Neke zanimljive nejednakosti za pravokutni trokut

Šefket Arslanagić[1]

U ovom ćemo radu dokazati nekoliko nejednakosti koje se odnose na pravokutni trokut ΔABC vodeći računa da za njega vrijedi čuveni Pitagorin[2] teorem ($c^2 = a^2 + b^2$, gdje je c hipotenuza, dok su a i b katete toga trokuta).

Nejednakost 1. Vrijedi nejednakost:

$$a+b\leq c\sqrt{2}\,. \tag{1}$$

Dokaz 1. Imamo

$$c^2=a^2+b^2=\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(a-b)^2}{2}\geq\frac{(a+b)^2}{2}\,,$$

a odavde

$$(a+b)^2\leq 2c^2$$

ili

$$a+b\leq c\sqrt{2}\,.$$

Jednakost vrijedi u slučaju kada je $(a-b)^2=0$, tj. kada je $a=b$, što znači da je u pitanju jednakokračni pravokutni trokut.

Dokaz 2. Zbog $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ i $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, tj. $a=c\cdot\sin\alpha$ i $b=c\cdot\cos\alpha$ vrijedi:

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(c\cdot\sin\alpha+c\cdot\cos\alpha)^2=c^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\\&=c^2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha\right)=c^2(1+\sin 2\alpha)\leq\\&\leq c^2(1+1)=2c^2,\end{aligned}$$

budući da je $\sin 2\alpha\leq 1$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, a odavde je nakon korjenovanja:

$$a+b\leq c\sqrt{2}\,,\ \text{q.e.d.}$$

[1]Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina

[2]Pitagora, oko 580. – oko 500. godine prije nove ere, znameniti starogrčki matematičar

Ovdje vrijedi jednakost ako je $\sin 2\alpha = 1$, tj. $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, odnosno $\alpha = \frac{\pi}{4}$ i $\beta = \frac{\pi}{4}$ (ponovno, trokut je jednakokračan pravokutni).

Nejednakost 2. Vrijedi nejednakost:

$$\frac{2}{5} < \frac{r}{h} < \frac{1}{2}, \tag{2}$$

gdje je h visina spuštena iz vrha C pravog kuta na hipotenuzu c, a r je radijus upisane kružnice u taj trokut.

Dokaz 1. Imamo dvije formule za površinu pravokutnog trokuta:

$$P = \frac{ch}{2} \text{ i } P = rs,$$

a odavde

$$ch = 2rs$$

ili

$$ch = r(a+b+c),$$

te

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}, \tag{3}$$

a odavde zbog $c = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}+1}. \tag{4}$$

Neka je $k = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Tada je:

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{k+1}.$$

Zbog nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine vrijedi

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \le \sqrt{2},$$

jer je $a+b > \sqrt{a^2+b^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2ab > 0$, te

$$2 < \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} + 1 \le \sqrt{2}+1, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}+1} \ge \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

ili

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Sada iz (4) dobivamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \leq \frac{r}{h} < \frac{1}{2},$$

te je, zbog $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 > \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$,

$$\frac{2}{5} < \frac{r}{h} < \frac{1}{2}, \text{ q.e.d.}$$

Napomena 1. Očigledno, nejednakost $\frac{r}{h} \geq \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ bolja je (jača) od nejednakosti $\frac{r}{h} > \frac{2}{5}$.

Dokaz 2. Kako je $a+b>c$, to je $a+b+c>2c$, te $\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{2c}$. Sada imamo iz (3):

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}, \quad \text{tj. } \frac{r}{h} < \frac{1}{2}.$$

Na osnovi nejednakosti (1), slijedi:

$$a+b \leq c\sqrt{2}, \quad \text{tj. } a+b+c \leq c\left(\sqrt{2}+1\right),$$

a sada iz (3):

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} \geq \frac{c}{c\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}, \quad \text{tj.} \quad \frac{r}{h} \geq \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 > \frac{2}{5}, \text{ q.e.d.}$$

Nejednakost 3. Vrijedi nejednakost:

$$\frac{c}{r} \geq 2\left(1+\sqrt{2}\right). \tag{5}$$

Dokaz. Kako je površina trokuta ΔABC

$$P = rs \quad \text{i} \quad P = \frac{ab}{2},$$

to je

$$\frac{1}{r} = \frac{s}{P} = \frac{\frac{a+b+c}{2}}{\frac{ab}{2}} = \frac{a+b+c}{ab},$$

te

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2b^2}$$

kao i

$$\frac{c^2}{r^2} = \frac{(a+b+c)^2 c^2}{a^2b^2}. \tag{6}$$

Kako je na osnovi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine brojeva a i b

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{i} \quad \frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}, \quad \text{tj.} \quad a+b \geq 2\sqrt{ab} \ \text{ i } \ a^2+b^2 \geq 2ab,$$

odnosno

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \ \text{ i } \ c^2 \geq 2ab,$$

to dobivamo iz (6):

$$\frac{c^2}{r^2} \geq \frac{\left(2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}\right)^2 \cdot 2ab}{a^2b^2}$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{c^2}{r^2} \geq \frac{ab\left(2+\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2ab}{a^2b^2}$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{c^2}{r^2} \geq 4\left(1+\sqrt{2}\right)^2 \, /\sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{r} \geq 2\left(1+\sqrt{2}\right), \ \text{q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (5) ako i samo ako je $a = b$, tj. za jednakokračni pravokutni trokut.

Nejednakost 4. Vrijedi nejednakost:

$$t_a^2 + t_b^2 > 29r^2, \tag{7}$$

gdje su t_a i t_b težišnice iz vrhova A i B trokuta ΔABC.

Dokaz. Imamo

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \ \text{ i } \ t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

a odavde

$$t_a^2 + t_b^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{5\left(a^2+b^2\right)}{4}, \ \text{tj.}$$

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5c^2}{4}. \tag{8}$$

Iz nejednakosti (5) slijedi:

$$c \geq 2r\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c^2 \geq 4r^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5c^2}{4} \geq 5r^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5c^2}{4} \geq \left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^2 r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5c^2}{4} \geq \left(15+10\sqrt{2}\right)r^2 > 29r^2,$$

tj.

$$\frac{5c^2}{4} > 29r^2 \tag{9}$$

jer je $15+10\sqrt{2} > 29$). Sada iz (8) i (9) slijedi dana nejednakost (7).

Nejednakost 5. Vrijedi nejednakost:

$$R+r \geq \sqrt{2P}, \tag{10}$$

gdje su R i r radijusi opisane i upisane kružnice toga trokuta, a P površina trokuta ΔABC.

Dokaz. Za pravokutni trokut ΔABC vrijedi:

$$R=\frac{c}{2},\ r=\frac{a+b-c}{2} \text{ i } P=\frac{ab}{2}.$$

Sada je nejednakost (10) ekvivalentna s nejednakosti:

$$\frac{c}{2}+\frac{a+b-c}{2} \geq \sqrt{2\cdot\frac{ab}{2}}, \text{ tj.}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

a ovo je dobro poznata nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve a i b.

Dakle, nejednakost (10) je točna. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b$, tj. za jednakokračni pravokutni trokut.

Nejednakost 6. Dokazati nejednakost:

$$R \geq \left(1+\sqrt{2}\right)r. \tag{11}$$

Dokaz. Opet ćemo poći od nejednakosti (1):

$$a+b \leq c\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(1+\sqrt{2}\right) \leq c\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(1+\sqrt{2}\right) \leq c\left(2+\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(1+\sqrt{2}\right) < c\left(1+\sqrt{2}\right)+c$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)\left(1+\sqrt{2}\right) \leq c,$$

a odavde zbog $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ i $R=\dfrac{c}{2}$:

$$2r\left(1+\sqrt{2}\right) \leq 2R \text{, tj. } R \geq \left(1+\sqrt{2}\right)r \text{, q.e.d.}$$

U (11) vrijedi jednakost ako i samo ako je $a=b$, tj. ako je u pitanju jednakokračni pravokutni trokut.

Nejednakost 7. Dokazati nejednakost:

$$\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \geq 2\sqrt{2}\,. \tag{12}$$

Dokaz: Nakon množenja nejednakosti (12) s ab, dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$c(a+b) \geq 2\sqrt{2}ab\,. \tag{13}$$

Na osnovi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja i činjenice da je $c^2=a^2+b^2$, imamo:

$$c=\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{2ab}$$

i

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}\,,$$

te nakon množenja ovih dviju nejednakosti slijedi:

$$c(a+b) \geq \sqrt{2ab}\cdot 2\sqrt{ab}\text{, tj. } c(a+b) \geq 2\sqrt{2}ab\,,$$

a ovo je nejednakost (13), q.e.d.

U (13) odnosno u (12) vrijedi jednakost ako i samo ako je $a=b$, tj. ako je u pitanju jednakokračni pravokutni trokut.

Nejednakost 8. Dokazati nejednakost:

$$\frac{cs}{ab} \geq 1+\sqrt{2}\,, \tag{14}$$

gdje je *s* poluopseg trokuta.

Dokaz: Imamo

$$\frac{cs}{ab} \ge 1+\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(a+b+c)}{2ab} \ge 1+\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac+bc+c^2}{ab} \ge 2+2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac+bc+a^2+b^2}{ab} \ge 2+2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}+\frac{a}{b}+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 2+2\sqrt{2}\,. \tag{15}$$

Na osnovi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja i činjenice da je $c^2 = a^2 + b^2$, imamo:

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \ge 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\,, \text{ tj.}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \ge 2\,, \tag{16}$$

te

$$c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{a+b}{ab} \ge \sqrt{2ab}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{ab} = \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{ab}\right)^2}{ab} = 2\sqrt{2}\,,$$

tj.

$$c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 2\sqrt{2}\,. \tag{17}$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (16) i (17) dobivamo nejednakost (15), odnosno zadanu nejednakost (14), q.e.d.

Vrijedi jednakost u (15) odnosno u (14) ako i samo ako je $a = b$, tj. ako je u pitanju jednakokračni pravokutni trokut.

Literatura

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2010.
3. Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 7*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2015.
4. Bottema, O., R.Ž. Đordjević, R.R. Janić, D.S. Mitrinović, P.M. Vasić, *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.
5. Chirciu, M., *Ineqalitati geometrice*, Editura Paralela 45, Pitesti (Romania), 2015.