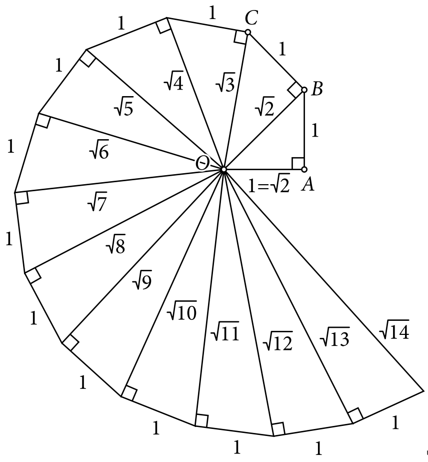
Spirala od kvadratnih korijena iz brojeva 1, 2, 3...

Šefket Arslanagić[1] i Alija Muminagić[2]

Konstrukcija spirale od kvadratnih korijena jasna je sa Slika 1.

Uputa: Konstruiraj jednakokračni pravokutni trokut ΔOAB čije su katete duljina $|OA|=|AB|=1\left(=\sqrt{1}\right)$ te primjenom Pitagorinog teorema odredi duljinu hipotenuze $|OB|$. Promatraj dalje trokut ΔOBC, $|OB|=\sqrt{2}, |BC|=1$ i $|\measuredangle B|=90^0$, itd.



Slika 1.

Pogledajmo sada kako možemo konstruirati spiralu kvadratnog korijena iz $\sqrt{0.nnnn...}$, tj. iz brojeva $\sqrt{0.1111...}$, $\sqrt{0.2222...}$, $\sqrt{0.3333...}$, ..., $\sqrt{0.8888...}$. Interesantno je pitanje je li broj $\sqrt{0.1111...}$ racionalan ili iracionalan? Da bismo odgovorili na ovo pitanje, podsjetimo se: racionalni brojevi imaju konačan decimalni zapis (npr. $\frac{1}{5}=0.2$) ili beskonačan periodični decimalni zapis (npr. $\frac{1}{3}=0.3333...$).

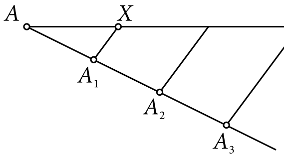
[1]Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH
[2]Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

Stavimo da je $x = 0.1111...$. Tada je:

$$10x = 1.1111... \Leftrightarrow 10x = 1 + 0.1111... \Leftrightarrow 10x = 1 + x \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}.$$

Dakle, $\sqrt{0.1111...} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = 0.3333...$, tj. broj $\sqrt{0.1111...}$ je racionalan. Sada možemo konstruirati spiralu kvadratnih korijena $\sqrt{0.1111...}$, $\sqrt{0.2222...}$, ..., $\sqrt{0.8888...}$.

Primijenimo prvo poznatu konstrukciju dijeljenja dužine na jednake dijelove. U našem slučaju dijelimo dužinu $\overline{AB}$ duljine $|AB| = 1$ na $n = 3$ dijela. Položimo polupravac iz točke A i na taj polupravac, počevši od točke A, nanesimo neke odabrane dužine tako da je $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3|$ (sl. 2). Paralele s $\overline{A_3B}$ nacrtane kroz točke A_2 i A_1 dijele dužinu $\overline{AB}$ na 3 jednaka dijela. (Dokažite!).

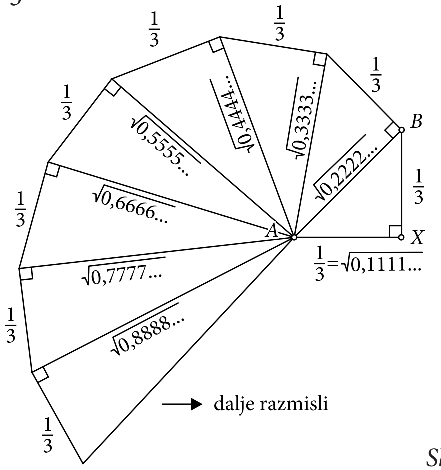


Slika 2.

Dakle, $|AX| = \frac{1}{3} = 0.3333... = \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{0.1111...}$

Sada je konstrukcija spirale kvadratnih korijena iz brojeva $\sqrt{0.1111...}$, $\sqrt{0.2222...}$, ..., $\sqrt{0.8888...}$ jasna sa Slike 3.

Uputa: Konstruirajmo jednakokračno-pravokutni trokut ΔAXB čije su katete duljina $|AX| = |XB| = \frac{1}{3} = \sqrt{0.1111...}$ i $|\measuredangle X| = 90^0$, itd.



Slika 3.

Promatrajmo sada spiralu na slici 4. Svi trokuti na slici 4. su pravokutni i u svim je trokutima visina iz vrha pravog kuta nacrtana na hipotenuzu duljine 1.

Prema oznakama na Slici 4. vrijedi:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_0^2 \cdot x_1^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2 . \qquad (*)$$

Promatrajmo pravokutni trokut ΔABC. Uvedimo oznake $|AB| = x_0$, $|BC| = x_1$, $|AC| = c$, $|AM| = c_1$, $|MC| = c_2$, $|BM| = 1$. Primjenom Pitagorinog teorema na trokut ΔABC dobivamo:

$$x_0^2 + x_1^2 = c^2 , \qquad (1)$$

a primjenom Euklidovog teorema[3]:

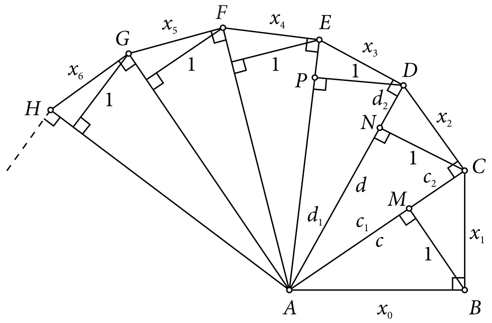
$$|BM|^2 = 1^2 = c_1 \cdot c_2 ,\ x_0^2 = c \cdot c_1 , x_1^2 = c \cdot c_2 . \qquad (2)$$

Množenjem posljednih dviju jednakosti u (2) dobivamo:

$$x_0^2 \cdot x_1^2 = c^2 \cdot c_1 \cdot c_2 = (\text{zbog } c_1 \cdot c_2 = 1) = c^2 . \qquad (3)$$

Sada iz (2) i (3) proizilazi da je:

$$x_0^2 + x_1^2 = x_0^2 x_1^2 . \qquad (4)$$



Slika 4.

Promatrajmo dalje pravokutni trokut ΔACD. Ovdje je

$$|AC| = c, |AD| = d, |CD| = x_2, |AN| = d_1, |ND| = d_2, |CN|^2 = 1^2 = d_1 d_2 .$$

Slično kao gore dobivamo:

$$c^2 + x_2^2 = d^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = d^2 \qquad (5)$$

te

$$c^2 = d \cdot d_1 \text{ i } x_2^2 = d \cdot d_2 .$$

Množenjem ovih jednakosti dobivamo:

$$c^2 \cdot x_2^2 = d^2 \cdot d_1 \cdot d_2 = (\text{zbog } d_1 \cdot d_2 = 1) = d^2 , \qquad (6)$$

[3]Euklidov teorem: a) Kateta pravokutog trokuta geometrijska je sredina hipotenuze i svoje ortogonalne projekcije na hipotenuzu. b) Visina na hipotenuzu pravokutog trokuta geometrijska je sredina njenih odsječaka na hipotenuzu.

a iz (5) i (6) slijedi:

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2=c^2\cdot x_2^2\overset{(3)}{=}x_0^2\cdot x_1^2\cdot x_2^2\,.$$

Naslućujemo da je jednakost (*) točna, a dokaz prepuštamo čitateljima.

Promatrajmo slične trokute koji čine spiralu na Slici 5. Iz sličnosti trokuta $\Delta OAB\sim\Delta OBC$ slijedi:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

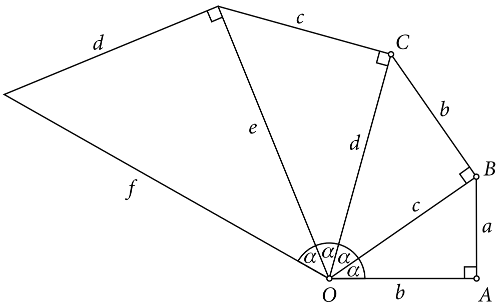
(jer je $c=\sqrt{a^2+b^2}$ prema Pitagorinom teoremu u trokutu ΔOAB).

Odavde dobivamo:

$$a\sqrt{a^2+b^2}=b^2\Leftrightarrow\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2-\frac{b^2}{a^2}-1=0\,. \tag{7}$$

Rješenje jednadžbe (7) je:

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,. \tag{8}$$



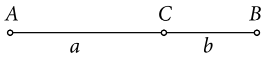
Slika 5.

Podsjetimo se sada nekih definicija i teorema o zlatnom rezu.

Definicija 1. Ako točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ (Slika 6.) tako da vrijedi

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}\,, \tag{9}$$

kažemo da ju ona dijeli u omjeru zlatnog reza.



Slika 6.

Teorem 1. Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza ako je:

$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (\approx 1.618). \tag{10}$$

Broj Φ naziva se zlatni broj.

Iz (9) slijedi:

$$a^2 - ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0 . \tag{11}$$

Dakle, sada je:

$$\frac{b^2}{a^2} \overset{(8)}{=} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi , \tag{12}$$

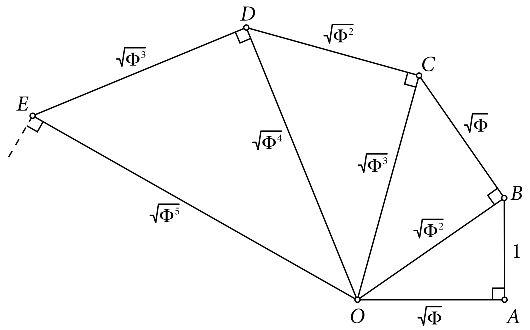
a iz (12) slijedi:

$$b = a\sqrt{\Phi} , \tag{13}$$

te

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2\Phi} = a\sqrt{1+\Phi} \overset{(11)}{=} a\sqrt{\Phi^2} = a\Phi . \tag{14}$$

Stavljajući da je $a = 1$, slijedi da je $b = \sqrt{\Phi}$ i $c = \Phi$, pa je spirala sa Slike 5. sada kao na Slici 7. (spirala korijena iz Φ).

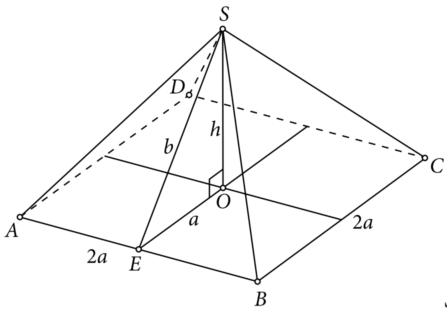


Slika 7.

Iz (11), tj. $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, slijedi $\Phi + 1 = \Phi^2$, a nakon množenja sa Φ: $\Phi^2 + \Phi = \Phi^3$ (vidi trokut ΔOBC), $\Phi^3 + \Phi^2 = \Phi^4$ (vidi trokut ΔOCD). Trokut ΔOAB naziva se zlatni trokut. Duljine njegovih stranica stoje u omjeru $1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$.

Interesantno je da zlatni trokut nalazimo u Keopsovoj piramidi. Keops, egipatski faraon iz IV. dinastije (oko 2600. p.n.e.), dao je izgraditi najveću piramidu s kvadratnom osnovicom. Za matematičare je zanimljiv podatak da je ova piramida izgrađena tako da je kvadrat visine piramide jednak površini pobočke, tj. prema oznakama na sl. 8:

$$|SO|^2 = h^2 = P(\Delta ABS) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |SE| = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = ab . \tag{15}$$



Slika 8.

Pitagorin teorem primijenjen na pravokutni trokut ΔSOE daje:

$$b^2 = a^2 + h^2 \overset{(15)}{=} a^2 + ab \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0,$$

a odavde $\frac{b}{a} = \Phi$. Dalje iz $\frac{b}{a} = \Phi$ slijedi $b = a\Phi$, pa iz $h^2 = ab = a^2\Phi$ dobivamo $h = a\sqrt{\Phi}$. Stavimo li da je $a = 1$, tada je $h = \sqrt{\Phi}$ i $b = \Phi$, tj. trokut ΔSOE je zlatni ($1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$).

(*uguglaj* Keopsova piramida; između ostalog nalazi se $2a = 230.36\,\text{m}$, $h = 146.72\,\text{m}$, pa je $b = \sqrt{\left(\frac{230.36}{2}\right)^2 + 146.72^2} = 186.53$ pa je $\frac{b}{a} = \frac{186.53}{115.18} \approx 1.619 \approx \Phi$).

Literatura:

1. V. Blagojević, *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, I. Sarajevo, 2002.
2. D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.
3. B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1.*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.