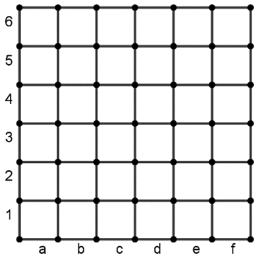
Matka 27 (2018./2019.) br. 107

TROMINO PLOČICE I 6 × 6 PLOČA – DRUGA IGRA

Maja Starčević, Zagreb

Eva i Petar rješavaju tri zadatka s postavljanjem tromino pločica druge vrste (Slika 1.) na 6 × 6 ploču (Slika 2.). Svaku pločicu postavljaju tako da u potpunosti pokriva tri polja ploče, a dvije pločice ne smiju se preklapati. Pritom ne zakreću ploču, odnosno gledaju ploču samo iz jednog smjera. Iste zadatke već su riješili s tromino pločicama prve vrste (Slika 3.) tako da će na kraju moći usporediti rezultate.

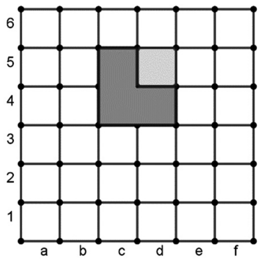
Slika 1.



Slika 2.

Slika 3.

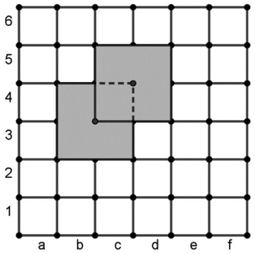
– Možemo se opet pitati na koliko načina možemo postaviti jedan tromino na ploču – započne Eva. – Ako postavimo jedan tromino, možemo zamisliti da smo dodali i jedan kvadrat koji mu „nedostaje", odnosno da smo na ploču postavili kvadrat 2 × 2 (Slika 4.). Dakle, svaki tromino na ploči nalazi se unutar nekog kvadrata koji se sastoji od četiri polja ploče.



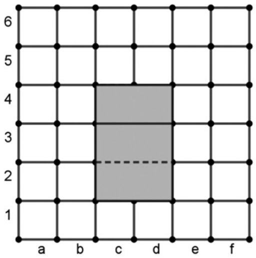
Slika 4.

– Može li se dogoditi da jedan tromino pripada različitim kvadratima 2 × 2?

– Ne, jer se ti kvadrati onda sijeku u barem tri polja, a to je nemoguće. Takva dva kvadrata mogu se sijeći samo u jednome ili dva polja (Slike 5. i 6.).



Slika 5.

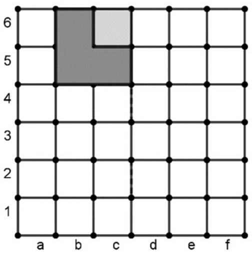


Slika 6.

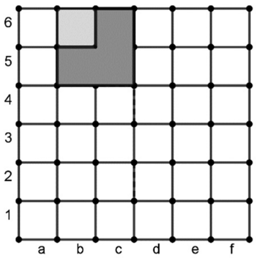
– Znači, jedan tromino možemo postaviti na onoliko načina koliko ima kvadrata 2 × 2 na ploči?

– Ne baš. U svaki 2 × 2 kvadrat na ploči možemo postaviti tromino, ali ne na samo jedan način. Svaki kvadrat nam, naime, daje četiri različite pozicije za tromino pločicu (Slike 7. – 10.).

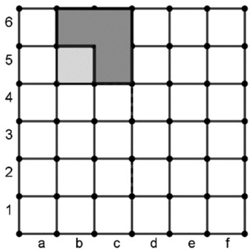
MATKA 107.indd 166 10.2.2019. 16:58:53



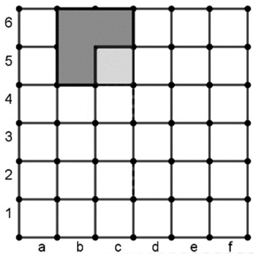
Slika 7.



Slika 8.



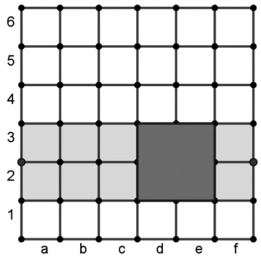
Slika 9.



Slika 10.

– Znači, nađemo broj takvih kvadrata dimenzija 2 × 2 i pomnožimo ga s 4 – zaključi Petar. – Koliko imamo takvih kvadrata?

– Pa ono što prvo mogu zaključiti jest da je svaki takav kvadrat uvijek sadržan u dva susjedna retka ploče (Slika 11.).



Slika 11.

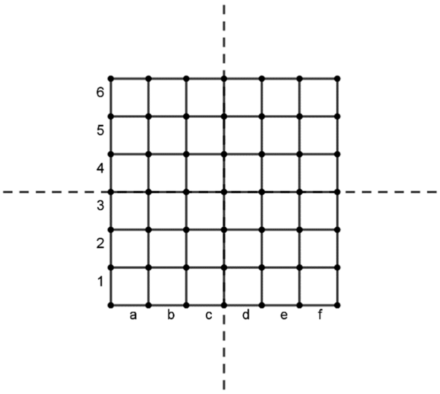
– Koliko imamo parova susjednih redaka?

– Imamo ih očito 5.

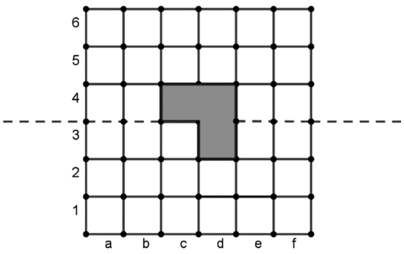
– A u svakom paru susjednih redaka uočavamo 5 kvadrata 2 × 2.

– Dakle, imamo 5 · 5 = 25 kvadrata. Množimo taj broj s 4 kako smo se dogovorili i zaključujemo da tromino pločicu možemo postaviti na ukupno 100 načina.

– Idemo riješiti drugi zadatak – predloži Petar. – Sad ćemo pokušati popločiti cijelu ploču tako da dobiveno popločivanje bude simetrično s obzirom na vodoravnu i okomitu os koje prolaze polovištima nasuprotnih stranica naše ploče (Slika 12.).



Slika 12.

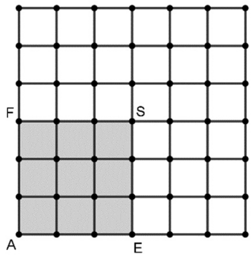


Slika 13.

– Ali onda, ako je pločica s obje strane neke od osi simetrija, na jednoj je strani jedan kvadrat pločice, a na drugoj su dva (Slika 13.). To je zbog uvjeta simetrije nemoguće.

MATKA 107.indd 167 10.2.2019. 16:58:53

– Točno. To znači da ćemo morati potpuno popločiti npr. donji lijevi 3 × 3 kvadrat naše ploče, odnosno kvadrat *AESF* (Slika 14.), tako da mu sve pločice u potpunosti pripadaju, i dobiveno popločivanje preslikati s obzirom na zadane osi simetrije.

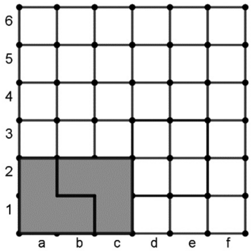


Slika 14.

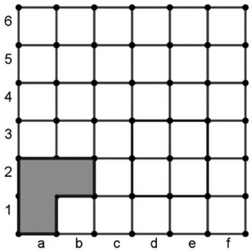
– Krenimo s donjim lijevim kutom ploče, odnosno poljem *a*1. To polje možemo popločiti na tri načina. Ako ga popločim pločicom *a*1 – *b*1 – *a*2, moram nakon toga svakako staviti pločicu *b*2 – *c*1 – *c*2 da bih prekrila polje *c*1 (Slika 15.) i očito je da ne mogu dalje popločivati jer će mi pločice inače izaći iz kvadrata *AESF*. Mogu krenuti i s pločicom *a*1 – *a*2 – *b*2, ali tada ne mogu nikako prekriti polje *a*3 (Slika 16.). Zadnja opcija mi je da stavim pločicu *a*1 – *b*1 – *b*2, ali nakon toga ne mogu postaviti pločicu tako da prekrije polje *c*1 (Slika 17.).

– Želiš reći da zadano popločivanje uopće ne postoji.

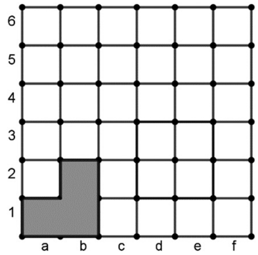
– Da, ovaj zadatak nema nijedno rješenje – potvrdi Eva.



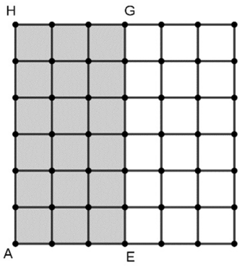
Slika 15.



Slika 16.



Slika 17.



Slika 18.

– Maknimo onda jedan uvjet. Tražimo broj popločivanja koja su simetrična s obzirom na okomitu os simetrije. Dakle, rješavamo treći zadatak.

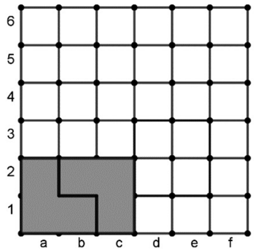
– Slično kao i u prethodnom zadatku, mogu zaključiti da treba popločiti pravokutnik *AEGH* dimenzija 3 × 6 (Slika 18.) pločicama koje mu u potpunosti pripadaju i onda samo zrcalimo to popločivanje na preostali pravokutnik. Pločice dakle ne mogu prelaziti iz jednog pravokutnika u drugi.

Petar je iznio svoju ideju:

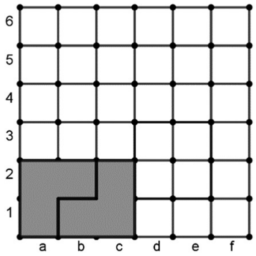
– Opet možemo promatrati na koje sve načine možemo popločiti polje *a*1. Razmišljam na isti način kao i u prethodnom zadatku. Ako stavim pločicu *a*1 – *b*1 – *a*2, moram svakako staviti pločicu *b*2 – *c*1 – *c*2 jer je to jedini način da prekrijem polje *c*1 (Slika 19.). Ako polje *a*1 prekrijem pločicom *a*1 – *a*2 – *b*2, nakon toga moram staviti pločicu *b*1 – *c*1 – *c*2 kako bih prekrio polje *b*1 (Slika 20.).

MATKA 107.indd 168 10.2.2019. 16:58:53

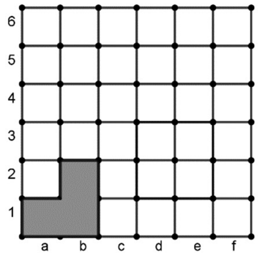
U zadnjem slučaju stavim pločicu $a1 - b1 - b2$ i nakon toga ne mogu dalje popločivati jer ne mogu nikako prekriti polje $c1$ (Slika 21.) da mi pločica ne izađe iz pravokutnika *AEGH*. I što dalje?



Slika 19.

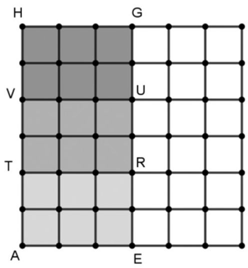


Slika 20.



Slika 21.

– Zapravo si našao ukupno dva načina na koja možeš popločiti pravokutnik *AERT* dimenzija 3×2 (Slika 22.). Dakle, kod popločivanja koja tražimo svaka pločica koja pokriva dio pravokutnika *AERT* u potpunosti mu pripada. Sada ponovimo tu priču za preostali pravokutnik *TRGH* i njegovo donje lijevo polje. Istim zaključivanjem nalazimo dva načina za popločiti pravokutnik *TRUV*. I njemu svaka njegova pločica u potpunosti pripada. Na kraju nam preostaje pravokutnik *VUGH* za koji vidimo na analogan način da se može popločiti na dva načina.



Slika 22.

– Znači, u svakom od ta tri pravokutnika treba odabrati jedan od dva načina postavljanja tromino pločica. Postavljanje u jednome od pravokutnika ne utječe na postavljanje u ostalim pravokutnicima. Dakle, uzastopnim prebrojavanjem zaključujemo da postavljanja ima ukupno $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

– Usporedimo za kraj rezultate koje smo dobili za različite vrste tromina. Kod prve vrste tromina imali smo 48 načina da postavimo jednu pločicu na ploču, dok kod druge vrste tromina imamo 100 načina, odnosno približno dvostruko više načina. I u zadatku s jednom osi simetrije dobili smo veći rezultat za tromino druge vrste, ali razlika nije toliko velika jer ako postavljamo pločice prve vrste, imamo 6 načina, dok za pločice druge vrste imamo 8 načina postavljanja. U zadatku s dvije osi simetrije dobili smo dva rješenja za prvu vrstu tromina, dok za drugu vrstu tromina uopće ne možemo naći traženo popločivanje. Prema tome, iako se pločice prve i druge vrste sastoje od istog broja kvadrata, odnosno imaju jednaku površinu, njihov oblik utječe na broj rješenja zadataka – zaključi Eva.

MATKA 107.indd 169 10.2.2019. 16:58:53