Druga kći, Monty Hall i dvije omotnice – zbunjujuće vjerojatnosti

Zvonimir Šikić[1]

I. Problem druge kćeri

Ovaj stari problem iz vjerojatnosti (ne toliko slavan kao sljedeća dva) dan-danas mnoge zbunjuje.

1. PROBLEM
Majka ima dvoje djece i bar jedno je kći.
Kolika je vjerojatnost da je i drugo dijete kći?

Automatski odgovor većine (uključujući i matematičare) je 1/2.

Nakon malo razmišljanja, većina matematičara ipak će zaključiti da je tražena vjerojatnost 1/3. Naime, četiri jednako vjerojatne mogućnosti za dvoje djece su:

	Prvo dijete	**Drugo dijete**
1.	Kći	Kći
2.	Kći	Sin
3.	Sin	Kći
4.	Sin	Sin

Budući da je 4. mogućnost isključena (jer majka ima bar jednu kćer), šanse za obje kćeri su 1:2, tj. tražena je vjerojatnost 1/3.

No, to nije sve. Obično slijedi ovaj problem.

2. PROBLEM
Majka ima dvoje djece i prvo je kći.
Kolika je vjerojatnost da je i drugo dijete kći?

Sada su svi (uključujući i matematičare) oprezni. Možda je i to 1/3, ili je sad ipak 1/2?

[1]Zvonimir Šikić, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

Pogledamo li opet tablicu svih mogućnosti za dvoje djece, vidimo da su sada isključene 3. i 4. mogućnost (jer je prvo dijete kći). Dakle, šanse za obje kćeri sada su 1 : 1, tj. tražena je vjerojatnost 1/2.

Mnoge, bez obzira na ovu korektnu matematičku argumentaciju, i dalje zbunjuje razlika u odgovorima na prvi i drugi problem.

Zašto se informacija da je bar jedno dijete kći toliko razlikuje od one da je prvo dijete kći?

Zašto ta razlika implicira promjene odgovarajućih vjerojatnosti?

Prije nego objasnimo tu zbunjenost, pogledajmo još jednu formulaciju tih istih problema:

1a. PROBLEM
Majka ima dvoje djece, Vanju i Sašu.
Ako je jedno dijete djevojčica, kolika je vjerojatnost da je i drugo djevojčica?

2a. PROBLEM
Majka ima dvoje djece, Vanju i Sašu.
Ako je Vanja djevojčica, kolika je vjerojatnost da je i Saša djevojčica?

„Jedno" u prvom pitanju treba shvatiti kao „bar jedno". To je matematički standard koji je u opreci s uobičajenim razumijevanjem. (Uobičajeno „jedno" znači ono što za matematičare znači „točno jedno". Za nematematičare je „točno" nepotreban dodatak.)

Odgovarajuća tablica mogućih slučajeva sada izgleda ovako:

	Vanja	**Saša**
1.	Kći	Kći
2.	Kći	Sin
3.	Sin	Kći
4.	Sin	Sin

I odgovori su isti. Prvo pitanje isključuje 4. mogućnost (jer je bar jedno dijete djevojčica) pa je tražena vjerojatnost 1/3.

Drugo pitanje isključuje 3. i 4. mogućnost (jer je Vanja djevojčica) pa je tražena vjerojatnost 1/2.

Ova formulacija, bez obzira na korektnu matematičku argumentaciju, mnoge još više zbunjuje.

Po čemu je informacija o „jednom i drugom" različita od informacije o „Vanji i Saši"? Zašto ta razlika implicira promjene odgovarajućih vjerojatnosti? Zar nije potpuno nebitno kako se djeca zovu?

Problem je kako razumijemo „jedno".

Već smo rekli da „jedno" može značiti bar jedno, ali i točno jedno. No, može značiti i određeno jedno. Kada majku vidim s jednom njezinom kćeri, to je potpuno određena djevojčica (ta koju upravo vidim). S druge strane, kada kažem da majka ima jednu kćer, nisam time potpuno odredio tu djevojčicu.

Ako je djevojčica točno jedna, onda je drugo dijete sigurno dječak (tj. vjerojatnost da je drugo dijete kći je 0).

Ako je djevojčica određena jedna (npr. ova koju vidim ili ona koja je starija ili ona koja se zove Vanja itd.), onda je vjerojatnost da je drugo dijete kći 1/2.

Ako je djevojčica bar jedna (dakle, ne znam je li ova ili ona od majčina dva djeteta), onda je vjerojatnost da je drugo dijete kći 1/3 (naravno, ni za to drugo dijete ne znam je li ovo ili ono).

Da se stvarno radi o tome na koje značenje termina „jedno" mislimo, pokazuje i sljedeći rezultat psihološkog eksperimenta koji je više puta repliciran:

Kada ljudima postavite pitanje „*Ako majka ima dvoje djece i bar jedno od to dvoje je kći, kolika je vjerojatnost da je i drugo kći?*", njih 85 % pogrešno odgovara da je to 1/2.

Ako im postavite zapravo isto pitanje „*Ako majka ima dvoje djece i to nisu dva sina, kolika je vjerojatnost da su obje* kćer*i?*", postotak pogrešnih odgovora pada na 39 %.

Mislim da je razlog jednostavno taj što se u drugoj formulaciji ne pojavljuje višeznačni termin „jedno".

Osim toga, automatski prvi odgovor 1/2 postaje jasniji ako razmislite koje su moguće interpretacije uvjeta:

Bar jedno dijete majke s dvoje djece je kći.

Ako anketirate majke koje imaju bar jednu kćer i jedna vam kaže da ima dvoje djece, onda je vjerojatnost da joj je i drugo dijete kći 1/3.

Međutim, ako ste majku sreli s tom kćeri i ona vam je rekla da ima još jedno dijete, onda je vjerojatnost da je drugo dijete kći zaista 1/2.

Druga je situacija prirodnija (i to objašnjava automatski odgovor 1/2). No, u tom slučaju koristite više informacija nego je zadano. Naime, koristite se informacijom da je ta „bar jedna kći" upravo određena djevojčica koju vidite s majkom. To u problemu nije zadano (iako je prirodnije) i zato je točan odgovor 1/3, a ne 1/2.

(Takvo automatsko podrazumijevanje informacija koje zapravo nemamo često je. Ono je posebno uobičajeno u situacijama u kojima uz zadane informacije problem ne možemo riješiti. Kako biste, na primjer, riješili sljedeći problem?

3. PROBLEM
Bacam dvije kovanice – medu (5 kuna) i slavuja (1 kunu).
Vi ne vidite rezultat bacanja, ali ja vas informiram da je medo pao na glavu.
Kolika je vjerojatnost da je i slavuj pao na glavu?

Vjerojatno ćete odgovoriti 1/2, pretpostavljajući da je moja informacija o medi ekvivalentna vašem viđenju mede. Pod tom pretpostavkom to je točan odgovor. No ta pretpostavka ne slijedi čak ni iz prešutne pretpostavke da vas ja istinito informiram.

Možda postupam na sljedeći način. Ako je točno jedna kovanica pala na glavu, kažem vam koja je to kovanica. Ako su obje pale na glavu, slučajno odaberem jednu i kažem vam da je ona pala na glavu. Ako nijedna nije pala na glavu, kažem vam upravo to. U tom slučaju, ako vas istinito informiram, točan je odgovor 1/3.

Naime, vjerojatnost da je slavuj pao na glavu pod uvjetom da je medo pao na glavu jednaka je vjerojatnosti da je slavuj pao na glavu (jer to kako je pao medo ne utječe na određenje vjerojatnosti slavujeva pada na glavu). Formalno, $P(Sg \mid Mg) = P(Sg) = ½$.

S druge strane, vjerojatnost da je slavuj pao na glavu pod uvjetom da ste informirani da je medo pao na glavu nije jednaka vjerojatnosti da je slavuj pao na glavu (jer način na koji ste informirani o tome da je medo pao na glavu utječe na određivanje vjerojatnost slavujeva pada na glavu). Formalno,

$$P(Sg \mid I_{Mg}) = P(Sg \;\&\; I_{Mg}) \,/\, P(I_{Mg}) = ½\, P(Mg \;\&\; Sg) \,/(P(Mg \;\&\; Sp) + ½\, P(Mg \;\&\; Sg)) = \\ = (1/8)/(1/4 + 1/8) = 1/3.$$

Bayesovci će razumjeti da se tu radi o tome da vjerojatnosti nisu svojstva stvarnosti nego su mjere naših znanja o stvarnosti; no to je nova velika tema, usp. (Š).)

Prije nego se još dublje uputim u problem „određenog i neodređenog jednog", ukazat ću na još jedan način rješavanja gornjih problema, koji je mnogima razumljiviji. Umjesto o vjerojatnostima, možete misliti o frekvencijama. Rješenje 1. problema tada izgleda ovako.

Zamislite skup od 4000 majki koje sve imaju po dvoje djece. Pošaljete kući one majke koje nemaju kćeri, a od preostalih neka dignu ruku one koje imaju dvije kćeri.

Kući je otišlo cca 1000 majki, a od preostalih cca 3000 majki ruku je diglo njih cca 1000. Dakle, vjerojatnost da majka s bar jednom kćeri ima dvije kćeri je 1/3.

Sada lakše vidimo da se zapravo ne radi o majkama nego o obiteljima koje one predstavljaju. Obitelji su tipa KK, KS, SK i SS i populacija obitelji (predstavljenih majkama) izgleda ovako:

	Obitelji
KK	cca 1000
KS	cca 1000
SK	cca 1000
~~SS~~	~~cca 1000~~

(Naravno, KK je kratica za „starije dijete je kći i mlađe je dijete kći", KS za „starije dijete je kći i mlađe dijete je sin" itd.)

Obitelji čije su predstavnice poslane kući su precrtane, pa je frekvencija obitelji tipa KK među preostalim obiteljima cca 1000/3000, tj. vjerojatnost da obitelj s bar jednom kćeri ima dvije kćeri je 1/3.

Razmatranjem populacija i njihovih frekvencija najbolje je pristupiti i sljedećem problemu.

4. PROBLEM
Bar jedno dijete majke s dvoje djece je kći.
Kolika je vjerojatnost da kći iz takve obitelji ima sestru?

Sada zamislite skup od 4000 majki (koje sve imaju po dvoje djece), a na kojem je i njihovih 8000 djece. Pošaljete kući (zajedno s njihovom djecom) one majke koje uopće nemaju kćeri, a od preostalih kćeri neka dignu ruku one koje imaju sestru.

Tu se ne radi ni o majkama, ni o obiteljima koje one predstavljaju, nego o kćerima. Populacija kćeri u obiteljima tipa KK, KS, SK i SS sada izgleda ovako:

	Kćeri
KK	cca 2000
KS	cca 1000
SK	cca 1000
SS	0

Na skupu je ostalo cca 2000 kćeri bez sestre i cca 2000 kćeri sa sestrom, pa je frekvencija kćeri koje imaju sestru cca 2000/4000, tj. vjerojatnost da kći u obitelji s dvoje djece ima sestru je 1/2.

Dakle, razlika između 1. i 4. problema je razlika među populacijama koje razmatramo. U 1. problemu razmatramo populacije obitelji s dvoje djece, a u 4. populacije kćeri iz takvih obitelji.

I na kraju ću se nešto detaljnije pozabaviti problemom „određenog jednog”.

Vidjeli smo da „neodređeno” *bar jedno dijete* u 1. problemu daje vjerojatnost 1/3, dok „određeno” *starije dijete* u 2. problemu daje vjerojatnost 1/2. Između potpune neodređenosti *bar jednog* i potpune određenosti *starijeg* postoje mnoge gradacije određenosti. Na primjer, kako bismo riješili sljedeći problem?

5. PROBLEM
U nedjelju rođeno dijete majke s dvoje djece je kći.
Kolika je vjerojatnost da je i njeno drugo dijete kći?

Na prvi pogled može nam se činiti kako informacija da je kći rođena u nedjelju ne znači ništa (kada ne razumijemo značaj neke informacije, najčešće mislimo da je ona beznačajna). Je li to baš tako?

Označimo naše dvoje djece s A i B. Tvrdnju da A ima značajku Z označimo sa A_Z, a da je ima B s B_Z. Pretpostavit ćemo da značajka Z uvijek implicira da se radi o kćeri. Na primjer, Z može biti „starija kći", „kći koja se zove Ana", „kći koja je rođena u nedjelju" itd. Značajku „kći" označit ćemo s K.

Uočite da značajka Z potpuno određuje dijete A ako je u slučaju da A ima značajku Z vjerojatnost da je ima i B nula, tj. $P(B_Z \mid A_Z) = 0$.

Nas zanima vjerojatnost da su i A i B kćeri, pod uvjetom da bar jedna od njih ima značajku Z (što u slučaju značajke Z koja dijete potpuno određuje znači da značajku Z ima to određeno dijete). Dakle, tražimo $P(A_K B_K \mid A_Z \text{ ili } B_Z)$.) Pa krenimo s računom:

$P(A_K B_K \mid A_Z \text{ ili } B_Z) = P(A_K B_K A_Z \text{ ili } A_K B_K B_Z) / P(A_Z \text{ ili } B_Z)$

---------- *jer je* $P(X \mid Y) = P(XY) / P(Y)$ *i* $X(Y \text{ ili } Z) = XY \text{ ili } XZ$ ----------

$= P(B_K A_Z \text{ ili } A_K B_Z) / P(A_Z \text{ ili } B_Z)$

---------- *jer Z implicira* K ----------

$= (P(B_K A_Z\text{-}(A_K B_Z)) + P(A_Z B_Z) + P(\text{-}(B_K A_Z) A_K B_Z)) / (P(A_Z(\text{-}B_Z)) + P(A_Z B_Z) + P((\text{-}A_Z) B_Z))$

---------- *jer je* $P(X \text{ ili } Y) = P(X(\text{-}Y)) + P(XY) + P((\text{-}X)Y)$ *i jer Z implicira* K ---------

$= (P(B_K A_Z\text{-}(A_K) \text{ ili } B_K A_Z\text{-}B_Z)) + P(A_Z B_Z) + P(\text{-}(B_K) A_K B_Z \text{ ili } (\text{-}A_Z) A_K B_Z)) / (P(A_Z(\text{-}B_Z)) +$
$+ P(A_Z B_Z) + P((\text{-}A_Z) B_Z))$

---------- *jer je* $\text{-}(XY) = (\text{-}X) \text{ ili } (\text{-}Y)$ *i* $X(Y \text{ ili } Z) = XY \text{ ili } XZ$ ----------

$= (P(B_K A_Z\text{-}B_Z)) + P(A_Z B_Z) + P((\text{-}A_Z) A_K B_Z))) / (P(A_Z(\text{-}B_Z)) + P(A_Z B_Z) + P((\text{-}A_Z) B_Z))$

---------- *jer Z implicira* K ----------

$= (2P(B_K A_Z\text{-}B_Z)) + P(A_Z B_Z)) / (2P(A_Z(\text{-}B_Z)) + P(A_Z B_Z))$

---------- *zbog simetrije* ----------

$= (2P(B_K A_Z) \text{ -}2P(B_K A_Z B_Z) + P(A_Z B_Z)) / (2P(A_Z) - 2P(A_Z B_Z) + P(A_Z B_Z))$

---------- *jer je* $P(X(\text{-}Y)) = P(X) – P(XY)$ ----------

$= (2P(B_K A_Z) \text{ -}2P(A_Z B_Z) + P(A_Z B_Z)) / (2P(A_Z) - 2P(A_Z B_Z) + P(A_Z B_Z))$

---------- *jer Z implicira* K ----------

$= (2P(B_K A_Z) - P(A_Z B_Z)) / (2P(A_Z) - P(A_Z B_Z)) = (2P(B_K)P(A_Z) - P(A_Z)P(B_Z \mid A_Z)) /$
$/ (2P(A_Z) - P(A_Z)P(B_Z \mid A_Z))$

---------- *zbog nezavisnosti* B_K *od* A_K ----------

$(2P(B_K) - P(B_Z \mid A_Z)) / (2\text{-} P(B_Z \mid A_Z)) = (1 - P(B_Z \mid A_Z)) / (2 - P(B_Z \mid A_Z))$

---------- *zbog* $P(B_K) = 1/2$ ----------

Dakle, konačno smo našli da tražena vjerojatnost p (da su i A i B kćeri, pod uvjetom da bar jedna od njih ima značajku Z) ovisi o vjerojatnosti q (da jedno dijete ima značajku Z, pod uvjetom da je ima drugo) na sljedeći način:

$$p = (1 - q)/(2 - q), \quad q = P(B_Z \mid A_Z).$$

Na primjer, ako je Z potpuno neodređeni K = „kći", onda su A_Z i B_Z nezavisni i q = 1/2. Vjerojatnost da su i A i B kćeri, pod uvjetom da bar jedna od njih ima značajku Z (tj. da je bar jedna od njih kći), tada je

$$p = (1 - 1/2) / (2 - 1/2) = 1/3,$$

što već znamo.

S druge strane, ako značajka Z potpuno određuje dijete, npr. Z = „starija kći", onda je $q = P(B_Z \mid A_Z) = 0$ (jer ako je jedno dijete starije, drugo to sigurno nije). Vjerojatnost da su i A i B kćeri, pod uvjetom da je starije dijete kći, tada je

$$p = (1 - 0) / (2 - 0) = 1/2,$$

što također već znamo.

Kako stvari stoje sa značajkom koja je između tih ekstrema, npr. Z = „kći rođena u nedjelju"?

Tada su A_Z i B_Z nezavisni, a q = 1/14. Vjerojatnost da su i A i B kćeri, pod uvjetom da je jedna rođena u nedjelju, tada je

$$p = (1 - 1/14) / (2 - 1/14) = 13/27,$$

što je vjerojatnost koju smo tražili.

II. Monty Hall

U američkom časopisu *Parade* svojevremeno je postojala kolumna *Pitajte Marilyn.* Pisala ju je Marilyn vos Savant, žena s najviše ikada postignutih bodova na IQ testu (najviše među svim ljudima, muškarcima i ženama). U kolumni je odgovarala na matematičko-logička pitanja svojih čitatelja. Godine 1990. postavljeno joj je sljedeće pitanje, u vezi sa stvarnom TV-igrom koju je vodio Monty Hall.

6. PROBLEM

Ideja TV-igre je osvojiti nagradu, u ovom slučaju automobil. Monty vam pokazuje troja vrata i obavještava vas da je iza jednih vrata automobil, dok su iza preostalih vrata koze. Vi trebate odabrati jedna vrata i dobiti ono što je iza njih.

Nakon što odaberete jedna vrata, Monty odmah ne otvara odabrana vrata, nego otvara jedna od neodabranih, i to ona iza kojih je koza (Monty, naime, zna što je iza kojih vrata). Nudi vam da se predomislite prije nego otvori vrata koja ste konačno odabrali (katkada zahtijeva da platite manji iznos, npr. $50, ako želite promijeniti vrata).

Što biste vi učinili?

Marilyn je svojim čitateljima savjetovala da svakako prihvate ponudu i promijene vrata prije konačnog otvaranja. Objasnila im je da se time šansa za dobitak s 1/3 povećava na 2/3, dakle udvostručuje se.

Intuicija je gotovo svih ljudi da promjena ne donosi ništa. Naime, šansa da je automobil iza jednih od dvaju neotvorenih vrata su jednake. Marilyn je detaljno objasnila zašto to nije točno, no mnoge nije uspjela uvjeriti.

U više od 90 % pisama u vezi s Monty Hall problemom pokušavali su joj objasniti da je pogriješila. Mnoga od njih napisali su matematičari i znanstvenici. Evo nekih njihovih reakcija.

Vrlo sam zabrinut nedostatkom matematičkih vještina u općoj populaciji. Molim vas priznajte svoju pogrešku. dr. R. Sachs, Sveučilište George Mason

Već je dovoljno matematičke nepismenosti u ovoj zemlji i ne treba nam da je najveći IQ i dalje povećava. Sramota! dr. S. Smith, Sveučilište Florida

Šokiran sam da, i nakon što su vas tri matematičara ispravila, još uvijek ne vidite svoju pogrešku. K. Ford, Državno Sveučilište Dickinson

Siguran sam da ćete primiti mnoga pisma srednjoškolaca i studenata. Zadržite neke adrese, možda vam pomognu oko sljedećih kolumni. dr. W. R. Smith, Državno Sveučilište Georgia

Potpuno ste u krivu. Koliko iziritiranih matematičara treba da promijenite svoje mišljenje? dr. E. R. Bobo, Sveučilište Georgetown

Kada bi svi ovi doktori znanosti bili u krivu, nacija bi bila u ozbiljnim problemima. Priznajte svoju grešku. dr. E. Harman, Istraživački Institut Vojske SAD-a

Bez obzira na „*ozbiljne probleme*", Marilyn je bila u pravu i njezino je objašnjenje bilo točno.

Ovdje ću dati jedno drugo, po mome mišljenju najjednostavnije objašnjenje, koje pokazuje da je odabir vrata u originalnom problemu isto što i odabir vrata u nešto modificiranom problemu. Za taj drugi problem očito je da će promjena odabira vjerojatnost od 1/3 prevesti u vjerojatnost od 2/3 (dakle udvostručit će je).

Modificirani problem je sljedeći. Monty vam, nakon što ste odabrali jedna vrata, nudi da umjesto njih možete odabrati druga dvoja. To se očito isplati. Vjerojatnost da je automobil iza jednih vrata je 1/3, da je iza preostalih dvaju je 2/3.

Zašto je to isti problem? U originalnom vam problemu Monty, prije nego ste prihvatili ponudu i izabrali dvoja vrata, otvori jedna od tih vrata i pokaže kozu. Treba li to utjecati na vašu odluku da odaberete dvoja vrata (od kojih su vam jedna sada otvorena)?

Ne treba! Vi ste i bez da vam ih je Monty otvorio znali da će iza onih vrata koja Monty otvori biti koza. To je određeno pravilima igre i Montyjevo otvaranje potpuno je nebitno. No, to znači da je originalni problem isti kao i modificirani.

Dakle, promjenom udvostručujete svoje šanse.

Uvjerava li vas ovaj argument da je Marilyn bila u pravu? Moje je (ograničeno) iskustvo da većinu ne uvjerava. Zato, za one koji još nisu uvjereni, predlažem dodatne tri aktivnosti.

1. Proučite neki noviji (svakako ne stariji od 1990.) udžbenik iz vjerojatnosti u kojem ćete naći detaljnije objašnjenje (to je prijedlog samo za ambiciozne i strpljive).
2. Razmislite o problemu s 1000 vrata (iza jednih je vrata automobil, a iza preostalih 999 su koze).
3. Odigrajte dvije runde od po 30 ponavljanja igre (npr. s dvije crne karte i jednom „nagradnom" crvenom). U prvoj rundi nijednom ne mijenjate odabir, a u drugoj ga svaki put mijenjate. Možda mi ne vjerujete, ali u prvoj ćete rundi imati cca 10 crvenih „nagrada", a u drugoj ćete imati cca 20. (Naravno, morate imati Montyja koji će okretati crnu neodabranu kartu.)

III. Paradoks dviju omotnica

Kraj ću posvetiti jednom mnogo važnijem i fundamentalnijem paradoksu vjerojatnosti, paradoksu dviju omotnica. I njega je Marilyn vos Savant objašnjavala u svojoj kolumni, ali nažalost pogrešno.

7. PROBLEM

Nudim vam dvije omotnice. U jednoj je dvostruko više novca nego u drugoj. Vi odabirete jednu. Ja vas tada pitam želite li se predomisliti i odabrati drugu. Želite li? Možete i pogledati što je u prvoj.

Recimo da je u prvoj 100 kuna. To znači da je u drugoj 50 kuna ili 200 kuna. Te su alternative jednako vjerojatne, pa je očekivana vrijednost u drugoj omotnici

$$1/2 \times 200 \text{ kn} + 1/2 \times 50 \text{ kn} = 100 \text{ kn} + 25 \text{ kn}$$

To je više od 100 kn, koliko je u prvoj omotnici. Dakle, svakako trebate promijeniti svoj prvi odabir.

Taj argument vrijedi za svaki iznos x u prvoj omotnici:

$$1/2 \times 2x + 1/2 \times x/2 = x + x/4$$

Dakle, niste ni trebali gledati koliko je novca u prvoj omotnici.

Međutim, da ste početno odabrali drugu omotnicu, isti bi vas argument uvjeravao da nju trebate promijeniti. Dapače, kada se odlučite za promjenu, isti vas argument uvjerava da trebate ponovo promijeniti (tj. vratiti se početnom odabiru). Tako možete unedogled. Tu nešto ne štima.

To je slavni paradoks dviju omotnica. Za početak evo nekih napomena koje mogu pomoći u razumijevanju ovoga problema.

Prije svega, dobro je razlikovati dva problema: POO (problem otvorene omotnice) i PZO (problem zatvorene omotnice). POO vam dopušta da otvorite odabranu omotnicu, pogledate što je u njoj i tek tada odlučite želite li je promijeniti ili ne. PZO zahtijeva da bez otvaranja odabrane omotnice odlučite o njezinoj eventualnoj promjeni.

Čini se očitim da u PZO nema baš nikakve koristi od promjene odabrane omotnice. Problem je potpuno simetričan u odnosu na odabir jedne ili druge omotnice.

POO narušava tu simetriju. Otvaranjem odabrane omotnice dolazite do informacije koja može utjecati na vašu odluku (npr. ako je u njoj 60 % dostupnih kuna, u drugoj ne može biti 120 % dostupnih kuna; dostupnih je najviše 100 %).

S druge strane, vidjeli smo da je nebitno što je u prvoj omotnici (za svaki iznos x, isti vas argument uvijek uvjerava da promijenite omotnicu).

Nadalje, POO možda nije dobro postavljen problem. To znači da možda ne daje dovoljno informacija za nalaženje rješenja. (S druge strane, PZO izgleda dobro postavljen.)

Osim toga, dobro je analizirati i sam izračun očekivane vrijednosti u drugoj omotnici:

$$1/2 \times 200 \text{ kn} + 1/2 \times 50 \text{ kn} = 100 \text{ kn} + 25 \text{ kn}$$

Što su vjerojatnosti 1/2 koje se pojavljuju u tom izračunu? Prva 1/2 je vjerojatnost da je u 2. omotnici veća vrijednost, $p(O_2 > O_1) = 1/2$. Druga 1/2 je vjerojatnost da je u 1. omotnici veća vrijednost, $p(O_1 > O_2) = 1/2$.

No, ne trebate li za izračun očekivane vrijednosti koristiti uvjetne vjerojatnosti? Vjerojatnost da je u 1. omotnici veći iznos nego u 2. omotnici, pod uvjetom da je u 1. omotnici 100 kn, $p(O_1 > O_2 | O_1 = 100 \text{ kn})$, i analognu vjerojatnost, $p(O_2 > O_1 | O_1 = 100 \text{ kn})$?

Uz ove šture napomene možda problem dviju omotnica želite riješiti samostalno. Ako ga (bez *guglanja*) ne uspijete riješiti, nemojte se zabrinjavati. To nije uspjela ni Marilyn vos Savant.

Uostalom, mnogi misle da još nije ponuđeno zadovoljavajuće rješenje.

Ako ste odustali, evo i nešto detaljnije analize.

Pogledajmo najprije izračun očekivane vrijednosti na koji se poziva paradoksalna preporuka o zamjeni:

$$1/2 \times 2x + 1/2 \times x/2 = x + x/4.$$

To bi bio korektni izračun očekivane vrijednosti u drugoj omotnici da sam vam dao omotnicu s x kuna i zatim bacanjem novčića odlučio hoću li u drugu omotnicu staviti $2x$ ili $x/2$ kuna. No, problem nije tako postavljen.

Ja sam u omotnice stavio $3y$ kuna (y u jednu i $2y$ u drugu) i zatim sam vam dao da odaberete jednu od njih. Koju god odaberete, vaša je očekivana dobit $3y/2$:

$$1/2 \times y + 1/2 \times 2y = 3y/2.$$

Dakle, ako ne otvorite odabranu omotnicu (tj. ako ste u PZO), nema očekivane koristi od zamjene.

Za one koji nisu uvjereni, evo još detaljnije analize. (Nadam se da one koji su već uvjereni ovaj dodatak neće razuvjeriti.)

Kada ste odabrali omotnicu u kojoj je iznos x, vi jedino sigurno znate da je $x = y$ ili $x = 2y$ (gdje je y manji od dva iznosa koja sam ja stavio u omotnice). Ako zamjenom omotnice dobivate, to znači da je $x = y$ i da je vaša dobit $x = y$. Ako zamjenom omotnice gubite, to znači da je $x = 2y$ i da je vaš gubitak $x/2 = y$. Ključno je da je vrijednost y unaprijed zadana; ja sam novac stavio u omotnice prije nego sam vam ponudio sve daljnje izbore. No, to znači da x ima različite vrijednosti u dobitničkom i gubitničkom scenariju pa te dvije vrijednosti ne možete tretirati kao jednu. A upravo to činite u paradoksalnom izračunu očekivane vrijednosti $1/2 \times 2x + 1/2 \times x/2$ (prvi x je y, a drugi x je $2y$).

Primijetimo da ovaj dio paradoksa zapravo i nema veze s vjerojatnošću. Mogli smo ga formulirati kao „logički paradoks".

Ako je u omotnici koju ste odabrali x, onda je u drugoj omotnici 2x ili x/2. Dakle, ako zamjenom dobivate, dobit ćete x, a ako zamjenom gubite, izgubit ćete x/2. Mogući dobitak veći je od mogućeg gubitka.

S druge strane, razlika iznosa u omotnicama je y. To znači da zamjenom dobivate ili gubite y. Mogući dobitak jednak je mogućem gubitku.

Dva istaknuta zaključka međusobno se pobijaju i to je (navodno) paradoks. No, već smo objasnili zašto je argument s y valjan, a onaj s x nije.

Okrenimo se sada POO-u koji je zanimljiviji. Što se mijenja ako saznate iznos u odabranoj omotnici, dakle ako je otvorite? Mogli biste pomisliti: ništa, prethodna analiza vrijedi za svaki y, pa informacija o tome koliki je y nema dodatnu vrijednost. Pomislili biste krivo.

(Već i zbog toga što otvaranjem omotnice niste ni doznali koliki je y. Onaj x koji vidite možda je y, a možda je i $2y$. No, to je problem koji smo već razriješili.)

Da je prva misao pogrešna, postat će vam jasno ako razmislite o omotnici u kojoj vidite više od 1/3 meni dostupnih kuna. Vjerojatnost većeg iznosa u drugoj omotnici tada je nula i vi (naravno) nećete mijenjati odabranu omotnicu.

Ono što vidite u odabranoj omotnici može biti itekako informativno.

Da biste mogli iskoristiti tu informaciju, morali biste znati koliko je vjerojatno da ću ja određeni iznos staviti u omotnicu. (Možete se ograničiti na manji iznos y jer on potpuno determinira veći iznos $2y$.) Dakle, očekivanu vrijednost u drugoj omotnici možete izračunati samo ako znate kolika je vjerojatnost $S(y)$ da ću ja u omotnicu s manjim iznosom staviti y kuna. Na primjer, ako je x koji vidite veći od 1/3 meni dostupnih kuna, onda je $S(x) = 0$, i očekivani iznos u drugoj omotnici je $0 \times 2x + 1 \times \times x/2 = x/2$.

Izračun je nešto složeniji u slučaju koji nije ekstreman. Dakle, ako ste u 1. omotnici našli 100 kuna, onda je očekivana vrijednost u II. omotnici:

$$P(O_2 > O_1 | O_1 = 100 \text{ kn}) \times 200 \text{ kn} + P(O_1 > O_2 | O_1 = 100 \text{ kn}) \times 50 \text{ kn}.$$

Funkcija $S(y)$, koja proizlazi iz mojih novčanih mogućnosti i navika ili jednostavno iz načina na koji punim omotnice, omogućava vam da izračunate potrebne vjerojatnosti:

$$P(O_2 > O_1|O_1 = 100 \text{ kn}) = (P(O_2 > O_1) \times P(O_1 = 100 \text{ kn}| O_2 > O_1)) \;/\; P(O_1 = 100 \text{ kn}) =$$
$$= ½\, S(100)/(\, ½S(50) + ½S(100)) = S(100)/(S(50) + S(100)),$$

i analogno

$$p(O_1 > O_2|O_1 = 100 \text{ kn}) = S(50)/(S(50) + S(100)).$$

(Intuitivno, prva vjerojatnost (da je 100 kuna koje vidite manji iznos) mora biti proporcionalna sa S(100), tj. s vjerojatnošću da ću ja u manju omotnicu staviti 100 kn. Druga vjerojatnost (da je 100 kuna koje vidite veći iznos) mora biti proporcionalna sa S(50), tj. s vjerojatnošću da ću ja u manju omotnicu staviti 50 kn. No, to su jedine dvije opcije, pa zbroj njihovih vjerojatnosti mora biti 1. Iz toga slijede gornji rezultati.)

Dakle, ako je u 1. omotnici 100 kn, onda je očekivana vrijednost u 2. omotnici:

$$S(100)/(S(50) + S(100)) \times 200 \text{ kn} + S(50)/(S(50) + S(100)) \times 50 \text{ kn}.$$

Naravno, to vrijedi i za svaki drugi iznos x. Ako je u 1. omotnici x kuna, onda je očekivana vrijednost u 2. omotnici:

$$S(x)/(S(x/2) + S(x)) \times 2x + S(x/2)/(S(x/2) + S(x)) \times x/2.$$

Taj će iznos biti veći od x, tj. zamjena će se isplatiti samo ako je $S(x) > ½\, S(x/2)$ za svaki x.

Međutim, ne postoji konačna distribucija vjerojatnosti S koja bi zadovoljavala taj uvjet. (Za one koji znaju nešto više teorije vjerojatnosti napominjemo da i među beskonačnim distribucijama taj uvjet mogu zadovoljiti samo one čije je očekivanje beskonačno. Usput, to su one distribucije za koje ne vrijedi zakon velikih brojeva.)

Rezimirajmo što smo zaključili o POO. Taj problem zapravo nije dobro postavljen. Da biste ga riješili, morate znati moj S, tj. morate znati moje novčane mogućnosti i navike ili jednostavno način na koji punim omotnice. Bez toga ne možete izračunati očekivani iznos u II. omotnici.

To je analogno sljedećem problemu.

8. PROBLEM

Vozila A i B voze istom cestom u istome smjeru. A vozi 10 km/h brže od B. Koliko su vozila udaljena nakon 1 sata vožnje?

Prva je misao: 10 km. No, zapravo ne znate odgovor jer ne znate položaj vozila na početku toga sata. Ako kreću s istog mjesta, onda je točan odgovor 10 km. Bez te informacije ne možete izračunati traženu udaljenost.

Isto tako ne možete izračunati ni očekivani iznos u II. omotnici ako ne znate moj S. Teorija vjerojatnosti omogućava vam da iz jednih vjerojatnosti računate druge, ali vam najčešće ne daje početne vjerojatnosti. A od nečega morate početi. (U stručnom žargonu: nema posteriora bez priora.)

Problem priora i inače je glavni problem upotrebe teorije vjerojatnosti u analizi podataka (od astronomije preko medicine do ekonomije). Te analize zapravo su kvantifikacije našega znanja o nekom fenomenu na temelju prikupljenih podataka o tom fenomenu. Radi se o računanju uvjetnih vjerojatnosti, a uvjeti su prikupljeni podatci. No, taj račun ovisi i o apriornim vjerojatnostima – što znate nakon što ste prikupili podatke ovisi i o tome što ste znali prije prikupljanja.

Na sreću, u većini znanstvenih primjena moguće je pokazati da su konačni zaključci neovisni o apriornim vjerojatnostima – od kojih god priora krenete, podatci vas vode istim zaključcima; vidi npr. (Š). To su situacije u kojima iz novih podataka doznajemo toliko da oni potpuno brišu sva prethodna znanja o fenomenu koji istražujemo. No, nije uvijek tako i ne treba se slijepo pouzdati u univerzalnu irelevantnost priora. POO je samo jedan primjer problema u kojemu je konačni zaključak osjetljiv na priore.

Recimo još nešto o vezi PZO i POO. Vidjeli smo da PZO možemo razriješiti bez ikakvog poziva na vjerojatnost (čak ga možemo i formulirati kao „logički paradoks"). No, ako i ne otvarate odabranu omotnicu, lako možete zamisliti da ste je otvorili i da ste u njoj našli x kuna. Nadalje (ako znate moj S), korektno možete izračunati očekivanu dobit od zamjene.

Budući da samo zamišljate da ste vidjeli x kuna, vaša konačna odluka mora se temeljiti na prosjeku svih mogućih dobitaka i gubitaka koje vam donosi zamjena (po svim mogućim vrijednostima x koje distribuira moj S). Nije teško izračunati da je ta srednja vrijednost nula za svaki prihvatljivi S (tj. za svaki S koji ima konačno očekivanje). Dakle, razrješenje POO-a u potpunoj je harmoniji s razrješenjem PZO-a.

I na kraju, zašto neki smatraju da POO nije razriješen? Neki zato jer ne razumiju rješenje, a neki imaju i bolje razloge.

Činjenica je da postoje razdiobe S(y) za koje vam korektni izračun očekivane dobiti kaže da omotnicu uvijek trebate zamijeniti. No, to su uvijek razdiobe u kojima ja raspolažem s beskonačnim količinama novca i u kojima je očekivana vrijednost svih koje stavljam u manju omotnicu također beskonačna.

Na primjer, ako su (manji) iznosi koje stavljam u omotnicu 1, 2, 4, 8, 16... , 2^i, 2^{i+1}, ... onda će se zamjena isplatiti (usp. gore) ako je za svaki i

$$S(2^{i+1}) > ½\, S(2^i) \quad \text{tj.} \quad S(2^{i+1}) / S(2^i) > ½.$$

Svaki geometrijski red s kvocijentom $q > ½$ zadovoljava tu nejednakost. Ako ga još podijelimo s njegovom sumom 1/1-q, onda će i zbroj vjerojatnosti svih elementarnih ishoda biti 1 (što je nužan uvjet da bi se radilo o razdiobi vjerojatnosti). Dakle, ako je moja razdioba

y	1	2	4	8	...	2^i	...
S(y)	$1\times(1-q)$	$q\times(1-q)$	$q^2\times(1-q)$	$q^3\times(1-q)$	...	$q^i\times(1-q)$	...

onda uvijek trebate mijenjati, i tu se ne radi ni o kakvom paradoksu, nego o još jednom „paradoksu" beskonačnosti. Oni se gotovo uvijek svode na to da mislimo kako ono što vrijedi u konačnom mora vrijediti i u beskonačnom (npr. da pravi dio uvijek mora biti manji od cjeline jer to vrijedi za konačne veličine). To jednostavno nije istina koliko se god to nekome činilo paradoksalnim.

Osim toga neriješenim problemom ostaje i kako trebate postupiti u slučaju da ne znate moj S, pa stoga ne možete izračunati očekivanu vrijednost u 2. omotnici. Eksperimentalno se uspješnom pokazala strategija slučajnih promjena (s vjerojatnostima koje na određeni način ovise o x). Zanimljivo je da se analogna situacija pojavljuje u vezi s razbijanjem simetrije u kvantnoj fizici, no to prelazi okvire ovoga članka.

Literatura:

1. Šikić, Z. What Is Probability And Why Does It Matter?, European J. Of Analytic Philosophy, vol.10 no.1, 21-43., 2014. (https://sikic.files.wordpress.com/2012/03/what_is_probability.pdf)