Napeti bazni okviri

Ljiljana Arambašić[1] i Marija Kolarek[2]

Sažetak: U ovom radu diskutiramo o nizovima vektora $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ u prostoru V^2 koji imaju svojstvo da se svaki vektor $v\in V^2$ može zapisati u obliku

$$A\vec{v}=(\vec{v}\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1+\ldots+(\vec{v}\cdot\vec{v}_n)\vec{v}_n$$

za neki $A>0$. Takve nizove vektora nazivamo napetim baznim okvirima za V^2. Nakon toga navodimo osnovne pojmove i tvrdnje o općenitim baznim okvirima u konačnodimenzijskim prostorima.

Ključne riječi: baza, ortonormirana baza, sustav izvodnica, bazni okvir, rekonstrukcija vektora

O napetim baznim vektorima u V^2

Svima su nam dobro poznati vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$ prostora V^2 svih vektora ravnine – znamo da se svaki vektor iz V^2 može na jedinstven način napisati kao linearna kombinacija ovih dvaju vektora, to jest, svi vektori iz V^2 su oblika $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$ za neke jedinstveno određene realne brojeve α i β. Pritom se skalari α i β mogu računati pomoću skalarnog produkta na V^2 koji je zadan formulom

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$

gdje su $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$ duljine vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a φ kut između njih. Lako se dobije da za zadani $\vec{v}\in V^2$ imamo

$$\vec{v}=(\vec{v}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{v}\cdot\vec{j})\vec{j}. \tag{1}$$

Postoje li, osim $\vec{i}$ i $\vec{j}$, još neki vektori s ovim svojstvom? Jasno da postoje, npr. možemo uzeti $-\vec{i}$ i $-\vec{j}$, ali zapravo i svaka dva jedinična međusobno okomita vektora $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$.

Možemo li naći tri ili više vektora s ovim svojstvom? Preciznije, postoje li vektori $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ za $n\geq 3$ tako da

$$\vec{v}=(\vec{v}\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1+\ldots+(\vec{v}\cdot\vec{v}_n)\vec{v}_n \tag{2}$$

[1]Ljiljana Arambašić, PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb
[2]Marija Kolarek, OŠ Eugena Kvaternika, Velika Gorica

vrijedi za sve $\vec{v} \in V^2$? (Pretpostavljat ćemo da je svaki od vektora $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ različit od nulvektora.)

Navedimo dva primjera.

Primjer 1. Promotrimo sljedeće vektore

$$\vec{v}_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{i}, \quad \vec{v}_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}, \quad \vec{v}_3 = -\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}.$$

Ako je $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, onda je

$$\vec{v}\cdot\vec{v}_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}\alpha, \quad \vec{v}\cdot\vec{v}_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta, \quad \vec{v}\cdot\vec{v}_3 = -\frac{\sqrt{6}}{6}\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta,$$

i direktnim uvrštavanjem provjerimo da vrijedi

$$\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_2 + (\vec{v}\cdot\vec{v}_3)\vec{v}_3.$$

Primjer 2. Uzmimo sada vektore

$$\vec{v}_1 = \vec{i}, \quad \vec{v}_2 = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{v}_3 = \vec{j}, \quad \vec{v}_4 = \vec{i} - \vec{j}.$$

Ako je $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, onda je

$$\vec{v}\cdot\vec{v}_1 = \alpha, \quad \vec{v}\cdot\vec{v}_2 = \alpha + \beta, \quad \vec{v}\cdot\vec{v}_3 = \beta, \quad \vec{v}\cdot\vec{v}_4 = \alpha - \beta.$$

Tada je

$$(\vec{v}\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_2 + (\vec{v}\cdot\vec{v}_3)\vec{v}_3 + (\vec{v}\cdot\vec{v}_4)\vec{v}_4 = 3\vec{v}.$$

Iako vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ ne zadovoljavaju (2), iz prethodne relacije vidimo da vektori

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{v}_1, \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{v}_2, \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{v}_3, \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{v}_4$$

zadovoljavaju taj uvjet.

Imajući na umu prethodni primjer, promatrat ćemo vektore $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ koji zadovoljavaju relaciju koja je malo općenitija od (2), to jest vektore za koje postoji $A > 0$ tako da za sve $v \in V^2$ vrijedi

$$A\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 + \ldots + (\vec{v}\cdot\vec{v}_n)\vec{v}_n. \tag{3}$$

Ono što želimo jest dati jednu geometrijsku interpretaciju i karakterizaciju ovakvih vektora.

Neka su zadani vektori $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$. Tada se svaki od njih može zapisati kao

$$\vec{v}_k = |\vec{v}_k|(\cos\varphi_k\vec{i} + \sin\varphi_k\vec{j}), \quad k = 1,\ldots,n,$$

pri čemu je $|\vec{v}_k|$ duljina vektora $\vec{v}_k$, a φ_k kut koji taj vektor zatvara s pozitivnim dijelom x osi, to jest s vektorom $\vec{i}$.

Uočimo da, ako (3) vrijedi za $\vec{i}$ i $\vec{j}$, onda zbog linearnosti vrijedi i za sve vektore $\vec{v}$ iz V^2.

Relacije

$$A\vec{i} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{i} \cdot \vec{v}_k)\vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} (|\vec{v}_k|^2 \cos^2 \varphi_k \vec{i} + |\vec{v}_k|^2 \sin\varphi_k \cos\varphi_k \vec{j}),$$

$$A\vec{j} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{j} \cdot \vec{v}_k)\vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} (|\vec{v}_k|^2 \sin^2 \varphi_k \vec{i} + |\vec{v}_k|^2 \sin\varphi_k \cos\varphi_k \vec{j})$$

ekvivalentne su relacijama

$$\sum_{k=1}^{n} (|\vec{v}_k|^2 \cos^2 \varphi_k) = A, \quad \sum_{k=1}^{n} (|\vec{v}_k|^2 \sin^2 \varphi_k) = A,$$

$$\sum_{k=1}^{n} (|\vec{v}_k|^2 \sin\varphi_k \cos\varphi_k) = 0,$$

što možemo sažeti u sljedeća dva zahtjeva:

$$\sum_{k=1}^{n} (|\vec{v}_k|^2 \cos^2 \varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} (|\vec{v}_k|^2 \sin^2 \varphi_k), \quad \sum_{k=1}^{n} (|\vec{v}_k|^2 \sin\varphi_k \cos\varphi_k) = 0.$$

Još jedan ekvivalentan način da ovo zapišemo je sljedeći:

$$\sum_{k=1}^{n} (|\vec{v}_k|^2 \cos 2\varphi_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} (|\vec{v}_k|^2 \sin 2\varphi_k) = 0. \tag{4}$$

Uočimo da ovaj račun možemo izvrtiti natrag, to jest ako vektori $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ zadovoljavaju (4), onda oni zadovoljavaju (3) za neki $A > 0$.

Uvedimo sada vektore

$$\vec{w}_k = |\vec{v}_k|^2 \cos 2\varphi_k \vec{i} + |\vec{v}_k|^2 \sin 2\varphi_k \vec{j}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Njih nazivamo *dijagram vektorima pridruženim vektorima* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Dakle, dijagram vektor vektora $\vec{v}$ je vektor čija je duljina $|\vec{v}|^2$, a kut koji zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa dvostruko je veći (do na puni krug) od kuta koji vektor $\vec{v}$ zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa.

Prethodna diskusija daje nam sljedeći rezultat.

Teorem 1. Vektori $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V^2$ zadovoljavaju (4) ako i samo ako njihovi dijagram vektori $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ zadovoljavaju

$$\vec{w}_1 + \ldots + \vec{w}_n = \vec{0}.$$

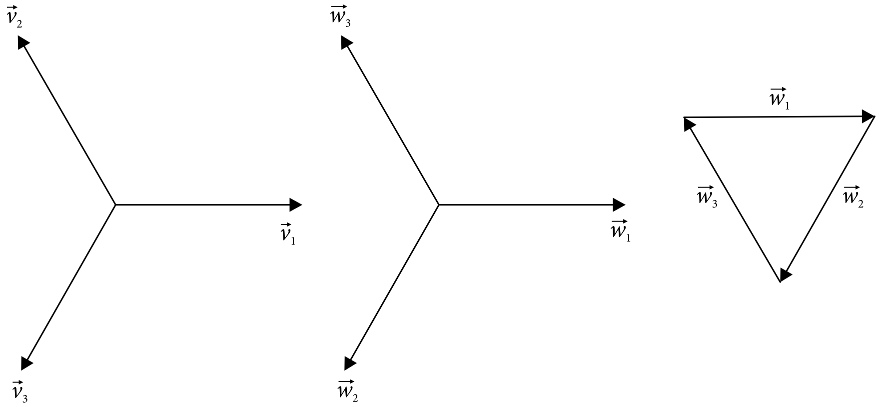
Definicija 1. Niz vektora $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V^2$ koji zadovoljavaju (3) nazivamo *napetim baznim okvirima za* V^2, te *Parsevalovim baznim okvirima za* V^2 ako je $A = 1$, to jest ako zadovoljavaju (2).

Dakle, $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n \in V^2$ čine napeti bazni okvir za V^2 ako i samo ako je zbroj pripadnih dijagram vektora $\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_n$ jednak nulvektoru.

Na primjer, pogledajmo sljedeće vektore:

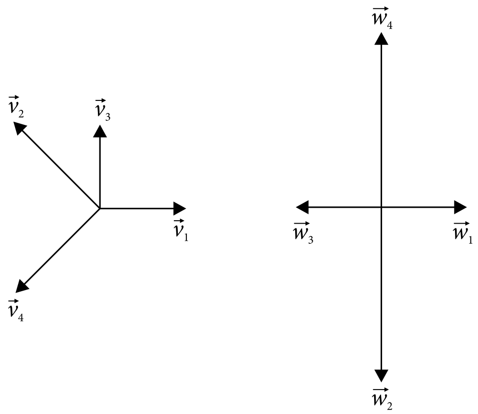
$$\vec{v}_1 = \vec{i}, \quad \vec{v}_2 = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}, \quad \vec{v}_3 = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}.$$

Uočimo da su to vektori iz prvog primjera koje smo normirali. Na sljedećim slikama prikazani su vektori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, te pripadni dijagram vektori $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ i njihov zbroj:

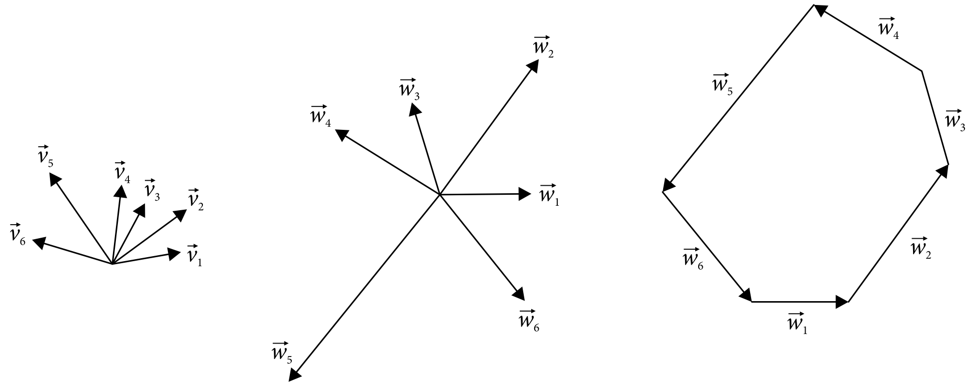


Kako je $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3 = \vec{0}$, prema teoremu 1 zaključujemo da se radi o napetom baznom okviru. Napomenimo da se bazni okvir $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ naziva jedinični Mercedes-Benz bazni okvir, a razlog za taj naziv je očit iz gornje slike.

Sljedeća slika ilustrira vektore iz drugog primjera.



Navedimo još i primjer napetog baznog okvira prostora V^2 koji se sastoji od šest vektora, a čiji prikaz vidimo na slici ispod. Na prvi pogled nije očito da se radi o napetom baznom okviru, no pogledamo li pripadne dijagram vektore i njihovu sumu, zaključujemo da je zaista riječ o napetom baznom okviru.

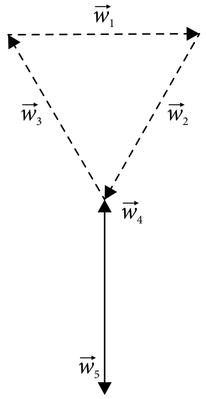


Napomena 1. Uočimo da će dva vektora $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ zadovoljavati (3) ako i samo ako su dijagram vektori $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$ međusobno suprotni vektori. No, tada se lako dobije da $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ moraju biti okomiti i jednakih duljina. Posebno, dva vektora zadovoljavaju (2) ako i samo ako oni čine ortonormiranu bazu.

Za razmišljanje navodimo dva posebna slučaja.

Zadatak 1. Što možemo zaključiti o četveročlanom napetom baznom okviru čiji su svi vektori jedinične duljine?

Zadatak 2. Što možemo zaključiti o baznom okviru čiji su dijagram vektori dani sljedećom slikom?

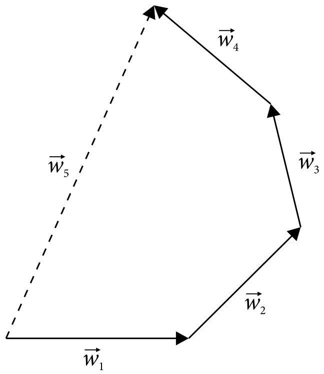


Uočimo i to da nam teorem 1 daje način kako možemo konstruirati napeti bazni okvir za V^2. Naime, uzmemo li neke nenul vektore $\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_n$ za koje vrijedi da je $\vec{w}_1+\dots+\vec{w}_n=\vec{0}$, te onda nađemo njihove „originale", to jest vektore $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ čiji su dijagram vektori upravo $\vec{w}\ ,\dots,\vec{w}\ $, onda će $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ činiti napeti bazni okvir za V^2.

Također, teorem 1 govori nam o nadopunjavanju zadanog niza vektora do napetog baznog okvira za V^2. Neka su nam zadani vektori $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ koji ne zadovoljavaju (3) ni za koji $A>0$. Tada to znači da je vektor

$$\vec{w}_{n+1} := -\vec{w}_1-\dots-\vec{w}_n$$

različit od $\vec{0}$.



Ako je $\vec{v}_{n+1}$ vektor čiji je dijagram vektor upravo $\vec{w}_{n+1}$, onda je jasno da $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n+1}$ čine napeti bazni okvir za V^2.

Malo općenitije

Pojam baznih okvira definira se za mnogo širu klasu vektorskih prostora nego što je V^2. Ovdje ćemo se ograničiti na konačnodimenzionalne unitarne prostore V. Pritom će nam $\langle v,w\rangle$ biti oznaka za skalarni produkt vektora $v,w\in V$, a $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ norma od v definirana pomoću tog skalarnog produkta.

Definicija 2. Kažemo da vektori $v_1,\dots,v_n$ u unitarnom prostoru V čine *bazni okvir* unitarnog prostora V ako postoje pozitivne konstante A i B takve da vrijedi

$$A\|v\|^2\le\sum_{k=1}^{n}\left|\langle v,v_k\rangle\right|^2\le B\|v\|^2,\quad \forall v\in V. \tag{5}$$

Konstante A i B nazivamo *donjom i gornjom granicom baznog okvira*. Ako je $A=B$, tada govorimo o *napetom baznom okviru*, odnosno *Parsevalovom* ako je $A=B=1$.

Brojeve $\langle v,v_1\rangle,\dots,\langle v,v_n\rangle$ nazivamo *koeficijenti vektora v s obzirom na bazni okvir* $v_1,\dots,v_n$.

U svakom prostoru V možemo naći bazne okvire jer je svaka ortonormirana baza unitarnog prostora V jedan Parsevalov bazni okvir za V. Prisjetimo se da je ortonormirana baza prostora, po definiciji, ona baza prostora čiji su svi vektori jedinične duljine i međusobno su okomiti. Ako je zadana bilo koja baza, onda primjenjujući, na primjer, Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije dolazimo do ortonormirane baze.

Nadalje, iz zadane ortonormirane baze možemo konstruirati nove bazne okvire za V.

Primjer 3. Neka je $e_1,\ldots,e_m$ ortonormirana baza zaa V.

Dodamo li ovoj ortonormiranoj bazi prvi vektor m puta, dobit ćemo niz vektora

$$e_1,\ldots,e_1,e_1,e_2,e_3,\ldots,e_m,$$

koji je bazni okvir za V. Zaista, za svaki $v \in V$ vrijedit će

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{k=1}^{m} \left|\langle v,e_k\rangle\right|^2 \\ &\leq m\cdot\left|\langle v,e_1\rangle\right|^2 + \sum_{k=1}^{m}\left|\langle v,e_k\rangle\right|^2 \\ &= m\cdot\left|\langle v,e_1\rangle\right|^2 + \|v\| \\ &\leq m\cdot\|v\|^2\cdot\|e_1\|^2 + \|v\|^2 \\ &= (m+1)\cdot\|v\|^2. \end{aligned}$$

Prema tome, promatrani niz je bazni okvir za V s granicama 1 i $m+1$. Uočimo da su 1 i $m+1$ optimalne granice baznog okvira (optimalne u smislu da je 1 najveća donja, a $m+1$ najmanja gornja granica). Naime, za $v = e_1$ na mjestu prve nejednakosti u prethodnom računu zapravo stoji jednakost, a za $v = e_2$ na mjestu je druge nejednakosti prethodnog računa jednakost.

Napomenimo još da smo u drugoj nejednakosti primijenili Cauchy-Schwarz-Bunjakovskijevu nejednakost $|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\ ||w||$ koja vrijedi u svakom unitarnom prostoru.

Primjer 4. Neka je $e_1,\ldots,e_m$ ortonormirana baza od V. Niz vektora $e_1,e_1,e_2,e_2,e_3,e_3,\ldots,e_m,e_m$ je napet bazni okvir Hilbertovog prostora V s granicama $A = B = 2$.

Primjer 5. Ako su $f_1,\ldots,f_m$ i $e_1,\ldots,e_m$ dvije ortonormirane baze za V, onda njihova unija daje jedan napeti bazni okvir za V s granicama 2.

Uočimo da svaki konačan niz vektora $v_1,\dots,v_n$ zadovoljava desnu nejednakost u (5), naravno uz uvjet da barem jedan od ovih vektora nije nulvektor. Naime, prema Cauchy-Schwarz-Bunjakovskijevoj nejednakosti slijedi

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\langle v,v_k\rangle\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}\ \|v_k\|\right)^2 \cdot\ \|v\|^2$$

za svaki $v\in V$, pa možemo uzeti $B=\sum_{k=1}^{n}\|v_k\|^2$. Prema tome, naglasak je u postojanju donje granice (barem je tako u konačnodimenzionalnim slučajevima).

Može se pokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2. Konačan niz vektora $v_1,\dots,v_n$ u V je bazni okvir za V ako i samo ako je on sustav izvodnica za V.

Jedno od najvažnijih svojstava baznih okvira sadržano je u sljedećem teoremu.

Teorem 3. Neka je $v_1,\dots,v_n$ bazni okvir za V. Tada postoje vektori $w_1,\dots,w_n$ u V takvi da za sve $v\in V$ vrijedi

$$v=\sum_{k=1}^{n}\langle v,v_k\rangle w_k. \tag{6}$$

Ako je $v_1,\dots,v_n$ napeti bazni okvir s granicom A, onda možemo uzeti $w_k=\frac{1}{A}v_k, k=1,\dots,n.$

Kažemo da vektori $w_1,\dots,w_n$ čine *dualni bazni okvir* baznog okvira $v_1,\dots,v_n$. Formulu (6) nazivamo *rekonstrukcijskom formulom*.

To znači da se svaki vektor $v\in V$ može rekonstruirati na osnovi koeficijenata $\langle v,v_k\rangle, k=1,\dots,n,$ vektora v s obzirom na bazni okvir $v_1,\dots,v_n,$ ako znamo neki njegov dualni bazni okvir (općenito, dualni bazni okviri nisu jedinstveni).

Sjetimo se da smo davno naučili da ortonormirane baze imaju ovo svojstvo. Naime, za ortonormiranu bazu $e_1,\dots,e_m$ vrijedi

$$v=\sum_{k=1}^{m}\langle v,e_k\rangle e_k,\quad v\in V.$$

Zašto onda bazni okviri ako već imamo ortonormirane baze pomoću kojih možemo rekonstruirati vektore?

Odgovor ćemo pokušati dati bez ulaženja u detalje. Kao što znamo, bazni okviri, stoga i ortonormirane baze, skupovi su izvodnica prostora. S druge strane, iz prethodnih primjera uočavamo da bazni okviri ne moraju biti linearno nezavisni skupovi, dok ortonormirane baze to jesu. To znači da, ukoliko uklonimo neki vektor iz ortonormirane baze, ostatak vektora sigurno neće biti skup izvodnica prostora, pa se neki vektori prostora neće moći rekonstruirati pomoću preostalih vektora iz te baze. Kod baznih okvira (ukoliko nisu baze, to jest ako čine linearno zavisan skup) neki se vektori mogu ukloniti, a ono što ostane novi je skup izvodnica, to jest novi bazni okvir prostora, pa se i pomoću tih preostalih vektora može rekonstruirati svaki vektor prostora.

Naravno, prethodno objašnjenje vjerojatno će proizvesti novo pitanje: zašto bismo uklanjali neki vektor iz baznog okvira ili ortonormirane baze?

Bazni se okviri koriste pri prijenosu signala. Ako je v signal, onda se prvo taj signal analizira, to jest izračunaju se koeficijenti $\langle v, v_k \rangle$ s obzirom na neki bazni okvir $v_1, \ldots, v_n$, a nakon prijenosa se signal sintetizira, to jest primijeni se rekonstrukcijska formula (6) (s obzirom na neki dualni bazni okvir $w_1, \ldots, w_n$) kako bismo dobili signal v.

Međutim, pri prijenosu podataka neki se od koeficijenata $\langle v, v_k \rangle$ mogu oštetiti ili izgubiti. U tom je slučaju dobro ako se iz onih sačuvanih i neoštećenih podataka može rekonstruirati signal v. Ako smo za bazni okvir uzeli ortonormiranu bazu $e_1, \ldots, e_m$, onda gubljenje bilo kojeg od koeficijenata $\langle v, e_k \rangle$ može prouzročiti nemogućnost rekonstrukcije vektora. Na primjer, ako je $v = e_1$ i pri prijenosu podataka izgubljen je koeficijent $\langle v, e_1 \rangle$, onda se v neće moći rekonstruirati iz koeficijenata $\langle v, e \rangle, \ldots, \langle v, e \rangle$ (koji svi iznose 0).

S druge strane, ako imamo, na primjer, bazni okvir $v_1, \ldots, v_n$ takav da je i $v_2, \ldots, v_n$ bazni okvir za V, onda signal v (za bilo koji v) možemo rekonstruirati i bez koeficijenta $\langle v, v_1 \rangle$. Naime, ako je $z_2, \ldots, z_n$ dual baznog okvira $v_2, \ldots, v_n$, onda vrijedi

$$v = \sum_{k=2}^{n} \langle v, z_k \rangle z_k,$$

a za ovo nam očito ne treba koeficijent $\langle v, v_1 \rangle$. Prema tome, kada govorimo o uklanjanju vektora iz baznog okvira, onda zapravo mislimo na gubljenje određenih koeficijenata u formuli (6).

Od interesa je konstruirati primjere baznih okvira koji imaju svojstvo da se uklanjanjem raznih (jednog ili više) vektora očuva svojstvo razapinjanja prostora, to jest takvih da i ostatak vektora čine bazni okvir prostora. O konstrukciji takvih baznih vektora i načinima rekonstrukcije vektora pomoću "krnjeg" baznog okvira postoje mnogi znanstveni i stručni radovi (na primjer, vidjeti 1, 2, 3, 7).

Literatura

1. Lj. Arambašić, D. Bakić, *Dual frames compensating for erasures*, Glasnik matematički, 52(1) 2017., 131-146.
2. Lj. Arambašić, D. Bakić, *Full spark frames and totally positive matrices*, prihvaćeno u Linear and Multilinear Algebra
3. D. Han, W. Sun, *Reconstruction of signals from frame coefficients with erasures at unknown locations*, IEEE Trans. Inform. Theory 60 (2014.), no. 7, 4013-4025.
4. D. Han, K. Kornelson, D. Larson, E. Weber, *Frames for undergraduates*, AMS, Providence, 2007.
5. K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2003.
6. M. Kolarek, *Bazni okviri konačnodimenzionalnih Hilbertovih prostora*, diplomski rad, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2018. (mentor: Ljiljana Arambašić)
7. D. Larson, S. Scholze, *Signal reconstruction from frame and sampling erasures*, J. Fourier Anal. Appl. 21 (2015.), no. 5, 1146-1167.