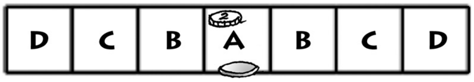
JE LI IGRA FER?

Dora Omanović, Nera Majtanić, Luka Korov, XV. gimnazija, Zagreb

Pred nama je igraća ploča[1] koja se sastoji od 7 polja označenih slovima od A do D, kao na slici, namijenjena za igru dva igrača. Igra se na sljedeći način: na početku svakog kruga žeton se nalazi u središnjem polju označenom slovom A. Jedna igra sastoji se od 10 krugova. Novčić se baca 3 puta u svakome krugu. Ukoliko na novčiću padne glava, žeton pomaknemo za jedno polje udesno, a u suprotnome ulijevo.



Ako se po završetku kruga, tj. nakon 3 bacanja, žeton nalazi na jednom od polja označenim slovom B, tada bod dobiva *Igrač 1*, a u svim preostalim slučajevima odnosno kada se žeton nađe na bilo kojem od polja označenim slovima A, C ili D, bod dobiva *Igrač 2*.

Zadatak 1. Odigrajte igru. Koji je igrač pobijedio?

Ovo je jedan tip matematičke igre. Igra je takva da je igraju dva igrača, no ishod nije ovisan o njihovim potezima, odnosno ne postoji neka pobjednička strategija. U našem slučaju, bacat će se novčić i nakon određenog broja bacanja, kombinacija ishoda odredit će na kojem je mjestu žeton završio, odnosno tko pobjeđuje.

Da bi igra bila ispravna, trebala bi biti poštena po oba igrača. Matematički rečeno, oba igrača trebala bi pobijediti s jednakom vjerojatnošću. U ovom slučaju, budući da ih je dvoje, ta vjerojatnost trebala bi iznositi $\frac{1}{2}$, odnosno 0.5.

Kako bismo mogli baratati pojmom vjerojatnosti, prvo ćemo je definirati. Vjerojatnost događaja A definiramo kao omjer broja povoljnih i broja mogućih ishoda:

$$p(A)=\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj svih mogućih ishoda}}$$

Budući da je vjerojatnost broj, nećemo ga bilježiti u obliku postotka, već će on pripadati intervalu [0, 1].

Pri bacanju novčića, moguća su dva ishoda: da padne pismo (P) ili glava (G). Kada imamo više od jednog bacanja, a svako sljedeće bacanje ne ovisi o prethodnima – kažemo da su događaji (bacanja) nezavisni.

Zadatak 2. Kao uvod u problem, otkrijte koliko je ishoda za 2, 3 i 4 bacanja novčića. Napravite poopćenje i otkrijte formulu za broj ishoda za n bacanja

[1]Članak je inspiriran igrom objavljenom na https://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=1145

novčića. Što mislite, je li igra fer? Za kojeg vam se igrača čini da ima veću vjerojatnost pobjede?

Rješenje: Za jedno bacanje novčića imamo dva ishoda: pismo (P) i glavu (G). No, spojimo li dva bacanja, otvaraju nam se dodatne mogućnosti. Nakon što bacimo novčić prvi put, ostaju nam još dvije mogućnosti za ishod drugog bacanja. S obzirom da i prvo bacanje ima dva moguća ishoda, ukupno će biti $2 \cdot 2 = 4$ ishoda: dva pisma (PP), pismo na prvom i glava na drugom (PG), glava na prvom i pismo na drugom (GP) i dvije glave (GG). Dodamo li tome još jedno bacanje, nakon prvog će nam ostati još dva bacanja za koja znamo da imaju ukupno 4 ishoda. Prema tome, ukupan broj ishoda za 3 bacanja novčića bit će dvostruko veći od broja ishoda za 2 bacanja, odnosno $2 \cdot 4 = 8$. Vidimo da će svako sljedeće dodavanje bacanja novčića udvostručiti dotadašnji broj mogućih ishoda, stoga je opća formula prema kojoj možemo izračunati ukupan broj mogućih ishoda za n bacanja novčića 2^n.

Na prvi pogled igra ne izgleda baš pošteno jer *Igrač 1* dobiva bod ako žeton završi na samo 2 od 7 polja, a *Igrač 2* na preostalih 5. To je djelomično i istina, ali samo u tome što igra nije poštena.

Zadatak 3. Da biste provjerili svoje pretpostavke, zapišite moguće ishode u 3 bacanja novčića i odredite u kojim slučajevima pobjeđuje koji igrač. Koja je vjerojatnost da pobijedi *Igrač 1*, a koja da pobijedi *Igrač 2*? Slaže li se to s prvobitnim očekivanjima?

Rješenje: Da se radi o nepoštenoj igri možemo jednostavno pokazati raspišemo li sve moguće kombinacije pomaka kojih, na sreću, nema mnogo ($2^3 = 8$). Slovo L označava da je na novčiću palo pismo i da se žeton pomaknuo ulijevo, a slovo R označava da je na novčiću pala glava i da se žeton pomaknuo udesno.

rezultati bacanja jednog kruga	konačno polje
LLL	D
LLR	B
LRL	B
LRR	B
RRR	D
RRL	B
RLR	B
RLL	B

Iz priložene tablice (desno) zdesna možemo vidjeti da ni u jednom slučaju polja A i C nisu konačna polja. Ono što također možemo vidjeti jest da, iako nam preostaje jednaki broj polja koja su pobjedonosna za pojedinog igrača, na polja označena slovom B možemo doći na šest načina, dok za polja označena slovom D postoje samo dvije takve kombinacije.

Iz toga možemo jednostavno izračunati vjerojatnost za pobjedu pojedinog igrača.

$$p(\mathrm{Igr1}) = \frac{6}{8} = 0.75\ ,\ p(\mathrm{Igr2}) = \frac{2}{8} = 0.25$$

Zadatak 4. Kako biste popravili igru, tj. preuredili pravila tako da igra postane fer? Smislite barem dvije poštene varijante!

Rješenje: Kako bismo popravili igru da oba igrača imaju jednaku vjerojatnost konačne pobjede, možemo napraviti nekoliko različitih stvari. Neke od njih su:

a) *Igrač 1* osvaja bod kada se žeton nakon 3 bacanja nađe na polju označenom slovom B, pod uvjetom da se konačno polje nalazi na istoj strani od početnog polja kao što se nalazilo i polje na koje smo žeton pomaknuli prilikom prvog bacanja. Jednostavnije, *Igrač 1* dobiva bod kada žeton završi na polju B te nije promijenio stranu u odnosu na početno polje A. Prema tome,

Igrač 2 dobiva bodove u svim ostalim slučajevima, tj. kada žeton završi na polju D ili kada prilikom dolaska na polje B promijeni stranu u odnosu na polje A. Tada tablicom možemo prikazati sve kombinacije kojima pojedini igrač može osvojiti bod.

rezultati bacanja jednog kruga	pobjednik za jedan krug
LLL	2
LLR	1
LRL	1
LRR	2
RRR	2
RRL	1
RLR	1
RLL	2

b) *Igrač 1* osvaja bod kada žeton završi s lijeve strane početnog polja, a *Igrač 2* kada žeton završi s desne strane početnog polja.

c) Nema promjene kombinacija za koje igrači dobivaju bodove, samo *Igraču 2* umjesto jednog boda dodajemo tri kada žeton završi na polju D.

Zadatak 5. Što mislite, hoće li se dodavanjem jednog bacanja i po jednog polja sa svake strane povećati vjerojatnost pobjede nekom igraču? Ako da, kojemu? Dakle, dodajte sa svake strane polje E i bacajte novčić 4 puta u svakom krugu. Recimo da *Igrač 1* pobjeđuje ako žeton dođe na polja B ili E, a *Igrač 2* ako žeton dođe na polja A, C ili D. Odigrajte igru i provjerite što se događa. Tko je pobijedio?

Na kojim poljima žeton nikada neće završiti? Odredite na koliko se načina može doći na ostala polja. Koliko se puta mora otići desno (R), a koliko lijevo (L) za određeno polje?

E	**D**	**C**	**B**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**

Možete li poopćiti na koja je polja moguće doći, a na koja nije za ukupno n polja sa svake strane (gledajući od središnjeg) i n bacanja?

Rješenje: Dodamo li, kao na slici u zadatku, sa svake strane po još jedno polje označeno slovom E, i još jedno bacanje novčića, uz uvjet da bod dobiva *Igrač 1* kada žeton završi na polju E, vjerojatnost pobjede za igrače se mijenja.

Iako je vjerojatnost da će nam se na prvi pogled činiti da smo ovime samo povećali vjerojatnost za pobjedu *Igrača 1*, to se, zbog promjene broja bacanja novčića, ne događa. Kao i u prvom slučaju, postoje polja na kojima uopće nije moguće doći s određenim brojem koraka. Tako ovdje, zbog parnog broja koraka, nije moguće doći na polja koja su od početnog udaljena za neparan broj polja. Time iz igre izbacujemo polja B i D. Preostaju nam još polja A, C i E od kojih je E polje koje *Igraču 1* donosi bod, a polja A i C donose bodove *Igraču 2*. Raspišemo li sve kombinacije mogućih ishoda bacanja novčića odnosno pomicanja žetona, jasno nam je da je sada *Igrač 2* u prednosti.

rezultati bacanja jednog kruga	pobjednik za jedan krug
LLLL	1
LLLR	2
LLRL	2
LLRR	2
LRLL	2
LRLR	2
LRRL	2
LRRR	2
RLLL	2
RLLR	2
RLRL	2
RLRR	2
RRLL	2
RRLR	2
RRRL	2
RRRR	1

Iz priložene tablice vidimo da je ovdje situacija prilično drugačija nego prije. Svega dvije od ukupno $2^4 = 16$ kombinacija idu u korist *Igraču 1*, dok preostalih 14 donosi bod *Igraču 2*.

Vjerojatnosti, iako sada već očite, koje iz tog slijede su:

$$p(\text{Igr1}) = \frac{2}{16} = 0.125\,,\ \ p(\text{Igr2}) = \frac{14}{16} = 0.875$$

Zadatak 6. Izmislite inačicu igre koja se igra prema istom principu (pomicanje žetona ovisno o padanju novčića) – igra može biti i kružna ili nešto treće. Pravila zadajte tako da igra bude fer.