Duljine dijagonala pravilnog mnogokuta (*n*-terokuta)

Branka Padavić[1]

Sažetak: U ovom članku dane su formule za izračunavanje duljina dijagonala pravilnih mnogokuta. U prvom dijelu opisan je mnogokut i pravilan mnogokut te osnovni pojmovi: stranica, dijagonala, unutarnji i vanjski kut mnogokuta. Zatim slijedi analiza dijagonala pravilnih mnogokuta te uporaba kosinusovog poučka kojim se dolazi do zanimljivih formula za izračunavanje duljina dijagonala pravilnog mnogokuta. Ujedno je dobiveni algoritam pogodan za primjenu u programiranju pri izradi računalnih programa ako su ulazni podatci duljina stranice pravilnog mnogokuta te broj vrhova.

Ključne riječi: *pravilni mnogokut, n-terokut, dijagonala, unutarnji kut, vanjski kut*

Uvod

Ukoliko je poznata duljina polumjera opisane kružnice pravilnom mnogokutu, tada se duljine dijagonala pravilnog mnogokuta mogu izračunati pomoću formule (vidi [1]):

$$d_i = r\sqrt{2(1-\cos\frac{2k\cdot 180^\circ}{n})},\ i=1,...,n\text{-}3,\ k=i+1,...n\text{-}2.$$

Ideja za ovaj rad nastala je iz znatiželje mogu li se duljine dijagonala pravilnog n-terokuta izraziti pomoću duljine njegove stranice. U literaturi su česte formule za izračunavanje duljine dijagonale kvadrata $d = a\sqrt{2}$ te duljine dviju dijagonala pravilnog šesterokuta, kraća $d_1 = a\sqrt{3}$ i dulja $d_2 = 2a$. Što je s ostalim pravilnim mnogokutima? Koliko različitih duljina dijagonala postoji i kako glase formule za izračunavanje duljina njihovih dijagonala ako je poznata duljina stranice?

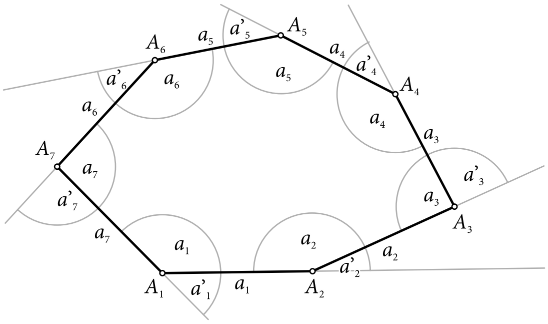
1. Osnovni pojovi o mnogokutu

Izaberemo $n + 1$ točku u ravnini, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, tako da nikoje tri točke nisu kolinearne. Označimo te točke redom A_1, A_2,..., A_{n+1}. Unija dužina $\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup ... \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_{n+1}}$ zove se poligonalna crta. Ako je $A_{n+1} = A_1$ i ako se poligonalna crta nigdje ne presijeca, onda govorimo o zatvorenoj poligonalnoj crti ([2]).

[1]Branka Padavić, OŠ dr. Branimira Markovića, Ravna Gora

Definicija 1. Skup svih točaka ravnine omeđen zatvorenom poligonalnom crtom, uključujući i sve točke te crte, zove se mnogokut ([2]).

Točke $A_1, A_2,..., A_n$ vrhovi su mnogokuta, a dužine $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3},..., \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ stranice su mnogokuta [1] čije se duljine mogu označiti $a_1, a_2,..., a_n$. Mnogokut s n stranica zove se još i n-terokut, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ ([2]).



Slika 1. Konveksni sedmerokut

Svaki n-terokut ima n unutrašnjih kutova. Kutovi $\angle A_nA_1A_2, \angle A_1A_2A_3,...,\angle A_{n-1}A_nA_1$ unutarnji su kutovi mnogokuta čije se mjere mogu označiti $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$. Mnogokut je konveksan ako je mjera svakog unutarnjeg kuta mnogokuta manja od 180°. Na Slici 1. dan je primjer konveksnog sedmerokuta. Svaki unutarnji kut konveksnog mnogokuta ima sukut koji se naziva vanjski kut, a njihove mjere možemo označiti $\alpha'_1, \alpha'_2,..., \alpha'_n$. Budući da su unutarnji i pripadni vanjski kut sukuti, vrijedi da je zbroj njihovih veličina 180°, odnosno:

$$(1)\ \alpha_k + \alpha'_k = 180°,\ 1 \leq k \leq n.$$

Poznato je da je zbroj svih vanjskih kutova bilo kojeg konveksnog mnogokuta 360°, tj.

$$(2)\ \alpha'_1 + \alpha'_2 + ... + \alpha'_n = 360°.$$

Dva vrha mnogokuta koja pripadaju istoj stranici zovu se susjedni vrhovi mnogokuta, a dva vrha koja ne pripadaju istoj stranici zovu se nesusjedni vrhovi mnogokuta. Dužine kojima su rubne točke nesusjedni vrhovi mnogokuta zovu se dijagonale mnogokuta.

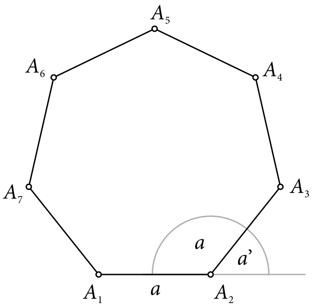
Definicija 2. Mnogokut kojemu su sve stranice međusobno sukladne i svi unutarnji kutovi međusobno sukladni zove se pravilan mnogokut ([2]).

Na Slici 2. prikazan je pravilan sedmerokut.

Posljedica sukladnosti svih unutarnjih kutova pravilnog mnogokuta međusobna je sukladnost i svih vanjskih kutova.

2. Izvod formule za duljinu dijagonala pravilnog mnogokuta

Duljinu stranice pravilnog n-terokuta označimo slovom a, veličinu unutrašnjeg kuta grčkim slovom α, te veličinu vanjskog kuta α' (Slika 2.).



Slika 2. Pravilan sedmerokut

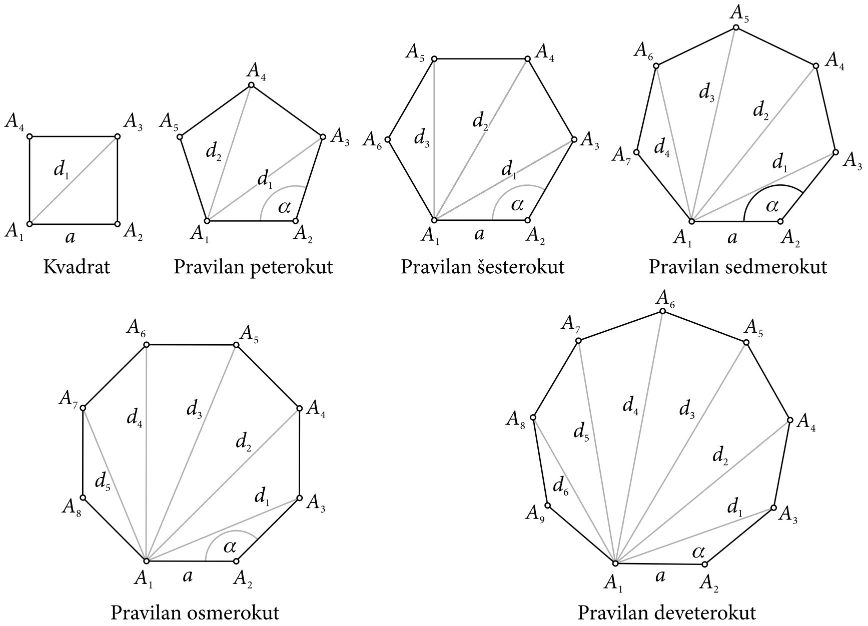
Prema (2) slijedi da se veličina vanjskog kuta pravilnog n-terokuta izračunava po formuli:

$$(3)\ \ \alpha' = \frac{360°}{n}.$$

Prema (1) slijedi da se veličina unutarnjeg kuta pravilnog n-terokuta može izračunati pomoću vanjskog kuta, odnosno:

$$(4)\ \ \alpha = 180° - \alpha'$$

Poznato je da je broj dijagonala iz jednog vrha pravilnog n-terokuta jednak n – 3 te da se crtanjem tih dijagonala mnogokut dijeli na n – 2 trokuta. (Slika 3.)



Slika 3. Podjela pravilnog mnogokuta na trokute crtanjem svih dijagonala iz jednog vrha

Uočavamo da su neke dijagonale jednake duljine, te da postoje najkraće dijagonale koje se ponavljaju u svakom pravilnom mnogokutu, a to su d_1 i d_{n-3}. Postoje i najdulje dijagonale. Jedini pravilni mnogokut kojemu su sve dijagonale iz jednog vrha jednake duljine je – pravilni peterokut. Zbog bolje preglednosti podatke smještamo u tablicu. (Tablica 1.)

Tablica 1. Dijagonale pravilnog mnogokuta

Broj vrhova (n)	Broj dijagonala iz jednog vrha ($n-3$)	Usporedba duljina dijagonala $d_1, d_2,..., d_{n-3}$	Potrebno je izračunati
$n = 4$	$4 - 3 = 1$	d_1	d_1
$n = 5$	$5 - 3 = 2$	$d_1 = d_2$	d_1
$n = 6$	$6 - 3 = 3$	$d_1 = d_3 < d_2$	d_1 i d_2
$n = 7$	$7 - 3 = 4$	$d_1 = d_4 < d_2 = d_3$	d_1 i d_2
$n = 8$	$8 - 3 = 5$	$d_1 = d_5 < d_2 = d_4 < d_3$	d_1, d_2 i d_3
$n = 9$	$9 - 3 = 6$	$d_1 = d_6 < d_2 = d_5 < d_3 = d_4$	d_1, d_2 i d_3

Uočavamo sljedeće:

1) Ako je n paran broj, tada pravilni mnogokut ima $\frac{n-2}{2}$ dijagonala različitih duljina te je $d_1 = d_{n-3} < d_2 = d_{n-4} < ... < d_{\frac{n-2}{2}}$.

   Dijagonale d_1 i d_{n-3} su najkraće dijagonale, a $d_{\frac{n-2}{2}}$ najdulja je dijagonala.

2) Ako je n neparan broj, tada pravilni mnogokut ima $\frac{n-3}{2}$ dijagonala različitih duljina $d_1 = d_{n-3} < d_2 = d_{n-4} < ... < d_{\frac{n-3}{2}} = d_{\frac{n-1}{2}}$.

   Dijagonale d_1 i d_{n-3} najkraće su dijagonale, a $d_{\frac{n-3}{2}}$ i $d_{\frac{n-1}{2}}$ najdulje su dijagonale.

Za daljnje izvođenje formula uporabit ćemo kosinusov poučak (5) i formulu redukcije za kosinus (6):

$$(5) \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$(6) \qquad \cos(180° - x) = -\cos x$$

Na Slici 3. uočavamo da se u svakom od pravilnih mnogokuta nalazi jednakokračan trokut $\Delta A_1A_2A_3$ kojemu su poznati krakovi duljine a i unutrašnji kut α, dok je dok je nepoznata osnovica, odnosno najkraća dijagonala d_1. Duljinu najkraće dijagonale računamo uporabom kosinusovog poučka.

Prema (5) vrijedi:

$$d_1^{\,2} = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\alpha), \text{ tj.}$$

$$d_1^{\,2} = 2a^2 - 2a^2 \cos(\alpha)$$

Zamjenom α prema (4) slijedi:

$$d_1^{\,2} = 2a^2 - 2a^2 \cos(180° \text{-} \alpha')$$

Prema (6) slijedi:

$$d_1^{\,2} = 2a^2 + 2a^2 \cos(\alpha')$$

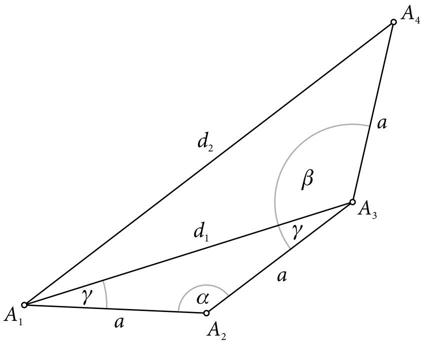
Zamjenom α' prema (3) imamo:

$$(7) \qquad d_1^{\,2} = 2a^2 + 2a^2 \cos\left(\frac{360°}{n}\right), \text{ tj.}$$

$$(8) \qquad d_1 = a\sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{360°}{n}\right)\right)}$$

Time smo riješili problem izračunavanja najkraćih dijagonala d_1 i $d_{n\text{-}3}$ pravilnog n-terokuta za $n \geqslant 4$ ako je poznata duljina stranice a pravilnog n-terokuta te broj vrhova n.

Za pravilan n-terokut, $n > 5$, promotrimo dio koji se sastoji od unije $\Delta A_1A_2A_3 \cup \Delta A_1A_3A_4$ (vidi Sliku 4.).



Slika 4. $\Delta A_1A_2A_3 \cup \Delta A_1A_3A_4$

Da bismo primijenili kosinusov poučak na $\Delta A_1A_3A_4$ potrebno je odrediti veličinu $\angle A_1A_3A_4$. Neka je $\beta = \left|\angle A_1A_3A_4\right|$. Budući da je $\Delta A_1A_2A_3$ jednakokračan, vrijedi da je $\angle A_3A_1A_2 \cong \angle A_2A_3A_1$. Neka je $\gamma = \left|\angle A_3A_1A_2\right| = \left|\angle A_2A_3A_1\right|$.

Poznato je da je zbroj kutova u trokutu 180° pa slijedi da je:

$$(9) \qquad \gamma = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

Uočavamo da je:

$$\beta = \alpha - \gamma$$

Zamjenom γ prema (9) vrijedi:

$$\beta = \alpha - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{2\alpha - 180^\circ + \alpha}{2} = \frac{3\alpha - 180^\circ}{2}$$

Zamjenom α prema (4) slijedi:

$$\beta = \frac{3 \cdot (180^\circ - \alpha') - 180^\circ}{2} = \frac{540^\circ - 3\alpha' - 180^\circ}{2} = \frac{360^\circ - 3\alpha'}{2}$$

Zamjenom α' prema (3) dobivamo:

$$\beta = \frac{360^\circ - 3 \cdot \frac{360^\circ}{n}}{2} = \frac{\frac{360^\circ \cdot n - 1080^\circ}{n}}{2} = \frac{360^\circ \cdot n - 1080^\circ}{2n}, \text{ tj.}$$

$$(10) \qquad \beta = 180^\circ - \frac{540^\circ}{n}$$

Primjenom kosinusovog poučka (5) dobivamo:

$$d_2^{\,2} = d_1^{\,2} + a^2 - 2d_1 a \cos(\beta)$$

Zamjenom β prema (10) i primjenom (6) imamo:

$$d_2^{\,2} = d_1^{\,2} + a^2 - 2d_1 a \cos\left(180^\circ - \frac{540^\circ}{n}\right), \text{ tj.}$$

$$(11) \qquad d_2^{\,2} = d_1^{\,2} + a^2 + 2d_1 a \cos\left(\frac{540^\circ}{n}\right),$$

za $n > 5$. Analognim postupkom u $\Delta A_1 A_4 A_5$ vrijedi da je

$$\left|\angle \Delta A_1 A_4 A_5\right| = 180^\circ - \frac{720^\circ}{n} \quad \text{i}$$

$$(12) \qquad d_3^{\,2} = d_2^{\,2} + a^2 + 2d_2 a \cos\left(\frac{720^\circ}{n}\right),$$

za $n > 6$.

Općenito, u pravilnom mnogokutu s n vrhova i duljinama stranica a, duljine dijagonala računamo po sljedećim formulama:

1) Najkraću dijagonalu pravilnog mnogokuta računamo po formuli

$$d_1 = a\sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{360°}{n}\right)\right)}, \qquad n > 3.$$

2) Prema (11) i (12), ostale dijagonale računamo po formuli:

$$(13) \qquad d_k^{\,2} = d_{k-1}^{\,2} + a^2 + 2d_{k-1}a\cos\left(\frac{(k+1)180°}{n}\right)$$

gdje je $1 < k \leq \frac{n-2}{2}$, ako je broj vrhova n paran, odnosno $1 < k \leq \frac{n-3}{2}$, ako je broj vrhova neparan.

3) Ako je n paran broj, i ako označimo s $\max = \frac{n-2}{2}$, onda je $d_{\max}$ najdulja dijagonala pravilnog mnogokuta i $\Delta A_1 A_{\max+1} A_{\max+2}$ je pravokutan. Primjenom trigonometrije na taj pravokutan trokut, vrijedi:

$$(14) \qquad d_{\max} = \frac{a}{\sin\left(\frac{\alpha}{n-2}\right)}, \qquad \alpha = 180° - \alpha', \qquad \alpha' = \frac{360°}{n}$$

3. Primjer

1. Kolike su duljine dijagonala pravilnog 10-terokuta kojem je je stranica dugačka 2 cm?

   Rješenje:

   a = 2 cm, n = 10 pa se iz jednog vrha mogu nacrtati n – 3 = 10 – 3 = 7 dijagonala

   Od tih 7 dijagonala, $\frac{n-2}{2} = \frac{10-2}{2} = \frac{8}{2} = 4$ su dijagonale različitih duljina, i vrijedi:

   $$d_1 = d_7 < d_2 = d_6 < d_3 = d_5 < d_4,$$

   pri čemu je d_4 najdulja, tj. $d_{\max} = d_4$.

A) Od najkraće dijagonale do najdulje

$$d_1 = a\sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\right)}$$

$$d_1 = 2\cdot\sqrt{1+\cos\left(\frac{360^\circ}{10}\right)} = 3.8042 \text{ cm}$$

$$d_2^{\,2} = d_1^{\,2} + a^2 + 2d_1 a\cos\left(\frac{540^\circ}{n}\right)$$

$$d_2^{\,2} = 3.8042^2 + 2^2 + 2\cdot 3.8042\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{540^\circ}{10}\right)$$

$$d_2 = 5.236 \text{ cm}$$

$$d_3^{\,2} = d_2^{\,2} + a^2 + 2d_2 a\cos\left(\frac{720^\circ}{n}\right)$$

$$d_3^{\,2} = 5.236^2 + 2^2 + 2\cdot 5.236\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{720^\circ}{n}\right)$$

$$d_3 = 6.1553 \text{ cm}$$

$$d_4^{\,2} = d_3^{\,2} + a^2 + 2d_3 a\cos\left(\frac{900^\circ}{n}\right)$$

$$d_4^{\,2} = 6.1553^2 + 2^2 + 2\cdot 6.1553\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{900^\circ}{10}\right)$$

$$d_4 = 6.4721 \text{ cm}$$

B) Od najdulje dijagonale do najkraće

$$d_{\max} = \frac{a}{\sin\left(\frac{\alpha}{n-2}\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{144^\circ}{8}\right)} = 6.4721 \text{ cm}$$

$$d_4 = d_{\max} = 6.4721 \text{ cm}$$

$$d_4^{\,2} = d_3^{\,2} + a^2 + 2d_3 a\cos\left(\frac{900^\circ}{n}\right)$$

$$6.4721^2 = d_3^{\,2} + 2^2 + 2\cdot d_3\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{900^\circ}{10}\right)$$

$$d_3 = 6.1553 \text{ cm}$$

$$d_3^{\,2} = d_2^{\,2} + a^2 + 2d_2 a\cos\left(\frac{720^\circ}{n}\right)$$

$$6.1553^2 = d_2^{\,2} + 2^2 + 2\cdot d_2\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{720^\circ}{n}\right)$$

$$d_2 = 5.236 \text{ cm}$$

$$d_1 = a\sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\right)}$$

$$d_1 = 2\cdot\sqrt{1+\cos\left(\frac{360^\circ}{10}\right)} = 3.8042 \text{ cm}$$

Zaključak

Nedostatci ovih formula su u tome što kod pravilnih mnogokuta s neparnim brojem vrhova moramo početi računati od najkraće dijagonale da bismo došli do najdulje, a nešto bolja situacija je kod pravilnih mnogokuta s parnim brojem vrhova jer možemo krenuti od najkraće dijagonale prema najduljoj ili od najdulje prema najkraćoj.

Literatura

1. https://math.stackexchange.com/questions/687325/regular-polygon-diagonal-lengths (22. 3. 2019)
2. Željka Orčić, Renata Svedrec, Nikola Sarapa: Matematika 7, 2. dio, udžbenik sa zbirkom zadataka za 7. razred, Školska knjiga, Zagreb, 2009.