Zašto ste nam to tajili?

Vladimir Ćepulić[1]
Kristina Jelena Penzar[2]

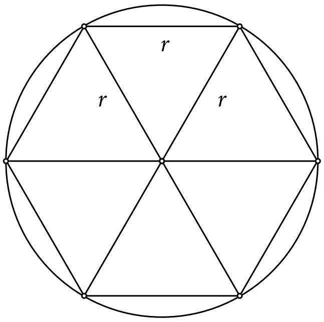
U ovom ćemo članku opisati kako se može računati broj π koristeći Pitagorin poučak i drugi korijen.

Koliko je poznato, brojem π koristili su se još Babilonci prije 4000 godina. Njihova aproksimacija prikazana kao racionalni broj iznosila je 25/8. Simbol (grčko slovo) π odabrao je engleski matematičar **William Jones** 1706. i kao takav zadržao se do danas.

Što je π? To je iracionalan broj koji dobijemo kao omjer opsega kruga i njegova promjera, tj.

$$\pi = \frac{O}{2r}.$$

No, kako dobiti njegovu vrijednost? Nacrtajmo kružnicu polumjera r i upišimo joj pravilni mnogokut. To može biti bilo koji mnogokut. Zbog jednostavnosti ćemo uzeti šesterokut. Njegove su sve stranice jednake i duljina im je jednaka polumjeru kružnice.



Znamo da je opseg kružnice $O = 2r\pi$ pa je poluopseg $o = r\pi$, iz čega je

$$\pi = \frac{\text{poluopseg}}{\text{polumjer}} = \frac{o}{r}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je polumjer kružnice jednak jedan. Tada je

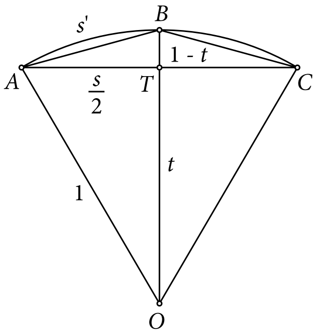
$$\pi = \frac{o}{1} = o$$

[1]Vladimir Ćepulić, Fakultet Elektrotehnike i računarstva, Zagreb
[2]Kristina Jelena Penzar, Nadbiskupska klasična gimnazija, Zagreb

Dakle, broj π je upravo jednak poluopsegu kružnice polumjera 1. Povećavamo li broj stranica pravilnog mnogokuta, njegov će se opseg približavati opsegu kružnice pa će i polovica toga opsega sve bolje i bolje aproksimirati broj π.

Udvostručimo zato broj stranica mnogokuta – u našem slučaju šesterokuta – i izračunajmo zbroj duljina svih njegovih stranica.

Neka je $\overline{AC}$ jedna stranica pravilnog mnogokuta koja je ujedno i tetiva kružnice sa središtem u točki O i $|AC| = s$. Nacrtajmo okomicu na tu stranicu iz središta kružnice. Dobili smo dvije točke, točku T koja je polovište stranice $\overline{AC}$ i točku B koja se nalazi na kružnici između vrhova A i C.



Za te točke je

$$|AB| = |BC| = s' \text{ i } |AT| = |TC| = \frac{s}{2}.$$

Neka je $|OT| = t$. Budući da je polumjer kružnice $r = 1$, vrijedi da je $|TB| = 1 - t$.

Koristeći Pitagorin poučak vidimo da je

$$|AB|^2 = |AT|^2 + |TB|^2 \text{ i da je } |AT|^2 = 1^2 - |OT|^2,$$

odnosno

$$s'^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (1-t)^2 \tag{1}$$

i

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 1 - t^2. \tag{2}$$

Uvrstimo (2) u (1) :

$$s'^2 = 1 - t^2 + (1-t)^2 = 1 - t^2 + 1 - 2t + t^2$$

$$s'^2 = 2 - 2t$$

Iz (2) izrazimo t:

$$t = \sqrt{1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

i uvrstimo u

$$s'^2 = 2 - 2t\,.$$

Dobijemo

$$s'^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

i podijelimo sve s 4:

$$\frac{s'^2}{4} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{s^2}{4}}}{2}\,. \tag{3}$$

Zbog jednostavnosti uvedimo nove oznake:

$$z = \frac{s^2}{4}\,, \quad z' = \frac{s'^2}{4}\,.$$

Duljina stranice je onda $s = 2\sqrt{z}$, a formulu (3) zapišemo kao

$$z' = \frac{1 - \sqrt{1 - z}}{2}\,.$$

Postupak možemo po volji ponavljati te na taj način dobijemo rekurzivne formule:

$$z_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - z_n}}{2}\,,$$

odnosno

$$s_n = 2\sqrt{z_n}\,.$$

Pogledajmo sada na našem primjeru šesterokuta što se događa i kako se vrijednosti koje dobivamo približavaju broju π. Imali smo početnu stranicu $s_0 = 1$. Tada je

$$z_0 = \frac{{s_0}^2}{4} = \frac{1}{4} = 0.25\,.$$

Poluopseg je

$$o_0 = 3s_0 = 3 \cdot 2\sqrt{z_0} = 3\,.$$

Udvostručimo li broj stranica, dobit ćemo da je

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - z_0}}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0.25}}{2} \approx 0.0669873$$

te $s_1 = 2\sqrt{z_1} \approx 0.5176381$.

Poluopseg je sada

$$o_1 = 6s_1 = 6 \cdot 2\sqrt{z_1} = 3 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{z_1} = 3 \cdot 2^2\sqrt{z_1} \approx 3.1058285\,.$$

Ponavljajući postupak dobit ćemo općenitu formulu za poluopseg

$$o_n = 3 \cdot 2^{n+1} \sqrt{z_n}\ .$$

Računamo li dalje, imamo da je

$$z_2 = \frac{1-\sqrt{1-z_1}}{2} = 0.0170371 \text{ i } o_2 = 3 \cdot 2^3 \sqrt{z_2} \approx 3.1326287.$$

Napravimo li program u *Pythonu*[3], to će izgledati ovako:

```
from math import *
def zn(br):
      if br == 0:
       z = 0.25
      return z
else:
      z = (1-sqrt(1-zn(br-1)))/2
      return z

for i in range(13):
      o = 3*(2**(i+1))*sqrt(zn(i))
      print('z{} = {}'.format(i,zn(i)))
      print('poluopseg {} = {}'.format(i,o))
```

Svakom iteracijom polupseg je sve bliži broju π: Pogledajmo:

```
poluopseg 0 = 3.0
   z0 = 0.25
poluopseg 1 = 3.1058285412302498
   z1 = 0.0669872981077807
poluopseg 2 = 3.132628613281237
   z2 = 0.017037086855465844
poluopseg 3 = 3.139350203046872
   z3 = 0.004277569313094809
```

točnost na 1 decimalu (uz poluopseg 1)

[3]program u *Pythonu* izradio Filip Penzar, XV. gimnazija, Zagreb

```
poluopseg 4 = 3.14103195089053                točnost na 3 decimale
   z4 = 0.0010705383806982605
poluopseg 5 = 3.1414524722853443
   z5 = 0.00026770626181715773
poluopseg 6 = 3.141557607911622
   z6 = 6.693104521909854e-05
poluopseg 7 = 3.141583892148936
   z7 = 1.6733041299454854e-05
poluopseg 8 = 3.1415904632367617              točnost na 5 decimala
   z8 = 4.183277824698628e-06
poluopseg 9 = 3.1415921060430483
   z9 = 1.0458205499386253e-06
poluopseg 10 = 3.1415925165881546
   z10 = 2.614552058188835e-07
poluopseg 11 = 3.1415926186407894             točnost na 7 decimala
   z11 = 6.536380570132394e-08
poluopseg 12 = 3.1415926453212157
   z12 = 1.634095170288674e-08
```

Usporedbe radi, evo broja π prikazanog na dvadeset decimala:

$$\pi \approx 3.14159265358979323846 .$$

U jedanaestoj iteraciji dobili smo točnost na sedam decimala te smo zorno pokazali da poluopseg, računat na ovaj način, zaista teži broju π.