerio? Koje je to **kategorije** proučavao? Na što se ta tvrdnja odnosila? Možda je želio reći da njemu svi učenici znače isto, da su mu podjednako dragi, da se prema svima odnosi na isti način...

Kakvog onda ima smisla proučavati te odnose – biti jednak, veći, manji, bolji, lošiji, teži, lakši, viši, niži, pametniji, snalažljiviji, sadržan u nekom skupu, gradu, selu? **Kako ih mjeriti? Koja** korist od svega toga? Što možemo iz njih naučiti?

Mogu li nam ta neka svojstva, ako ih otkrijemo, pomoći da lakše shvatimo druge skupove sačinjene od drugih elemenata i odnose među njima?

Hm... bit će da u tom grmu leži zec! Pogledajmo dvije jednadžbe:

$$2x - 10 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0$$

Imaju li one ista rješenja u skupu realnih brojeva? (Da! Provjerite! Koje?) Jesu li tada ove dvije jednadžbe jednake ili, da to malo zakompliciramo pa upotrebimo težu riječ, **ekvivalentne**? Što vi mislite? Drugu jednadžbu možemo pokušati drukčije zapisati dopuštenim postupcima pa dobivamo:

$$x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0$$

$$x^2(x - 5) + (x - 5) = 0$$

$$(x^2 + 1)(x - 5) = 0 \ / : (x^2 + 1),\ (x^2 + 1) \neq 0$$

$$x - 5 = 0$$

Znači, u skupu realnih brojeva to jesu ekvivalentne jednadžbe, ali kada bismo ih promatrali u skupu **C** (skupu kompleksnih brojeva), to više ne bi bilo tako.

Prvo što uočavamo kad nešto uspoređujemo po nekom svojstvu jest činjenica da moramo imati barem **dva člana** (broja, jednadžbe, funkcije, učenika, krumpira...) koja možemo uspoređivati. Oni čine **par** jer ih je dvoje. Krenimo od parova...

Neka su S i T neprazni skupovi: $S=\{1,2,3\}$, $T=\{a,b\}$.

Načinimo skup svih **uređenih parova** (riječ „uređen" znači da je prvi član u paru uvijek iz prvog skupa, a drugi iz drugog) skupova S i T i označimo ga s $S\times T$:

$$S\times T=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}.$$

Taj skup zovemo **Kartezijev produkt** skupova S i T.

Uočite da uređeni par (1, *a*) nije isto što i (*a*, 1), dok kod skupova vrijedi jednakost: $\{1,a\}=\{a,1\}$. Načinimo sada Kartezijev produkt skupa $A=\{1,2,3\}$:

$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

Svaki podskup Kartezijevog produkta $A \times A$ zovemo **binarna relacija** na skupu A i označavamo ga s R.

Primjer 1: $R_1=\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ jedan je podskup skupa $A \times A$, dakle, to je jedna binarna relacija. Tu relaciju možemo pokušati opisati riječima. Primjerice:

„U relaciji R_1 svi su oni uređeni parovi kod kojih je prvi član u uređenom paru jednak jedan, a drugi veći od jedan ili jednak jedan. Svi elementi (članovi, brojevi) u uređenim parovima pripadaju skupu A."

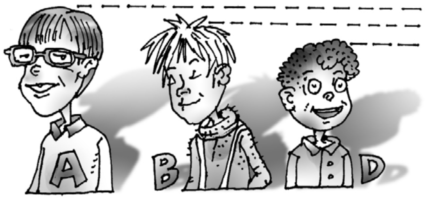
Pokušajmo definirati neka svojstva binarnih relacija:

Kažemo da je binarna relacija R **refleksivna** ako sadrži sve uređene parove oblika (x, x), pri čemu je x element skupa A. Relacija $R_1=\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ nije refleksivna jer ne sadrži **sve** uređene parove oblika (x, x), gdje je x iz A.

Kažemo da je binarna relacija R **simetrična** ako iz činjenice da je uređen par (x, y) u relaciji R slijedi i da je (y, x) također u relaciji R; x,y,z, su elementi iz A.

Relacija R_1 očito nije simetrična.

Binarna relacija R jest **tranzitivna** ako iz činjenice da su (x, y) i (y, z) u relaciji R slijedi da je i (x, z) također u relaciji R.



Relacija R_1 jest tranzitivna: $(1,1)\in R_1$ i $(1,2)\in R_1 \Rightarrow (1,2)\in R_1$. Sami provjerite drugi slučaj za uređene parove (1, 1) i (1, 3)!

Primjer 2: „Ako je Ante viši od Branka, a Branko viši od Darka, tada je Ante viši i od Darka." To je primjer jedne relacije koja jest tranzitivna.

Binarna relacija koja zadovoljava sva ova tri svojstva zove se **relacija ekvivalencije**.

Primjer 3. Promatrajmo skup učenika koji čine: Ana, Branko, Cvijeta, Darko, Ema, Franjo i Grga. Zapišimo ga jednostavnije ovako:

$$X = \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

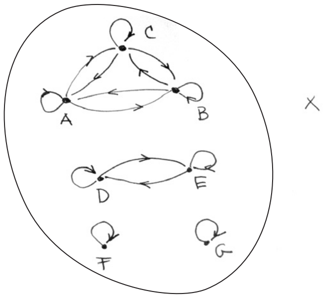
Definirajmo relaciju $\boldsymbol{R}$ u X sa: „biti rođen u istom gradu".

Neka su A, B, C rođeni u Zagrebu, D i E u Osijeku, F u Zadru, a G u Splitu. Tada zapis $A\boldsymbol{R}B$ čitamo: A i B su rođeni u istome gradu Zagrebu, dakle uređen par (A, B) član je relacije $\boldsymbol{R}$.

$A\boldsymbol{R}B$ možemo označiti i ovako: $A \rightarrow B$.

Budući da vrijedi $A\boldsymbol{R}A$, to znači da ako upotrijebimo novu oznaku, to izgleda ovako: $\overset{\curvearrowright}{A}$

Cijelu relaciju $\boldsymbol{R}$ (podskup od $X \times X$) sada grafički možemo prikazati ovako (uređeni parovi u relaciji povezani su strelicama):



Slika 2.

Iz ove skice lako uočavamo da je ovo relacija ekvivalencije te da je njome skup X podijeljen na četiri podskupa koje zovemo **klase ekvivalencije**:

$$X_1 = \{A, B, C\},\ X_2 = \{D, E\},\ X_3 = \{F\},\ X_4 = \{G\}.$$

Takvu podjelu početnog skupa na neprazne disjunktne podskupove koji u uniji daju cijeli početni skup (u ovom primjeru skup X) zovemo **particija skupa** X.

Ova razmišljanja lako možemo primijeniti i na druge objekte i situacije, primjerice:

1. U skupu svih pravaca ravnine (prostora), proučite relaciju „biti paralelan". Je li ta relacija refleksivna, simetrična, tranzitivna?
2. U skupu svih učenika jedne škole proučite relaciju: „biti u istom razredu".
3. U skupu $Z \times Z$ proučite relaciju definiranu sa: $x\boldsymbol{R}y$ ako je $(x + y)$ paran broj; x,y su brojevi iz skupa Z.

Odredite klase ekvivalencije u svim ovim primjerima.

Ako se sada vratimo na skicu s početka ovog teksta u kojoj nam oznaka $a \to b$ znači da je broj a djelitelj broja b, lako vidimo da nam u skici nedostaju neke strelice: primjerice između brojeva 2 i 30, 3 i 30 i sl. Međutim kada bismo dodali sve strelice (pridruživanja) koja nedostaju, slika bi nam postala nepregledna. Ako se prisjetimo tranzitivnosti, tada, ako slijedimo smjer strelica, lako vidimo da je 2 djelitelj od 30, 3 isto tako itd., pa koristeći očiglednu tranzitivnost koju smo prije spomenuli, možemo izbjeći suvišne strelice. Isto tako nismo ucrtali strelice oblika: $a \to a$, gdje je a iz skupa $D = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, tj. iz skupa djelitelja broja 30.

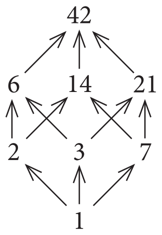
Iz grafa s početka teksta lako možemo pokupiti sve uređene parove u skupu djelitelja broja 30, definiranih sa: $a\boldsymbol{R}b$ (ili $a \to b$) ako je broj a djelitelj broja b:

$$\boldsymbol{R} = \{(1,1), (1,2), (1,3);(1,6),(1,30),(1,5),(2,2),(3,3),(3,15),(3,6),\ldots,(30,30)\}.$$

Pokušajte pronaći parove koji nedostaju. Koliko uređenih parova ima ukupno u ovako definiranoj relaciji R? Pokušajte ih sve pronaći i zapisati po nekom redu.

Isto tako možemo provjeriti je li ova relacija $\boldsymbol{R}$ definirana na skupu svih djelitelja broja 30 refleksivna, simetrična, tranzitivna. Iz početnog grafa odmah se vidi da ova relacija nije simetrična, ali je refleksivna i tranzitivna. Dakle, ovo nije relacija ekvivalencije.

Ako sada proučimo sve djelitelje broja 42, možemo li načiniti isti graf (koji pomalo podsjeća na skicu kocke) kao što je onaj na na Slici 1.?



$D = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ *Slika 3.*

Ha, izgleda da smo dobili isti graf! Što možemo odmah zaključiti o ovome grafu? Očito je da ima istu strukturu, ali i ista svojstva kao početni! Što imaju zajedničko? Možda možemo definirati neko preslikavanje s jednog skupa na drugi. Kako biste definirali to pridruživanje? Postoji li još skupova s istim svojstvima? Pokušajte ih sami konstruirati ili pronaći.