RAZNI NAČINI DOKAZIVANJA TEOREMA IZ GEOMETRIJE

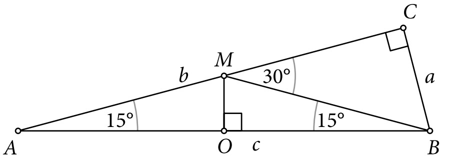
Šefket Arslanagić, Sarajevo

U ovom ćemo članku dokazati dva teorema iz geometrije vezana uz pravokutni trokut i trapez, i pri tome demonstrirati više raznih zanimljivih dokaza ovih teorema. Pri rješavanju jednoga istog zadatka ili pak dokazivanjem nekog teorema na različite načine, može se uspoređivanjem tih rješenja ili dokaza utvrditi koje je od njih kraće, efektnije i elegantnije, a time se stječe i izgrađuje vještina u rješavanju zadataka ili dokazivanju tvrdnji.

Dat ćemo po pet različitih dokaza sljedećih dvaju teorema:

Teorem 1. U pravokutnom trokutu sa šiljastim kutom veličine 15° polumjer opisane kružnice *R* geometrijska je sredina duljina kateta *a* i *b*, tj. $R=\sqrt{ab}$.

Dokaz 1. Neka je trokut ΔABC pravokutan, s pravim kutom u vrhu *C*, neka je $\alpha=15^\circ$ i neka je točka *O* polovište stranice (hipotenuze) $\overline{AB}$, Slika 1.



Slika 1.

Nacrtamo dužinu $\overline{BM}$ tako da je $|\angle ABM|=15^\circ$, pri čemu točka *M* pripada kateti $\overline{AC}$. Zbog toga je trokut ΔABM jednakokračni te je $\overline{MO}\perp\overline{AB}$. No, tada su trokuti ΔBMO i ΔABC slični, pa je $|BO|:|BM|=|AC|:|AB|$. Iz pravokutnog trokuta ΔMBC slijedi da je $|BM|=2a$ (polovina jednakostraničnog trokuta). Imajući u vidu da je $|AB|=2R$ i $|BO|=R$, iz prethodnog razmjera dobivamo:

$$R:2a=b:2R,$$

a odavde

$$R^2=ab\text{, tj. } R=\sqrt{ab},$$

što je trebalo dokazati.

Dokaz 2. Konstruirajmo dužinu $\overline{BM}$ kao u prethodnom dokazu. Budući da je $|BM|=2a$ i $|BC|=a$, na osnovi Pitagorinog poučka iz trokuta ΔCBM dobivamo:

$$|MC|^2=|BM|^2-|BC|^2\text{, tj,}$$

$$|MC|=\sqrt{4a^2-a^2}=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}.$$

Izrazimo duljinu katete $|AC|=b$ pomoću *a*:

$$b=|AC|=|AM|+|MC|=|BM|+|MC|\text{, tj.}$$

$$b=2a+a\sqrt{3}=a\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Sada primijenimo Pitagorin poučak na trokut ΔABC:

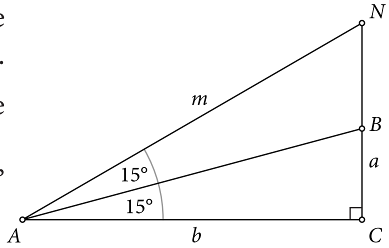
$$2R = c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2\left(2+\sqrt{3}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{a^2\left(1+4+4\sqrt{3}+3\right)} = 2\sqrt{a\cdot a\left(2+\sqrt{3}\right)} = 2\sqrt{ab}\,,$$

a odavde $R = \sqrt{ab}$, što je trebalo dokazati.

Dokaz 3. Nad stranicom $\overline{AB}$ trokuta ΔABC s vanjske strane toga trokuta konstruirajmo kut $\left|\angle BAN\right| = 15°$, (Slika 2.).

Trokut ΔACN je polovica jednakostraničnog trokuta pa je zato $|AN| = m$, $|CN| = \frac{1}{2}m$ i $|AC| = \frac{\sqrt{3}}{2}m$. Kako je $|AC| = b$, imamo:

$$|AN| = \frac{2}{\sqrt{3}}b \text{ i } |CN| = \frac{1}{\sqrt{3}}b\,.$$



Slika 2.

Budući da je AB simetrala kuta $\angle CAN$ i $|BC| = a$, iz teorema o simetrali unutarnjeg kuta trokuta ΔACN slijedi:

$$|BN| : |BC| = |AN| : |AC|\text{, tj.}$$
$$|BN| : a = \frac{2}{\sqrt{3}}b : b\,,$$

a odavde dobivamo jednakost:

$$|BN| = \frac{2}{\sqrt{3}}a\,.$$

Iz jednakosti $|BN| + |BC| = |CN|$ dobivamo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}a + a = \frac{1}{\sqrt{3}}b\text{, tj.}$$
$$b = a\left(2+\sqrt{3}\right).$$

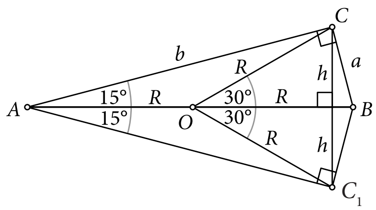
Dalje, kao u Dokazu 2. nalazimo da je $R = \sqrt{ab}$.

Dokaz 4. Neka je točka C_1 simetrična točki C u odnosu na pravac AB, a točka O je polovište hipotenuze $\overline{AB}$ (Slika 3.). Tada je četverokut $ACBC_1$ tetivni (zašto?), pa za njega vrijedi Ptolemejev teorem, tj. produkt dijagonala jednak je zbroju produkata suprotnih stranica. Znači, imamo:

$$|AB|\cdot|CC_1| = |AC|\cdot|BC_1| + |BC|\cdot|AC_1|\,. \qquad (1)$$

Imajući u vidu da su trokuti ΔABC i ΔABC_1 sukladni i stavljajući da je $|AB| = 2R$, $|CC_1| = 2h$ (h je visina trokuta ΔABC), $|AC| = |AC_1| = b$ i $|BC| = |BC_1| = a$, dobivamo iz (1):

$$2R\cdot 2h = ba + ab\text{, tj.}\quad 2Rh = ab\,. \qquad (2)$$



Slika 3.

Budući da je trokut ΔOCC_1 jednakostraničan, tj. $2h = R$, iz (2) slijedi:

$$2R \cdot \frac{R}{2} = ab \text{, tj. } R = \sqrt{ab}\,,$$

što je trebalo dokazati.

Dokaz 5. Budući da je $h = \frac{1}{2}R$, iz $p = \frac{1}{2}ab$ i $p = \frac{1}{2}|AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2Rh = Rh$ dobivamo:

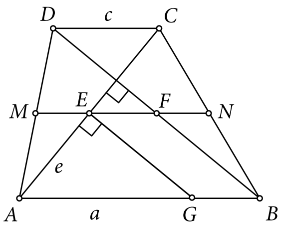
$$\frac{1}{2}ab = Rh \text{, tj. } \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}R^2\,,$$

a odavde

$$R = \sqrt{ab}\,,$$

što je trebalo dokazati.

Teorem 2. Ako se dijagonale trapeza sijeku pod pravim kutom, tada je zbroj kvadrata duljina tih dijagonala jednak kvadratu zbroja duljina osnovica (paralelnih stranica) trapeza.



Slika 4.

Dokaz 1. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ osnovice, a $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ dijagonale trapeza $ABCD$, i pri tome je $|AB| = a$, $|CD| = c$, $|AC| = e$ i $|BD| = f$. Točke M i N su polovišta krakova $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, a presječne točke pravca MN s dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ su E i F (Slika 4.).

Kako su dužine $\overline{ME}$ i $\overline{FN}$ redom srednjice trokuta ΔACD i ΔBCD, to vrijedi $|ME| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}c$ i $|FN| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}c$. Tada zbog $|MN| = \frac{a+c}{2}$ dobivamo:

$$|EF| = |MN| - \left(|ME| + |FN|\right) = \frac{a+c}{2} - c = \frac{a-c}{2}.$$

Konstruirajmo dužinu $\overline{EG} \parallel \overline{BD}$, gdje je $G \in \overline{AB}$. Četverokut $BFEG$ je paralelogram pa je $|EG| = |BF|$. S obzirom da dužina $\overline{MN}$ raspolavlja dijagonale trapeza, imamo da je $|AE| = \frac{1}{2}e$ i $|BF| = \frac{1}{2}f$. Također je $|GB| = |EF| = \frac{a-c}{2}$.

Sada imamo

$$|AG| = |AB| - |GB| = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2}.$$

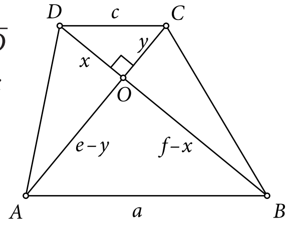
Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut ΔAEG dobivamo:

$$|AE|^2 + |GE|^2 = |AG|^2 \text{, tj.}$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2,$$

odnosno

$$e^2+f^2=(a+c)^2\text{, što je trebalo dokazati.}$$



Slika 5.

Dokaz 2. Neka je točka O presječna točka dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ trapeza $ABCD$, te $|OD|=x$ i $|OC|=y$, tj. $|AO|=e-y$ i $|BO|=f-x$ (Slika 5.).

Iz sličnosti trokuta ΔABO i ΔCDO dobivamo da je:

$$|AO|:|OC|=|BO|:|OD|=|AB|:|CD|\text{, tj.}$$
$$(e-y):y=(f-x):x=a:c\,,$$

a odavde

$$(a+c)\cdot y=c\cdot e \tag{1}$$

i

$$(a+c)\cdot x=c\cdot f\,. \tag{2}$$

Jednakosti (1) i (2) kvadriramo i zbrojimo, pa dobivamo:

$$(a+c)^2\left(x^2+y^2\right)=c^2\left(e^2+f^2\right). \tag{3}$$

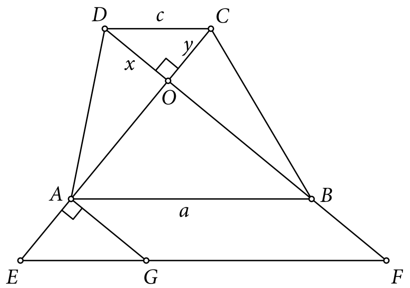
Za pravokutni trokut ΔCDO vrijedi Pitagorin poučak pa je:

$$x^2+y^2=c^2\,. \tag{4}$$

Sada iz (3) i (4) slijedi:

$$e^2+f^2=(a+c)^2\text{, što je trebalo dokazati.}$$

Dokaz 3. Dijagonalu $\overline{CA}$ produžimo preko vrha A do točke E tako da je $|AE|=|CO|$, a dijagonalu $\overline{DB}$ produžimo preko vrha B do točke F tako da je $|BF|=|DO|$, gdje je O presječna točka dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ (Slika 6.).



Slika 6.

Nacrtamo dužinu $\overline{AG}\ ||\ \overline{BF}$, gdje je $G\in\overline{EF}$. Četverokut $ABFG$ je paralelogram, pa je $|FG|=|AB|=a$. Trokuti ΔAEG i ΔOCD su sukladni jer je po konstrukciji $|AE|=|OC|$, $|\angle EAG|=|\angle COD|=90^\circ$ i $|\angle AEG|=|\angle OCD|$ kao šiljasti kutovi s

Matka 27 (2018./2019.) br. 108

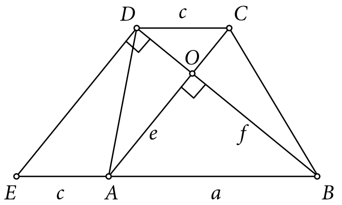
paralelnim kracima), pa je $|EG|=|CD|=c$. Tada je $|EF|=|EG|+|GF|=a+c$. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut ΔEFO dobivamo:

$$|EO|^2+|FO|^2=|EF|^2, \text{ tj.}$$
$$|AC|^2+|BD|^2=|EF|^2,$$

odnosno

$$e^2+f^2=(a+c)^2, \text{ što je trebalo dokazati.}$$

Dokaz 4. Konstruirajmo paralelu $\overline{DE}$ dijagonali $\overline{AC}$, tj. $DE \parallel AC$, gdje točka E pripada pravcu AB (Slika 7.).

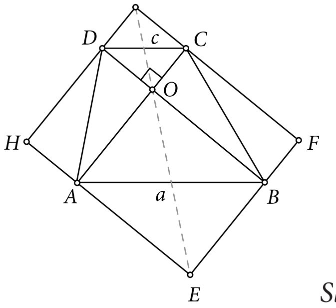


Slika 7.

Zbog $|AE|=|CD|=c$ imamo da je $|BE|=|BA|+|AE|=a+c$. Također, zbog $DE \parallel AC$ je $|\angle EDB| = |\angle AOB| = 90^\circ$ pa je trokut ΔBDE pravokutni i zato je zbog $|ED|=|AC|=e$:

$$|ED|^2+|BD|^2=|EB|^2, \text{ tj.}$$
$$e^2+f^2=(a+c)^2, \text{ što je trebalo dokazati.}$$

Dokaz 5. Pravokutne trokute ΔABO, ΔBCO, ΔCDO i ΔADO dopunimo do pravokutnika $AEBO$, $BFCD$, $CGDO$ i $DHAO$ kao što je prikazano na Slici 8. Tako dobivamo veliki pravokutnik $HEFG$. Njegove su stranice jednake dijagonalama trapeza, tj. $|EF|=|HG|=|AC|=e$ i $|FG|=|HE|=|BD|=f$.



Slika 8.

Duljina dijagonale tog pravokutnika je $|GE| = |GO| + |OE| = |DC| + |AB| = a + c$. Na osnovi Pitagorinog poučka primijenjenog na pravokutni trokut ΔGHE, dobivamo:

$$|HG|^2+|HE|^2=|GE|^2, \text{ tj.}$$

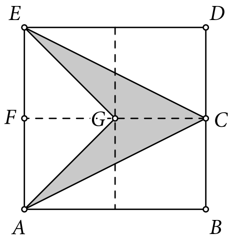
$$|AC|^2+|BD|^2=|GE|^2,$$

odnosno

$$e^2+f^2=(a+c)^2, \text{ što je trebalo dokazati.}$$

Budućim čitateljima ovoga članka preporučamo da na više raznih načina pokušaju riješiti sljedeće zadatke:

1. Iz proizvoljne točke M stranice $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta ΔABC nacrtane su redom okomice MP i MQ na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Dokažite:
$$|MP|+|MQ|=|AD|,$$
gdje točka D predstavlja nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$.
2. Izračunajte površinu osjenčanog lika na Slici 9. ako je duljina dijagonale kvadrata $ABDE$ jednaka $4\sqrt{2}$ cm.
3. Točke M i N su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$. Dužine $\overline{CM}$ i $\overline{DN}$ sijeku se u točki P. Dokažite da je $|AP|=|AD|$.
4. Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ kvadrata $ABCD$ dane su točke K, L, M i N, tako da je $|AK|=\frac{2}{3}|AB|$, $|BL|=\frac{2}{3}|BC|$, $|CM|=\frac{2}{3}|CD|$ i $|DN|=\frac{2}{3}|DA|$. Dokažite da je površina četverokuta određenog pravcima AL, BM, CN i DK jednaka $\frac{1}{13}$ površine kvadrata $ABCD$.
5. Neka su točke A', B' i C' projekcije točke M koja se nalazi u unutrašnjosti jednakostraničnog trokuta ΔABC, redom na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta. Dokažite da je zbroj $|AC'|+|BA'|+|CB'|$ konstantan.



Slika 9.

Napomena: Svi navedeni zadatci mogu se riješiti na barem pet načina.

Literatura

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Arslanagić, Š., *Matodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
3. Arslanagić, Š., Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematike učenika osnovnih škola u Federaciji Bosne i Hercegovine (1996. – 2008.), Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
4. Tošić, R. i V. Petrović, *Zbirka zadataka iz osnova geometreije*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Institut za matematiku, Novi Sad, 1990.