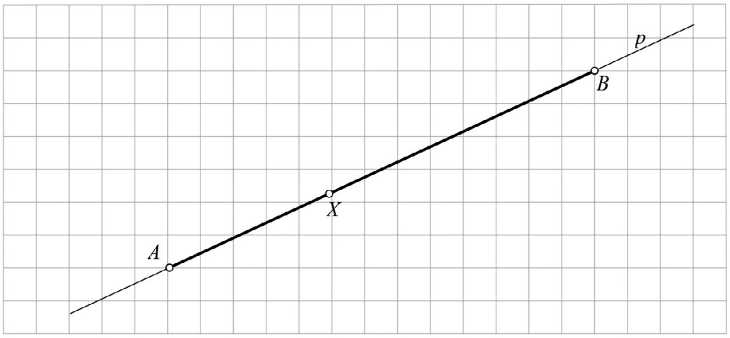
Isto a različito[1]

Petar Mladinić[2] i Nikol Radović[3]

Sažetak: Zamislite da živite u Nigdjezemskoj gdje vrijede malo drugačija pravila nego u Euklidiji (zemlja u kojoj vrijedi euklidska geometrija). U Nigdjezemskoj se može pomicati gore – dolje (točnije, smjer sjever – jug) ili lijevo – desno (točnije istok – zapad). Udaljenost točaka u Euklidiji i Nigdjezemskoj definirana je različito. Znači li to da je kružnica iz Euklidije u Nigdjezemskoj neka druga geometrijska figura? Što je s ostalim geometrijskim figurama kao što su veličina kuta, simetrala dužine, simetrala kuta, poučcima sukladnosti, elipsi, trigonometrijskoj kružnici? Možemo li naći poveznicu s figurama u prirodi? Kroz ove „probleme" pokazat ćemo kako vizualizirati iste geometrijske figure definirane u različitim metrikama. Primjenom ovog pristupa problemu učenici će naučiti otkrivati i spoznati mnoge „nove" činjenice geometrije koja se uči od osnovne škole, te uvidjeti kako je ideja generalizacije i poopćenja moćan matematički alat u nastavi i znanosti.

Ključne riječi: taksi geometrija, udaljenost dviju točaka, geometrija Minkovskog, program dinamične geometrije, Gielisova metrika

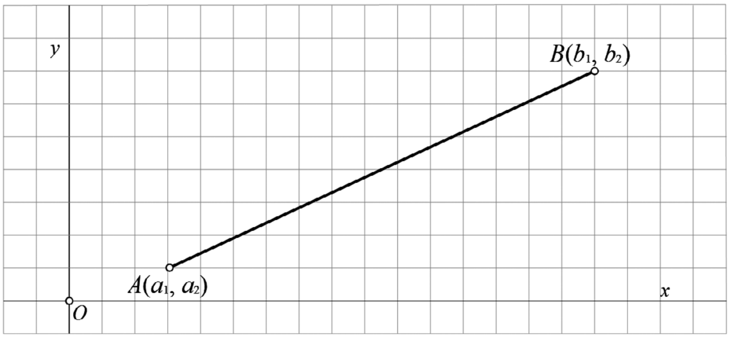
Euklidija je „zemlja" u kojoj su temeljni pojmovi točka, pravac i ravnina. Vrijede svi teoremi, aksiomi *Euklidske geometrije*. Dužinu definiramo kao dio pravca omeđenog dvjema točkama. Definiciju možemo zapisati kao skup $\{X : d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)\}$, Slika 1.



Slika 1.

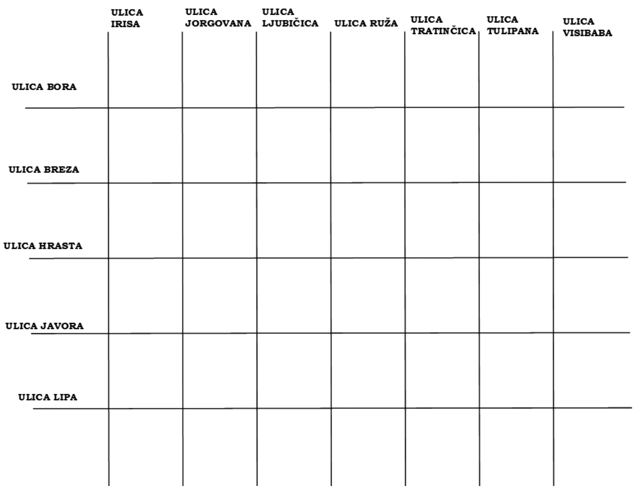
[1]Predavanje održano na 8. kongresu nastavnika matematike RH, 2018. godine u Zagrebu,
[2]Petar Mladinić, Zagreb
[3]Nikol Radović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb

Dužini $\overline{AB}$ možemo izmjeriti duljinu dužine, točnije ako su rubne točke dužine A i B u Kartezijevom pravokutnom koordinatnom sustavu xOy zadane koordinatama, Slika 2. duljina dužine jednaka je $d_E(A,B)=|AB|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$



Slika 2.

U zemlji Nigdjezemskoj vrijede malo drugačija pravila. Mogući su pomaci gore – dolje (točnije, smjer sjever – jug) ili lijevo – desno (točnije istok – zapad). Ovi pomaci slični su vožnji automobilom cestama koje su međusobno usporedne / okomite te jednako razmaknute, Slika 3.



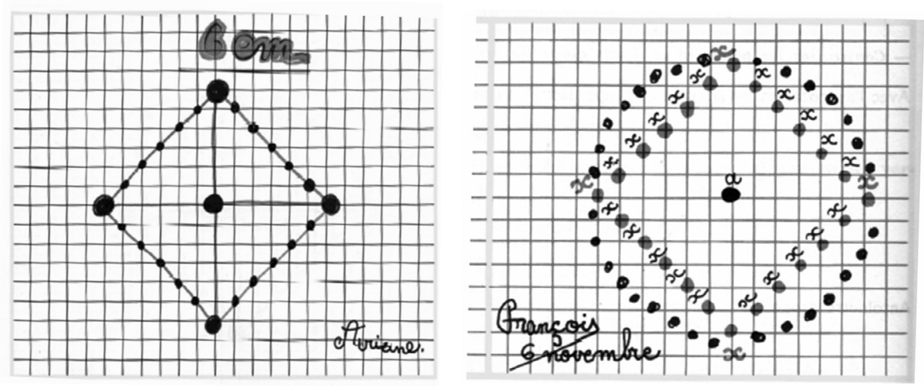
Slika 3.

Pri rješavanju problema povezanih s vožnjom ulicama grada po okomitim / usporednim ulicama moramo se prisjetiti što znači vožnja automobilom ulicama grada. Naime, ne možemo se voziti preko različitih građevina, nego se moramo voziti po ulicama. Na ista razmišljanja i promišljanja nailaze i vozači taksija.

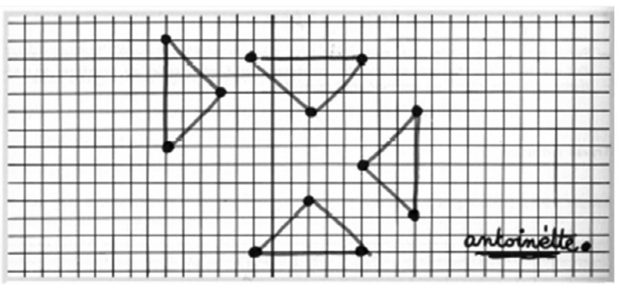
Geometrija koja vrijedi u Nigdjezemskoj poznata je i kao geometrija taksista. Njemački matematičar *Hermann Minkowski* (1865. – 1909.) prvi je matematički izložio temelje nove geometrije. Austrijski matemtičar *Karl Menger* (1902. – 1985.), u nastojanju da je približi nematematičarima, uporabio je naziv *taxicab geometry* odnosno *Manhatan geometry* (jer su ulice u New Yorku međusobno okomite ili uporedne), Slika 4.

Slika 4.

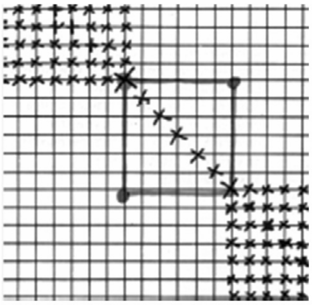
Belgijska matematičarka *Frédérique Papy* (1921. – 2005.) otišla je korak dalje. U okviru projekta iz 1969. godine uspješno je pokazala i dokazala da i mala djeca mogu usvojiti „visoku" matematiku, sukladno uzrastu i odgovarajućoj razini matematičke apstrakcije. U knjizi *Les enfants et la mathematique* objavila je svoje zadatke i uratke djece u dobi od 8 do 9 godina. Na Slici 5. prikaz je rješenja istog zadatka – *Na karti New Yorka (prikazanoj kvadratnom mrežom) označena je točka. Treba označiti sve točke koje su za 6 jedinica udaljene od nje.* Time ilustriramo da djeca na različite načine vizualiziraju rješavanje postavljenog zadatka primjenom naučenih matematičkih / geometrijskih vještina.



Slika 5. Rješenje Ariane i Francoisa



Slika 6. Antoinette crta jednakostranične trokute

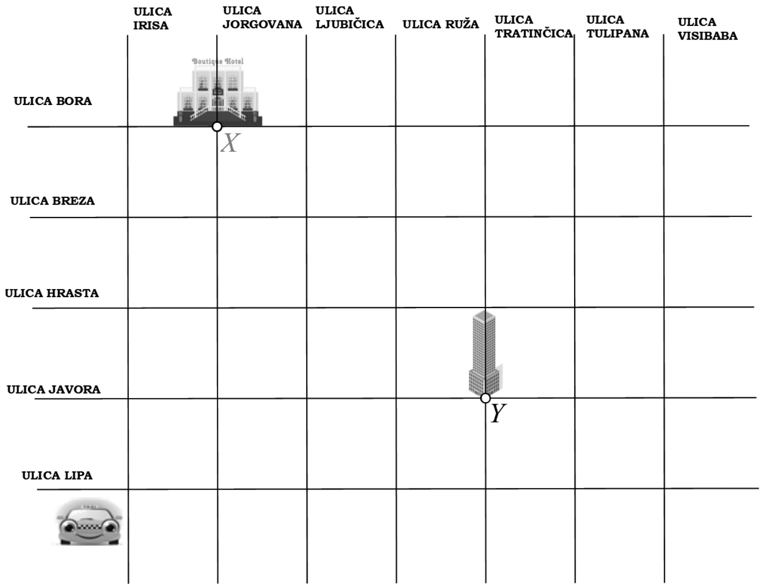


Slika 7. François Sanchez crta simetralu dužine

Na taj način istražujemo i ostale vizualizacije i poopćenja koja ćemo prikazati kroz primjere i zadatke, s posebnim naglaskom na primjenu mogućnosti programa dinamične geometrije *Sketchpad* 5.03 HR. Cilj je postizanje najviše van Hieleove razine (5. razine) u matematičkom poučavanju i učenju u osnovnoj i srednjoj školi, čemu svi težimo [8].

Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 1. Taksist iz tvrtke *Brzimski* mora odvesti gosta iz hotela do poslovne zgrade na jedan važan sastanak. Taksist želi stići što prije jer mu je obećan bonus. Što mu je činiti? Može li voziti po „*spojnici*" točaka X i Y?



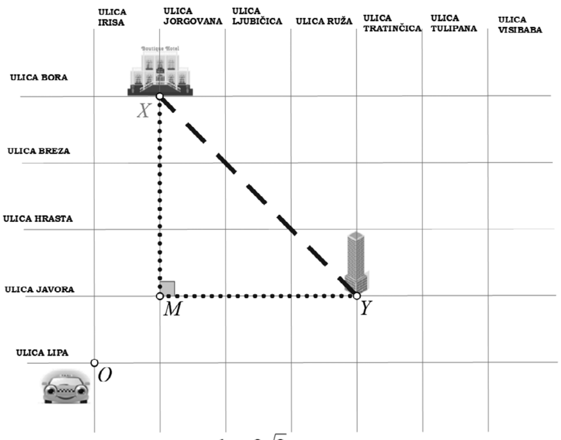
Slika 8.

Vožnja po dužini $\overline{XY}$ bila bi rješenje u Euklidiji, Slika 9.a) Ne smijemo zaboraviti da vožnja preko građevina nije dopuštena. Naime, iako su točke točke, dužine dužine i pravci pravci, međusobno okomiti velika je razlika u kretanju. U Euklidiji se možemo pomicati svuda, dok je u Nigdjezemskoj kretanje definirano sjever – jug ili istok – zapad, što ima za posljedicu da je udaljenost točaka *drugačije* definirana u Nigdjezemskoj.

U Nigdjezemskoj se udaljenost točaka A i B definira kao

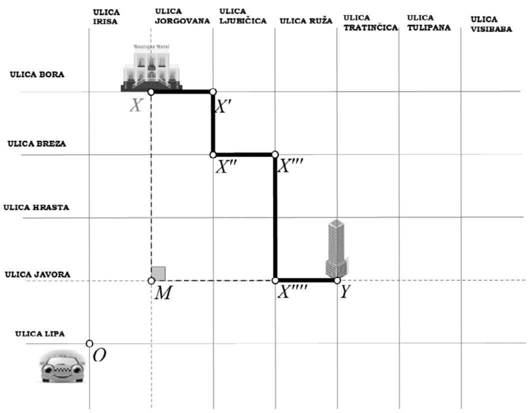
$$|AB| = d_M(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|.$$

Riješimo **Primjer 1.**



$d_E = 3\sqrt{2}$

Slika 9. a)



$d_M = 6$

Slika 9. b)

Možemo reći da je daljenost točaka X i Y u Euklidiji jednaka najkraćoj udaljenost tj. *duljini hipotenuze pravokutnog trokuta* ΔXMY, dok je u Nigdjezemskoj udaljenost točaka X i Y jednaka *zbroju duljina kateta istog* pravokutnogt trokuta ΔXMY, Slika 9. b).

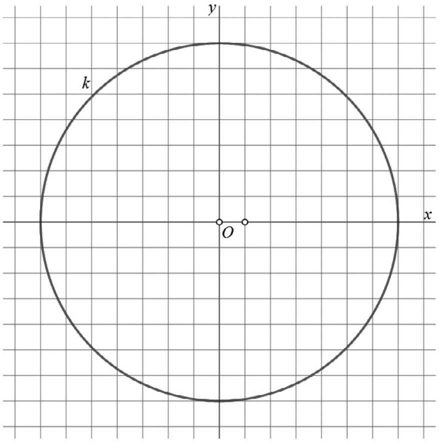
Kroz primjere pogledajmo posljedice ove malo drugačije definirane udaljenosti na ostalim nam znanim geometrijskim figurama iz Euklidije u Nigdjezemskoj.

Primjer 2. Nacrtajmo sve točke X ravnine, za koje u koordinatnoj ravnini vrijedi:

a) $d_E(O,X) = 7$ mjernih jedinica,

b) $d_M(O,X) = 7$ mjernih jedinica.

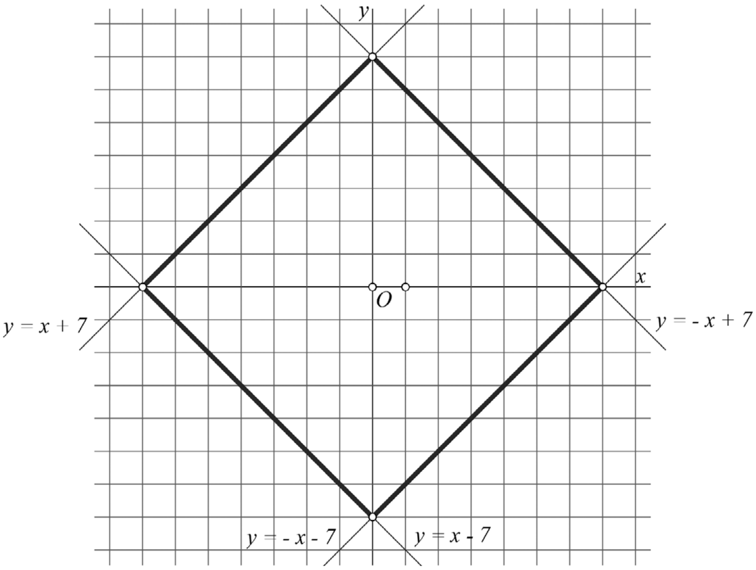
a) Iz defincije udaljenosti u Euklidiji možemo pisati $d_E(O,X) = 7 \rightarrow d_E(O,X) = \sqrt{x^2 + y^2} = 7 \rightarrow x^2 + y^2 = 49$, tj. skup svih točaka X za koje vrijedi $d_E(O,X) = 7$ definira kružnicu k sa središtem u ishodištu koordinatne ravnine, duljine polumjera 7 mjernih jedinica, Slika 10. Zvat ćemo je E-kružnica.



Slika 10. E-kružnica

b) Iz defincije udaljenosti u Nigdjezemskoj možemo pisati: $d_M\left(O,X\right)=7 \rightarrow$ $\left|x\right|+\left|y\right|=7$ (*). Rješenje je *M*-kružnica. Ravnina je podijeljena na dijelove. Razlikujemo područja u kojima treba odrediti točke za koje vrijedi (*):

1. Za područje definicije (I. kvadrant) $x \geq 0, y \geq 0$ dobivamo $x + y = 7$ tj. $y = - x + 7$. Geometrijski gledano, rješenje je *dio pravca u prvom kvadrantu pravokutnog Kartezijevog koordinatnog sustava*.
2. Za područje definicije (II. kvadrant) $x \leq 0, y \geq 0$ dobivamo $-x + y = 7$ tj. $y = x + 7$.
3. Za područje definicije (III. kvadrant) $x \geq 0, y \leq 0$ dobivamo $-x - y = 7$ tj. $y = -x - 7$.
4. Za područje definicije (IV. kvadrant) $x \leq 0, y \leq 0$ dobivamo $x - y = 7$ tj. $y = x - 7$.



Slika 11. M-kružnica

Prisjetimo se, točka P je između točaka M i N ako je $P \in \overline{MN}$, odnosno ako vrijedi: $|MP|+|PN|=|MN|$. Za točke M, N i P za koje vrijedi ova jednakost kažemo da su *kolinearne*.

Za tri kolinearne točke $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$ u M-geometriji (u Nigdjezemskoj) vrijedi

$$d_M(A,C)+d_M(C,B)=d_M(A,B),$$

odnosno

$$|a_1-c_1|+|a_2-c_2|+|c_1-b_1|+|c_2-b_2|=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|.$$

Primjer 4. Odredimo skup točaka $X(x, y)$ koje se nalaze između točaka $A(-2, -1)$ i $B(3, 2)$ i nacrtajmo M-dužinu $\overline{AB}$.

Za točku X koja se nalazi između točaka A i B vrijedi:

$$d_M(A,X)+d_M(X,B)=d_M(A,B).$$

Uvrštavanjem poznatih koordinata točaka A i B dobivamo izraz:

$$|-2-x|+|-1-y|+|x-3|+|y-2|=8.$$

Karakteristični pravci su: $x = -2$, $y = -1$, $x = 3$, $y = 2$. Oni dijele ravninu na područja.

Razlikujemo nekoliko slučajeva:

1. Za područje $x \geq 3$, $y \geq 2$ dobivamo

$$-(-2-x)+(-(-y-1))+x-3+y-2=8$$

odnosno $y=-x+5$. U ovom području samo točka (3, 2) zadovoljava ovu jednadžbu.

2. Za područje $-2 \leq x \leq 3$, $y \geq 2$ dobivamo

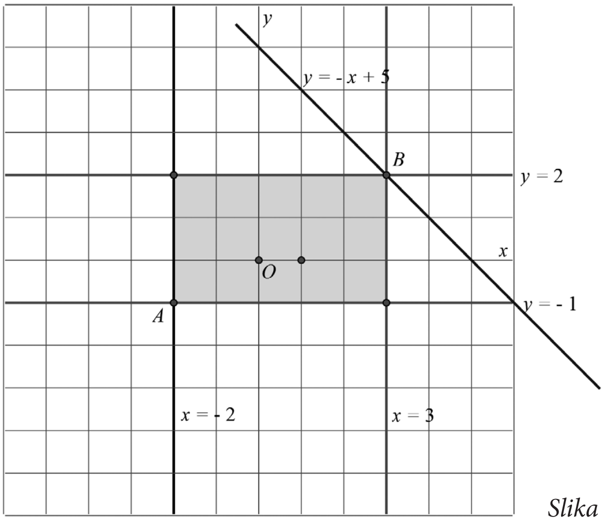
$$-(-2-x)+(-(-y-1))+(-(x-3))+y-2=8$$

   odnosno $y = 2$. U ovom području samo je dio pravca čije točke zadovoljavaju jednadžbu M-dužine.

3. Za područje $-2 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 2$ dobivamo $x+2+y+1-x+3-y+2=8$ odnosno $8 = 8$. To znači da sve točke tog područja pripadaju M-dužini.

   Za ostala područja ne nalazimo točke koje zadovoljavaju jednadžbu M-dužine.

Dužina $\overline{AB}$, Slika 12., u M-geometriji za $a_1 \neq b_1$ i $a_2 \neq b_2$ *pravokutnik* je kojemu su točke A i B nasuprotni vrhovi, a nasuprotne stranice usporedne su s koordinatnim osima.



Slika 12. M-dužina

Zadatak 1. Za dane točke A i B definiramo M-polupravac $\overrightarrow{AB}$ kao skup točaka X takvih da vrijedi

$$\left\{X : d_M(A,X)+d_M(X,B)\right\}=d_M(A,B)\cup\left\{X : d_M(A,B)+d_M(B,X)\right\}=d_M(A,X).$$

Odredite i nacrtajte M-polupravac $\overrightarrow{AB}$ određen početnim točkama $A(-2, -1)$ i $B(3, 2)$.

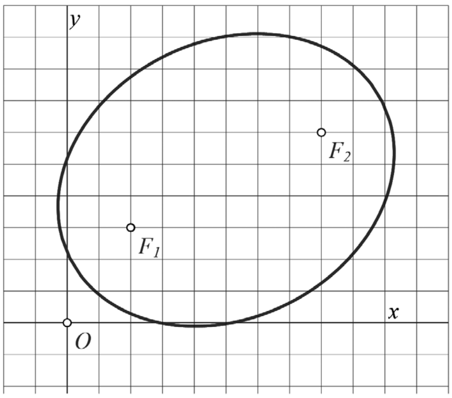
Zadatak 2. Odredite i nacrtajte pravac zadan točkama $A(-2, -1)$ i $B(3, 2)$.

Elipsa je skup svih točaka T neke ravnine za koje vrijedi da je zbroj udaljenosti od dviju čvrstih točaka F_1 i F_2 stalan i jednak $t > 0$. Međusobna udaljenost točaka F_1 i F_2 manja je od t, pa možemo pisati

$$\text{Elipsa} = \left\{T \vdots \left|TF_1\right|+\left|TF_2\right|=t, t>0, \left|F_1F_2\right|<t\right\}.$$

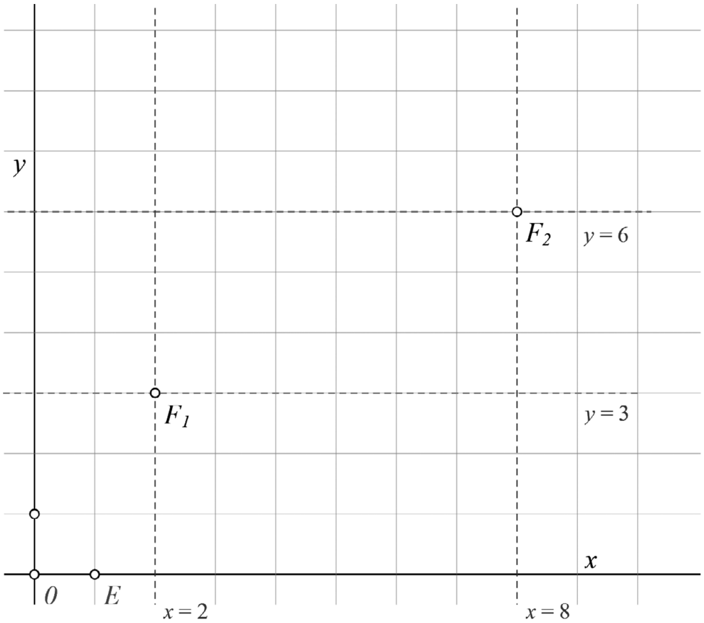
Primjer 5. Zadane su točke $F_1(2, 3)$ i $F_2(8, 6)$ i neka je $t = 11$. Nacrtajmo: a) E-elipsu, b) M-elipsu.

a)



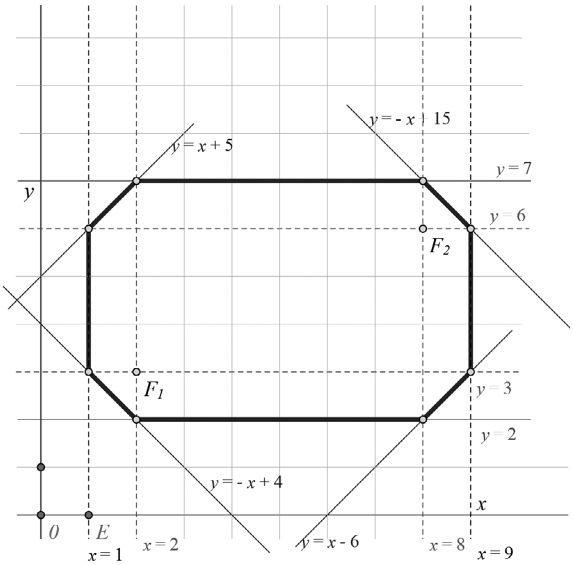
Slika 13. E-elipsa

b) Iz definicije M-udaljenosti i M-elipse slijedi da za svaku točku $T(x, y)$ vrijedi $|x-2|+|y-3|+|x-8|+|y-6|=11$. Četiri karakteristična pravca $x = 2$, $y = 3$, $x = 8$ i $y = 6$ dijele ravninu na 9 dijelova, Slika 14.



Slika 14.

Svaki od tih dijelova ravnine pretražujemo u „potrazi" za točkama koje definiraju M-elipsu, Slika 15.

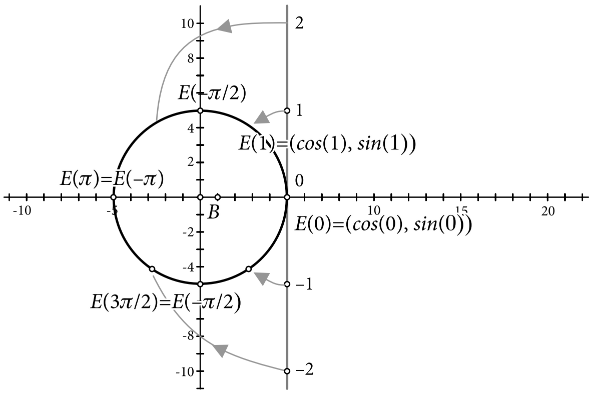


1. $x \geq 8, y \geq 6 \quad \Rightarrow \quad y = -x + 15$
2. $2 \leq x \leq 8, y \geq 6 \quad \Rightarrow \quad y = 7$
3. $x \leq 2, y \geq 6 \quad \Rightarrow \quad y = x + 5$
4. $x \leq 2, 3 \leq y \leq 6 \quad \Rightarrow \quad x = 1$
5. $x \geq 8, 3 \leq y \leq 8 \quad \Rightarrow \quad x = 9$
6. $x \geq 8, y \leq 3 \quad \Rightarrow \quad y = x - 6$
7. $2 \leq x \leq 8, y \leq 3 \quad \Rightarrow \quad y = 2$
8. $x \leq 2, y \leq 3 \quad \Rightarrow \quad y = -x + 4$
9. $2 \leq x \leq 8, 3 \leq y \leq 6 \quad \Rightarrow \quad 9 = 11 \Rightarrow \varnothing$

Slika 15.

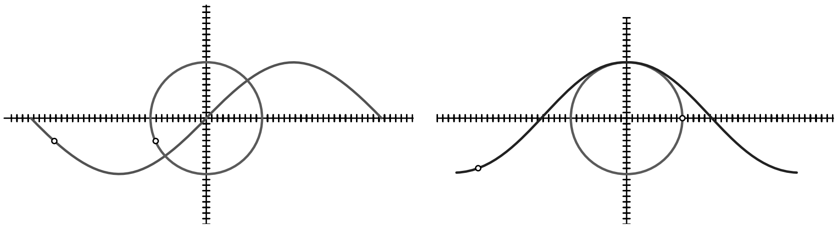
Zadatak 3. Nacrtaje: a) E-parabolu, b) M-parabolu.

Primjer 6. Trigonometrijska kružnica je kružnica sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Kada je polumjer $r = 1$, zove se jednična trigonometrijska kružnica. Svakom realnom broju x eksponencijalnim namatanjem pridružena je jedna točka trigonometrijske kružnice, Slika 16.



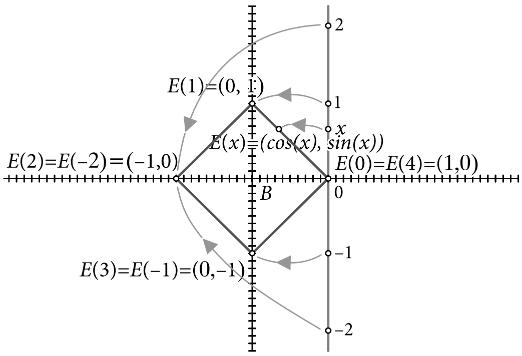
Slika 16.

Naime, ako vizualiziramo jediničnu trigonometrijsku kružnicu, onda možemo nacrtati E-sinusoidu i E-kosinusoidu, Slika 17.

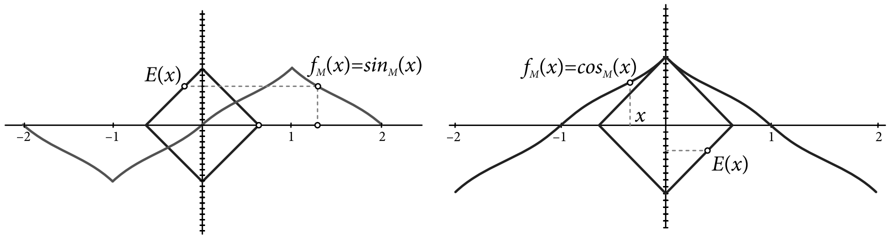


Slika 17.

Nacrtajmo u Nigdjezemskoj jediničnu trigonometrijsku kružnicu i eksponencijalno namatanje, Slika 18.



Slika 18.



Slika 19.

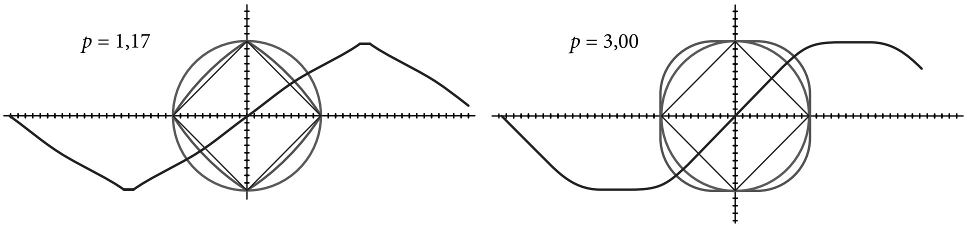
Postavlja se pitanje postoje li i druge jedinične trigonometrijske kružnice, tj. kružnice izvan Euklidije i Nigdjezemske?

Znamo da su udaljenosti točaka O i T s koordinatama $O(0, 0)$ i $T(x, y)$ u Nigdjezemskoj definirane kao $d_M(O,T)=|x|+|y|$ odnosno Euklidiji definirane kao $d_E(O,T)=\sqrt{x^2+y^2}=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(|x|^2+|y|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

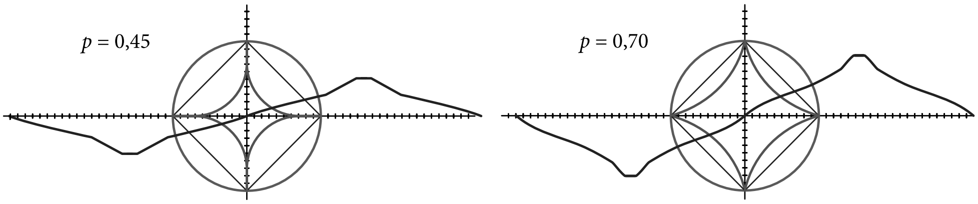
Analogija nam sugerira da općenito definiramo udaljenost kao

$$d_P(O,T)=\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p\in\mathbb{R}$$

Primjer 7. Na Slikama 20. i 21. nacrtane su P-kružnice i P-sinusoide za različite vrijednosti parametra p.



Slika 20.



Slika 21.

Sada do izražaja dolazi dinamičnost programa jer omogućava dinamičnu promjenu parametra, kao i vraćanje unazad i uočavanje nekih svojstava koja ne bi bila tako uočljiva pri klasičnoj olovka / papir vizualizaciji.

P-kružnice kao krivulje 1818. godine proučavao je francuski matematičar **Gabriel Lamé** (1795. – 1870.) i po njemu su dobile ime – Laméove krivulje.

Analogija koja se može uočiti proučavanjem udaljenosti točaka O i T u Euklidiji i Nigdjezemskoj daje ideju za udaljenost bilo kojih dviju točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u P-geometriji,

tj. vrijedi:

$$|AB| = \begin{cases} |x_1 - x_2|^1 + |y_1 - y_2|^1 & M - geometrija \\ \left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2\right)^{\frac{1}{2}} & E - geometrija \\ \left(|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p \in \mathbb{R}^+ & P - geometrija \end{cases}$$

U Laméovu jednadžbu jedinične trigonometrijske kružnice $|x|^p + |y|^p = 1$ „uvedimo" parametre a i b prema analogiji s jediničnom kružnicom $x^2 + y^2 = 1$ iz E-geometrije kad kružnica „prelazi" u elipsu

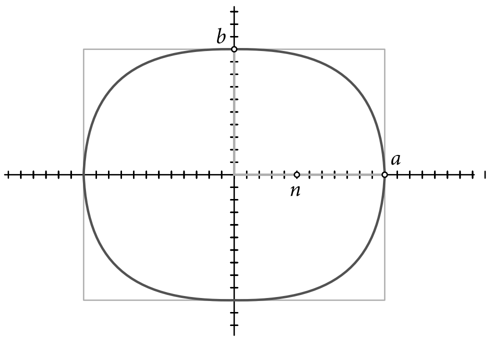
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Na taj način dobiva se Laméova trigonometrijska P-elipsa

$$\left|\frac{x}{a}\right|^p + \left|\frac{y}{b}\right|^p = 1, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ p > 0.$$

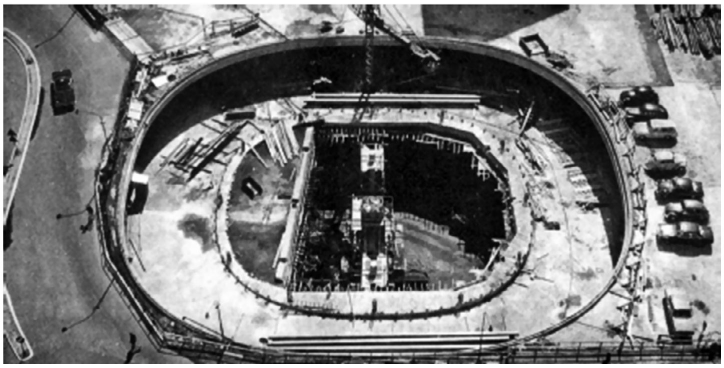
Parametar a naziva se *velika poluos*, odnosno b je *mala poluos*.

Primjer 8. Na Slici 22. nacrtana je P-elipsa za $p = 2.5$, $a = 6$, $b = 5$.



Slika 22.

Ovu P-elipsu „otkrio" je, neovisno o Laméu, danski pjesnik, izumitelj i dizajner **Piet Hein** (1905. – 1966.) dizajnirajući Sergels Torg u Stocholmu 1959. godine, a kasnije i stol s parametrima $p = 2.5$, $a = 3$, $b = 2$, slika 20. Nazvao ju je *superelipsa*.



Slika 23.

Znajući vezu između Kartezijevog i polarnog koordinatnog sustava, moguće je Laméovu *P*-elipsu zapisati u polarnom obliku: $r=\left(\left|\frac{\cos\varphi}{a}\right|^p+\left|\frac{\sin\varphi}{b}\right|^p\right)^{-\frac{1}{p}}$.

Korak dalje u poopćavanju *P*-elipse učinio je belgijski biolog i matematičar **Johan Gielis** (1962.) koji je 2003. godine formulirao tzv. *Gielisovu superformulu*. Gielis je proučavao brojne oblike živog i neživog u prirodi, Slika 24.

Slika 24.

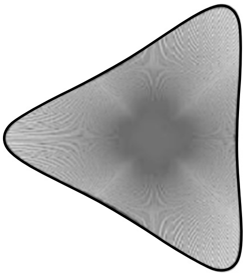
Shvatio je da je oblike iz svijeta koji nas okružuje moguće opisati jednom formulom. Poznavajući Heinov, a posebice Laméov rad, došao je na ideju što treba učiniti. Uveo je tri eksponenta - n_1, n_2 i n_3 - te novi parametar $\frac{m}{4}$, čime je povećao broj rotacijskih simetrija oko ishodišta *O* koordinatnog sustava i odbacio ideju da eksponenti moraju biti jednaki. Jednostavno rečeno, poopćio je Laméovu formulu i dobio formulu kojom je moguće nacrtati različite oblike iz prirode:

$$r=\left(\left|\frac{\cos\left(\frac{m}{4}\varphi\right)}{a}\right|^{n_2}+\left|\frac{\sin\left(\frac{m}{4}\varphi\right)}{b}\right|^{n_3}\right)^{-\frac{1}{n_1}}\quad a,b,n_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ n_2,n_3>0.$$

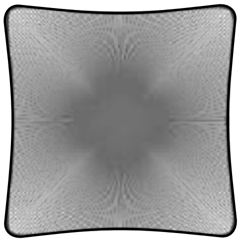
Gielesova formula može se smatrati poopćenjem Pitagorinog teorema.

Primjer 9. Na idućim slikama nacrtani su neki primjeri u kojima je $a = b$.

$m = 3$
$a = 1.00$
$b = 1.00$
$n_1 = 4.5$
$n_2 = 10.0$
$n_3 = 10.0$



$m = 4$
$a = 1.00$
$b = 1.00$
$n_1 = 12.0$
$n_2 = 15.0$
$n_3 = 15.0$



Slika 25.

Literatura:

1. Battista, M. T.; Clements, D. H. (1995.): *Geometry and Proof*, The Mathematics Teacher, Vol. 88, No. 1, 48 – 54.
2. Divjak, B. (2000.): Notes on Taxicab Geometry, KOG. 5 – 9.
3. Gardner, M. (2001.): *The Colossal Book of Mathematics*, W. W. Norton, New York.
4. Gielis, J. (2003.): *Inventig the Circle – The geometry of Nature*, Geniaal bvba, Antwerpen.
5. Gielis, J. (2017.): *The Geometrical Beauty of Plants*, Atlantis Press, Antwerpen.
6. Mason, M. ( ): The van Hiele Levels of Geometric Understanding, Professional Handbook for Teachers: Geometry, Explorations and Applications,
7. Mladinić, P. (2011.): *Grafovi trigonometrijskih funkcija: može li drukčije*?, Poučak br. 46, lipanj 2011., 16 – 25.
8. Mladinić, P.; Radović, N. (2017.): *Geometrija prirode*, Proven grupa, Zagreb.
9. Papy, F. (1971.): *Les enfants et la math´ematique*, vol. 2, Marcel Didier, Bruxelles.
10. Papy, F. (1972.): *Les enfants et la math´ematique*, vol. 3, Marcel Didier, Bruxelles.
11. Papy, F.; Papy G. (1972.): *Dijete i grafovi*, Školska knjiga, Zagreb.
12. Polya, G. (2003.): *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb.
13. Reynolds, B. E.; Fenton, W. E. (2005.): *College Geometry Using The Geometer's Sketchpad*, Key College Publishing, Emeryville.
14. Steketee, Jackiw, N.; Chanan, S. (2006.): *Priručnik s uputama za Sketchpad*, Proven, Zagreb.
15. Vojkuvkova, I. (2012.): *The Van Hiele Model of Geometric Thinking*, WDS'12 Proceedings of Contributed Papers, Part I, 72–75, 2012.
16. *** (2010.): Nacionalni okvirni kurikulum, MZOS, Zagreb.
17. *** (2000.): Standardi za nastavu matematike, HMD, Zagreb