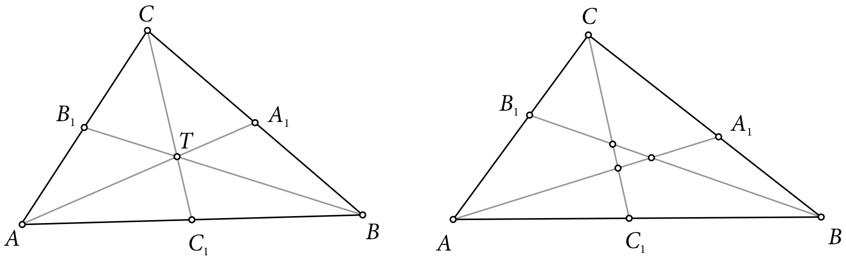
O logičkoj strukturi dokaza o postojanju karakterističnih točaka trokuta

Zvonimir Šikić[1]

Matematički objekti katkada su „predefinirani" u smislu da onih svojstava koja ih definiraju ima previše pa nije jasno postoje li uopće takvi objekti. Takve su definicije karakterističnih točaka trokuta: središta opisane kružnice kao sjecišta simetrala stranica, središta upisane kružnice kao sjecišta simetrala kutova, težišta trokuta kao sjecišta težišnica i ortocentra kao sjecišta visina.

Naime, nije jasno zašto bi se sve tri simetrale (stranica ili kutova), težišnice ili visine morale sjeći u jednoj točki. Možda je to tako (kao na slici lijevo), a možda i nije (kao na slici desno).



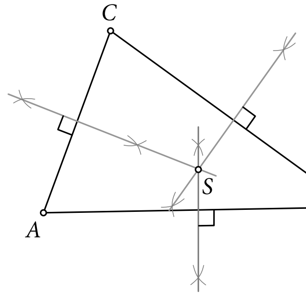
Svaki od tri para simetrala, težišnica ili visina sigurno se siječe u jednoj točki, ali tek treba **dokazati** da su te tri točke zapravo jedna. Tada naše definicije imaju smisla (tj. tek tada znamo da središta opisane i upisane kružnice, težište i ortocentar nisu predefinirani).

Logička struktura dokaza za jedinstveno sjecište simetrala dosta je jednostavna i zato je učeničkoj populaciji najlakša.

[1]Zvonimir Šikić, Fakultet strojarstva i brodogradnje u Zagrebu

Središte opisane kružnice

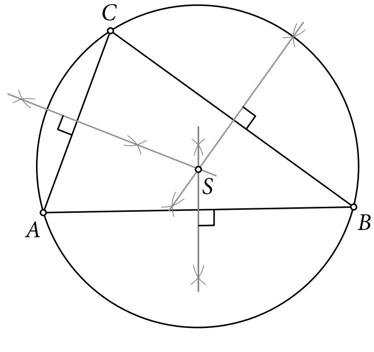
Promotrimo trokut ABC i simetrale njegovih stranica:



Ako je točka S sjecište simetrala stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, onda je $|SA| = |SB|$ i $|SB| = |SC|$ (jer je točka na simetrali dužine uvijek jednako udaljena od njenih krajeva).

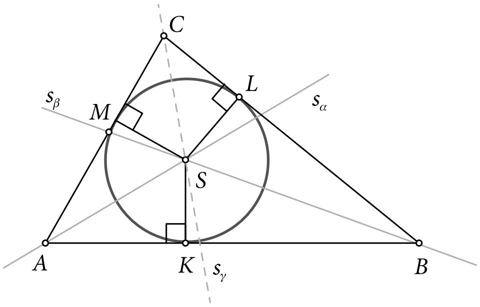
No, iz $|SA| = |SB|$ i $|SB| = |SC|$ slijedi $|SA| = |SC|$, što znači da S leži i na simetrali stranice $\overline{AC}$ (jer točke jednako udaljene od krajeva dužine leže na simetrali te dužine).

Dakle, simetrale se sijeku u zajedničkoj točki S koja je jednako udaljena od A, B i C. Drugim riječima A, B i C leže na kružnici sa središtem u S. To je opisana kružnica trokuta ABC:



Središte upisane kružnice

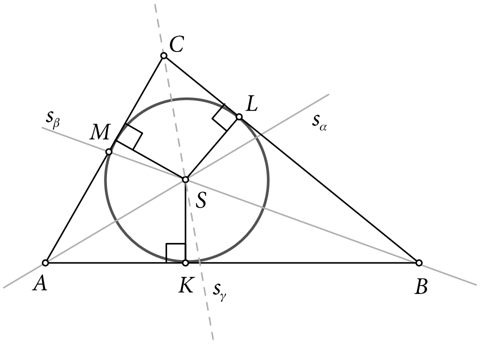
Promotrimo trokut ABC, njegove kutove α, β, njihove simetrale s_α, s_β i njihovo sjecište S:



Točka S jednako je udaljena od oba kraka kuta α i od oba kraka kuta β (jer je svaka točka simetrale kuta jednako udaljena od krakova toga kuta).

No, ako je $|SK| = |SM|$ i $|SK| = |SL|$, onda je i $|SK| = |SL|$. Točka S jednako je udaljena od oba kraka kuta γ. To znači da S leži na simetrali s_γ kuta γ (jer točke jednako udaljene od krakova kuta leže na simetrali toga kuta).

Dakle, simetrale kutova trokuta ABC sijeku se u zajedničkoj točki S koja je jednako udaljena od stranica toga trokuta, tj. $|SK| = |SM| = |SL|$. Drugim riječima K, L i M leže na kružnici sa središtem u S. To je upisana kružnica trokutu ABC.

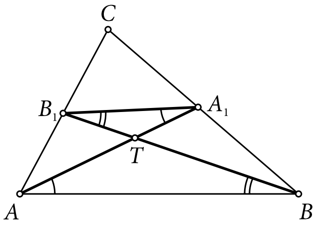


Logičke strukture ovih dvaju dokaza iste su i dosta jednostavne: **dva se pravca sijeku u točki S, a iz njihovih svojstava (budući da su simetrale) slijedi da tom točkom prolazi i treći pravac.**

Težište

Dokazati postojanje težišta možemo na razne načine, ali nijedan nije lako razumljiv općoj učeničkoj populaciji jer svi imaju netrivijalnu logičku strukturu. Evo jednog tipičnog dokaza.

Promotrimo trokut ABC i njegove težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$:



Prema Talesovom poučku, stranica $\overline{AB}$ dvostruko je duža od $\overline{A_1B_1}$ i s njom je paralelna. Zato su na slici jednako označeni kutovi međusobno jednaki. No, to znači da je trokut A_1TB_1 sličan trokutu ATB, s koeficijentom sličnosti 2. Dakle, $|AT| = 2|TA_1|$ i $|BT| = 2|TB_1|$ tj. $|AT| = 2/3|AA_1|$ i $|BT| = 2/3|BB_1|$.

Do ovoga trenutka sve je relativno jasno (barem onima koji znaju što treba o Talesu i poučcima o sličnosti). Problem je završni argument:

Da smo krenuli od težišnica $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ i njihovog sjecišta Q, na isti bismo način našli $|BQ| = 2/3|BB_1|$ i $|CQ| = 2/3|CC_1|$. Međutim, iz $|BQ| = 2/3|BB_1|$ i $|BT| = 2/3|BB_1|$ slijedi $Q = T$, što znači da se sve tri težišnice sijeku u zajedničkoj točki T.

Izrazito malom broju učenika taj je argument banalan, mali ga broj razumije ali im djeluje kao *deus ex machina*, a većina ga uopće ne razumije.

To i nije tako neobično s obzirom na ne baš jednostavnu logičku strukturu toga argumenta.

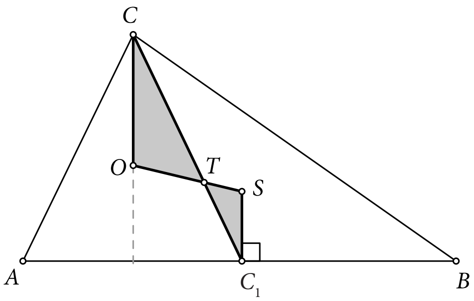
Označimo težišnice $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ s a, b i c. Jasno je da dvije težišnice x i y određuju jedinstveni presjek $P(x, y)$. Ono što je ključno uočiti, a što lako promakne, jest da smo u prvom dijelu dokaza zapravo dokazali **da je funkcija dviju varijabli P identična funkciji jedne varijable L primijenjenoj na bilo koju od te dvije varijable, tj. $P(x, y) = L(x) = L(y)$ (gdje je $L(x)$ = „točka na 2/3 od x gledano od vrha trokuta").**

Naravno, iz $P(a, b) = L(b)$ i $P(b, c) = L(b)$ sada zaista banalno slijedi $P(a, b) = P(b, c)$, tj. a, b i c imaju zajedničko sjecište.

Ortocentar

Među mnogim dokazima o postojanju ortocentra (koji je „predefiniran" kao zajedničko sjecište visina trokuta) jednostavnošću se ističe Eulerov dokaz. Naravno, ta jednostavnost je relativna. Ni taj dokaz nije lako razumljiv općoj učeničkoj populaciji, ali on ima bitno jednostavniju logičku strukturu od prethodnoga dokaza o težištu.

Promotrimo trokut ABC u kojemu je istaknuto središte opisane kružnice S i težište T:



Točku O konstruiramo na pravcu ST tako da bude $|TO| = 2|TS|$ i da su S i O s raznih strana od T.

Promotrimo trokute TOC i TSC_1 uz težišnicu $\overline{CC_1}$. Oni su slični jer imaju jednake vršne kutove uz T i proporcionalne stranice uz te kutove ($|TC| = 2|TC_1|$, zbog gornjeg dokaza o težištu, a $|TS| = 2|TO|$ zbog konstrukcije od O). Slijedi da je CO

paralelno s C_1S. No, C_1S je simetrala okomita na AB pa je i CO okomito na AB, tj. O leži na visini iz vrha A.

Do ovoga trenutka sve je relativno jasno (barem onima koji znaju što treba o sličnosti). No, sada ni završni argument nije naročito težak:

Da smo promotrili trokute uz težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$, na isti bismo način zaključili da O leži na visini iz vrha A i na visini iz vrha B, tj. da se sve visine sijeku u točki O.

Logička struktura ovog argumenta bitno je jednostavnija: **nezavisno od visina definiramo točku *O* i dokazujemo da ona leži na sve tri visine.**

Naravno, ono što nije nimalo jednostavno jest Eulerova ideja kako O definirati nezavisno od visina. To je ideja majstora (npr. ni u Euklidovim *Elementima*, niti uopće u starogrčkoj matematici, nema teorema o zajedničkom sjecištu visina).

Uočite također da je postojanje Eulerova pravca trivijalna posljedica njegova dokaza.