Poučavanje usmjereno na usvajanje matematičkih pojmova i koncepata[1]

Lana Horvat Dmitrović[2] i Ana Žgaljić Keko[3]

Sažetak: Poučavanje usmjereno na usvajanje matematičkih koncepata daje širu sliku određenog matematičkog pojma, povezujući ga s drugim matematičkim i inženjerskim konceptima te stavljajući ga u različite kontekste u kojima se primjenjuje. Uvođenje novih koncepata motivira se rješavanjem nekog problema iz prakse i povezivanjem s već poznatim pojmovima, te se time potiče studente na razmišljanje o navedenim konceptima na mnogo dubljoj razini. Pokazalo se da ovakav način poučavanja potiče razvoj kreativnog i kritičnog razmišljanja, povećava motivaciju za učenje te olakšava primjenu stečenih znanja na nove probleme i situacije. U ovom radu bit će prikazan takav pristup na lekcijama iz diferencijalnog računa funkcija jedne varijable, uz korištenje različitih metoda aktivnog poučavanja kao što su konceptualne mape i ciljana pitanja.

Ključne riječi: konceptualni pristup poučavanju, slika koncepta, konceptualna mapa, ciljana pitanja**,** diferencijalni račun

1. Uvod

Poučavanje srednjoškolske matematike, kao i visokoškolske matematike na tehničkim fakultetima, tradicionalno je više orijentirano na metode i procese računanja (tzv. proceduralni pristup) nego na razumijevanje koncepata. Time je i u procesu učenja učenika i studenata fokus stavljen na razvijanje vještina računanja i pamćenja šablona, odnosno studenti najčešće koriste površinski način učenja. U današnje digitalno doba pokazalo se da studentima tehničke struke primjena matematičkog znanja i matematičkih koncepata na nove probleme i situacije u praksi predstavlja poseban izazov. Zato je iznimno važno da studenti u potpunosti razumiju temeljne matematičke koncepte koje će potom razvijati i primjenjivati u svojoj struci. U skladu s tim metode poučavanja moraju se usmjeriti prema studentu odnosno naglasak u poučavanju treba biti na razumijevanju koncepata te na prepoznavanju i uklanjanju prepreka za

[1]Predavanje održano na 8. kongresu nastavnika matematike RH, 2018. godine u Zagreb
[2]Lana Horvat Dmitrović, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb
[3]Ana Žgaljić Keko, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb

studentovo razumijevanje koncepata. Takvo poučavanje zovemo poučavanje usmjereno na usvajanje matematičkih koncepata (*concept-based teaching*). U sklopu toga pristupa nastavnik kod studenta potiče sposobnost strukturiranja gradiva i povezivanje s drugim područjima te razmišljanje o dubljem značenju i primjeni gradiva. Kao rezultat ovog načina poučavanja, student je osposobljeniji za cjeloživotno učenje te ima razvijeno kritičko i kreativno mišljenje i sposobnost rješavanja složenih problema.

Što se tiče istraživanja o utjecaju konceptualnog pristupa poučavanju na znanje studenata, bez promjene načina vrednovanja i ocjenjivanja s proceduralnog na konceptualni jedino što se može istraživati je utjecaj konceptualnog poučavanja na proceduralno znanje studenata. Jedno takvo istraživanje prikazano je u literaturi [1], a uključivalo je 305 studenata na prvoj godini studija, podijeljenih u dvije grupe. Jedna grupa imala je predavanja u tradicionalnom formatu, dakle iznošenjem definicija i teorema s naglaskom na rješavanje zadataka, dok je druga grupa studenata pratila predavanja koja su bila usmjerena na poučavanje koncepata, vizualni prikaz i primjenu na nove situacije, te je svaki koncept bio prikazan primjerom iz stvarnog života. Pokazalo se da je grupa u kojoj se poučavanje usmjerilo na koncepte dala bolje rezultate na testovima gdje je trebalo koristiti proceduralno znanje, odnosno određene metode u njihovu rješavanju, bez obzira na to što je prva grupa studenata bila poučavana na taj način. Zaključak toga istraživanja je da poučavanje usmjereno na usvajanje koncepata unaprjeđuje i proceduralne vještine jer je student prilikom računanja svjestan toga *zašto* radi umjesto samo *kako* radi. Naravno da bi u idealnoj situaciji i način vrednovanja trebao biti okrenut prema konceptualnom razumijevanju gradiva kako bi poučavanje, učenje i vrednovanje bili potpuno usklađeni, a da ne govorimo što bi to značilo za motivaciju samih studenata za dubinski pristup učenju.

Matematičko znanje još od osnovne škole gradimo, povezujemo i širimo dodavanjem novih koncepata i produbljivanjem starih kako bi popunili sve praznine. Zbog tog međusobnog preplitanja i stalnog produbljivanja koncept je u matematici iznimno važan. Nažalost, linearni način prikaza gradiva u sadržaju udžbenika i zbirki ne odražava važnost i bogatstvo međusobne povezanosti i primjenjivosti različitih matematičkih koncepata i ne daje osjećaj promjene dubine, razine i složenosti koncepata s vremenom.

U ovom ćemo radu opisati što bi sve uključivalo poučavanje usmjereno usvajanju matematičkih koncepata te ćemo to pokazati kroz nekoliko primjera. Nakon toga razjasnit ćemo što su to slike koncepata i dati primjere kako graditi potpune slike koncepata pomoću mapa koncepata i ciljanih pitanja.

2. Poučavanje usmjereno na usvajanje koncepata

U ovom ćemo poglavlju detaljnije objasniti poučavanje usmjereno na usvajanje koncepata i kako se ono razlikuje od proceduralnog pristupa poučavanju.

Proceduralni pristup poučavanju stavlja naglasak na simboličko i numeričko računanje, korištenje danih pravila, algoritama, formula i simbola, dakle to je tradicionalan pristup koji dovodi do usvajanja površinskog načina učenja kod studenata. S druge strane, poučavanje usmjereno na usvajanja koncepata uključuje povezivanje između verbalnih i grafičkih sadržaja, formalnih i algebarskih matematičkih izraza, interpretaciju i primjenu koncepata na nove situacije i različite kontekste.

Nastavnici često dolaskom studenata na fakultete uočavaju kako studentima nedostaje znanje i razumijevanje osnovnih koncepata srednjoškolske matematike, što je posljedica proceduralnog pristupa poučavanju i učenju. Jedan dobar primjer je rješavanje nejednadžbi. Naime, svi studenti znaju pravilo da se znak nejednakosti promijeni kada nejednadžbu pomnožimo s (-1). No kada ih pitamo zašto je tako, nastaje muk. U sklopu konceptualnog pristupa definiciji rastuće i padajuće funkcije možemo primijeniti tu definiciju na postupak rješavanja nejednadžbi i tako im potpuno objasniti koncept rješavanja nejednadžbi. Povezivanjem tih dvaju koncepata produbljujemo studentovo razumijevanje te mu omogućavamo da sam zaključi da je to zato što je funkcija $f(x) = -x$ padajuća funkcija.

Mnogi koncepti koje koristimo nisu formalno definirani, nego ih učimo prepoznati iskustvom i korištenjem u različitim kontekstima. Također, jasno je da razumijevanje određenog koncepta širimo i produbljujemo s vremenom te ih tako s vremenom i iskustvom možemo sve brže prepoznati u primjenama i struci. Napomenimo da koncept ne mora nužno biti definiran samo jednom riječju niti obuhvaćen jednim pojmom nego cijelim izrazom. Kao što ćemo vidjeti, imamo općenitije i specifičnije koncepte, jednostavnije i složenije, te koncepte koji jedni druge sadržavaju ili se međusobno isprepliću. U tome veliku ulogu imaju slike koncepata koje ćemo opisati u sljedećem poglavlju. Nadalje, međusobne veze među konceptima najbolje se opisuju konceptualnim mapama, što ćemo i vidjeti u nastavku rada.

2.1. Slike koncepata

Slika koncepta predstavlja sveobuhvatnu kognitivnu strukturu koja je pridružena određenom konceptu, te uključuje sve mentalne slike i pripadna svojstva i procese ([4], [8]). Slika koncepta koju student ima može se mijenjati s vremenom, ovisno o tome koliko se s navedenim konceptom susreće. Slika koncepta sadrži i sve veze i odnose s drugim konceptima u matematici i primjeni. U procesu stvaranja slike koncepta mogu se javljati dvije vrste poteškoća: problemi s nepotpunom slikom ili problemi s iskrivljenom slikom odnosno pojava krivih veza i uvjerenja.

Jedan od čestih problema kod razumijevanja i učenja teorema nepotpuna je slika koncepta koja se svede na samu formulu. Npr. slika koncepta Fermatovog teorema koju student ima može biti samo $f'(a) = 0$, čime se gubi informacija da je to samo nužan uvjet za lokalni ekstrem.

Za svakog pojedinca definicija određenog pojma ili koncepta, ovisno o tome je li dovoljno detaljno ili točno interpretirana, stvara određenu sliku koncepta, u kojoj se obzirom na uočene detalje mogu javiti i krivo interpretirani sadržaji. Tako u području diferencijalnog računa – kod poimanja koncepata limesa, neprekinutosti i derivacije – studenti mogu često stvoriti krivu sliku koncepta i pri tome nailaze na konflikte s pojedinom definicijom te imaju problema s primjenom koncepata u zadatcima. Primjeri takvih konflikata bit će prikazani u poglavlju s ciljanim pitanjima.

Ispravno izgrađena slika koncepta temelj je razumijevanja koncepta te se poučavanje usmjereno na razumijevanje koncepata zasniva na ispravno izgrađenoj i potpunoj slici koncepta. Sada ćemo na nekoliko primjera pogledati koje nam sve metode mogu pomoći u tome.

2.2. Primjeri stvaranja slike novog koncepta

Sada ćemo objasniti korake u oblikovanju lekcije s ciljem stvaranja što potpunije slike koncepta. Na početku svake takve lekcije trebao bi biti uvodni motivacijski primjer iz svakodnevnog života koji motivira glavni koncept ili pojam iz te lekcije ([2]). Pod pojmom 'primjeri iz svakodnevnog života' misli se da studentima nije potrebno neko prethodno znanje da bi ih razumjeli. Primjerice, za motivaciju limesa funkcije ili derivacije funkcije možemo iskoristiti primjere tipa:

- Koliko je brzo trkač trčao na određenoj točki utrke od 100 m?
- Autobus stoji te iz $t = 0$ s do $t = 30$ s ubrzava na 40 km/h, a nakon toga vozi konstantnom brzinom. Što se događa sa srednjom brzinom kako vrijeme prolazi? Približava li se nekoj vrijednosti? Hoće li ikada srednja brzina biti 40 km/h?

Za motivaciju pojma converegencije niza može se koristiti problem površine kruga kao granična vrijednost površina pravilnih n-terokuta upisanih u taj krug.

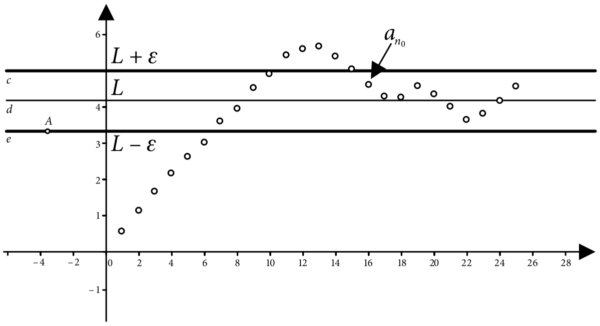
U sklopu svake lekcije javlja se manji ili veći broj koncepata u obliku pojmova ili tvrdnji. U slaganju slike svakog novog koncepta preporučljivo je uključiti sljedeće korake:

- povezivanje s drugim konceptima (evokacija, metoda konceptualnih mapa),
- alati vizualizacije i grafičkog prikaza,
- primjena u struci i u različitim kontekstima,
- uočavanje sličnosti i razlika s drugim pojmovima (Vennov dijagram),
- veći broj primjera i kontraprimjera.

Osim toga, ukoliko je potrebno, za propitivanje ispravnosti slike koncepta i ispravljanje pogrešno stvorene slike koncepta koristimo ciljana pitanja koja ćemo pokazati u zadnjem poglavlju.

Primjer 1 – Limes niza

Na ovom ćemo primjeru pokazati kako koristeći vizualizaciju odnosno grafički prikaz niza povezujemo koncept konvergencije niza realnih brojeva s formalnom definicijom konvergentnog niza. U tom je procesu korisno uključiti studente u proces stvaranja same definicije konvergencije niza. Dakle, promatramo nizove čiji se članovi što n više raste približavaju nekoj određenoj vrijednosti L.



Slika 1.

Pomoću Slike 1. vrlo se jednostavno propitivanjem studenata može doći do sljedeće definicije.

Niz realnih brojeva (a_n) konvergira k realnom broju L ako se izvan svake ε - okoline broja L nalazi samo konačno mnogo članova niza.

Nakon toga postupno, uz objašnjenje svakog koraka, pojma okoline i kako okolinu opisujemo znakom apsolutnih vrijednosti, ova se definicija može prevesti u formalni matematički jezik:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)(|a_n - L|<\varepsilon).$$

Ovakvim „mekšim" pristupom olakšava se razumijevanje ovako složene formalne definicije pojma konvergencije niza.

Primjer 2 – Diferencijabilnost i neprekinutost

U ovom ćemo primjeru povezati pojmove neprekinutosti i diferencijabilnosti putem teorema te koristiti primjere i kontraprimjere za upotpunjavanje slike obaju koncepata. Prisjetimo se sljedećeg teorema:

Tm. *Neka je $f: I\to\mathbb{R}, I\subset\mathbb{R}$ otvoren interval. Ako je f diferencijabilna funkcija u točki $x_0\in I$, onda je f neprekidna u $x_0\in I$.*

Do dokaza navedene tvrdnje može se doći i prije nego što se tvrdnja iskaže. Također, vrlo je važno istaknuti da obrat ovog teorema ne vrijedi. Uz ovakav teorem mogli bismo navesti ciljano pitanje:

Pitanje za studente. *Koje su od navedenih tvrdnji točne, a koje netočne? Za netočne tvrdnje navedite protuprimjer, a za točne objasnite iz čega slijede:*

(T1) Ako funkcija nije neprekinuta u točki a, onda nije diferencijabilna u toj točki.

(T2) Ako postoji $f'(a)$, onda je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(T3) Ako je funkcija neprekinuta u točki a, tada je ona i diferencijabilna u točki a.

Ovdje je samo treća tvrdnja netočna, a protuprimjer bi bila funkcija $f(x)=|x|$ u $x=0$. Prethodne dvije tvrdnje potrebno je pojasniti iz iskaza samog teorema.

Primjer 3 – Primjena derivacije u različitim kontekstima

Slika koncepta pojma derivacije upotpunjuje se primjenama u različitim kontekstima kao što su fizika, biologija, elektrotehnika, ekonomija i slično. Primjena derivacije u zadatcima s računanjem stope promjene funkcije vidi se u sljedećim primjerima preuzetim iz [1]:

- ***Zadatak***. *Pijesak curi iz vreće na način da je nakon t sekundi u vreći preostalo* $S(t)=50\left(1-\frac{t^2}{15}\right)^3$ *kilograma pijeska. Kojom brzinom pijesak curi iz vreće nakon jedne sekunde? U koliko će se sekundi vreća isprazniti? Koja je brzina curenja pijeska u trenutku ispražnjenja?*
- ***Zadatak.*** *Količina naboja Q koja je prošla kroz točku na žici do trenutka t dana je funkcijom*
$$Q(t)=t^3-2t^2+6t+2.$$
Nađite jakost struje u trenutku t = 0.5 s i t = 1 s te odredite trenutak u kojem je struja najslabija.

Sljedeći primjer predstavlja primjenu složenog deriviranja na problem u praksi:

- ***Zadatak.*** *Naftna mrlja iz nasukanog tankera* širi *se u obliku kruga čiji se radijus povećava konstantnom brzinom od 2 m/s. Kojom se brzinom povećava površina mrlje u trenutku kada je r = 60 m?*

Primjer 4 – Fermatov teorem

Na ovom ćemo primjeru pokazati kako se konceptualnim pristupom objašnjava tvrdnja Fermatovog teorema kao koncepta nužnog uvjeta za lokalni ekstrem za diferencijabilnu funkciju:

Teorem. *Neka je f diferencijabilna funkcija koja u točki a iz domene ima lokalni ekstrem. Tada je f '(a) = 0.*

U proceduralnom načinu poučavanja navedeni teorem (Fermatov teorem) iskazuje se i koristi kao dio metode za traženje lokalnih ekstrema. U konceptualnom pristupu do zaključka iz Fermatovog teorema studenti bi trebali doći sami, crtanjem grafova funkcija i njihovih lokalnih ekstrema. Dakle, korisno je uvesti i grafičku interpretaciju uvjeta teorema koristeći horizontalnu tangentu. Drugi pristup je da bi sam dokaz teorema trebao biti motivacija za iskaz teorema. Također je bitno pokazati da obrat ovakvog teorema ne vrijedi, odnosno da je ovo samo nužan uvjet te to potkrijepiti i prikladnim protuprimjerima. Pored toga treba spomenuti slučaj lokalnih ekstrema nediferencijabilnih funkcija odnosno slučaj šiljka. Na kraju se naravno lokalni ekstremi primjenjuju na probleme optimizacije i crtanja kvalitativnog grafa funkcije. Time smo stvorili potpunu sliku teorema, čime smo prevenirali najčešće konflikte tipa vrijedi li obrat ovog teorema ili što znamo o slučaju šiljka.

3. Mape koncepata

Konceptualna mapa je alat za organizaciju i prezentaciju znanja koji pomaže u procesu učenja, kreiranja i korištenja znanja, a bazira se na razumijevanju, rasuđivanju, povezivanju i shvaćanju smisla. Sastoji se od koncepata i tvrdnji, koji su napisani u krugovima ili kvadratima, i međusobnih odnosa između koncepata i tvrdnji predstavljenih pomoću povezujućih linija ili strelica. Poveznice sadrže opis međusobnog odnosa. Glavna karakteristika konceptualne mape je da su koncepti predstavljeni u hijerarhijskoj strukturi – najopćenitiji koncepti su na vrhu mape, a specifičniji koncepti su na dnu mape. Konceptualna mapa ovisi o kontekstu u kojem se koncept proučava odnosno u različitim kontekstima konceptualne mape mogu se jako razlikovati. Osim u obrazovanju, konceptualne mape mogu se koristiti i kod rješavanja složenijih problema u znanosti ili struci kao pomoć u pojašnjavanju problema, dubinskom razumijevanju problema i otkrivanju potrebnog znanja za njegovo rješavanje te dobivanje šire slike i poveznica sa sličnim problemima. Detaljniji opis konceptualnih mapa može se pronaći u [7].

Prednosti korištenja konceptualnih mapa mogu se vidjeti u sljedećoj tablici.

Prednosti za studente	**Prednosti za nastavnike**
• unapređenje razumijevanja koncepta i odnosa među njima • vizualizacija i organizacija znanja • hijerarhija koncepata prema važnosti • razvijanje matematičke pismenosti • povezivanje starih i novih znanja • evaluacija procesa učenja • proširivanje znanja • primjena konceptualnih mapa na druge sadržaje • aktivno učenje • rad u grupi – suradničko učenje	• uči studente kako učiti s razumijevanjem • daje opsežni pregled lekcije • organizira materijal za poučavanje • vizualizacija procesa poučavanja • povezivanje novih i starih pojmova • razlaganje složenih ideja ili problema • provjera razine razumijevanja studenata • identifikacija slabih točaka ili krivih uvjerenja • interdisciplinarna povezanost • aktivno uključivanje studenata • dubinsko razumijevanje koncepata • viša razina Bloomove taksonomije

3.1. Konstrukcija konceptualne mape

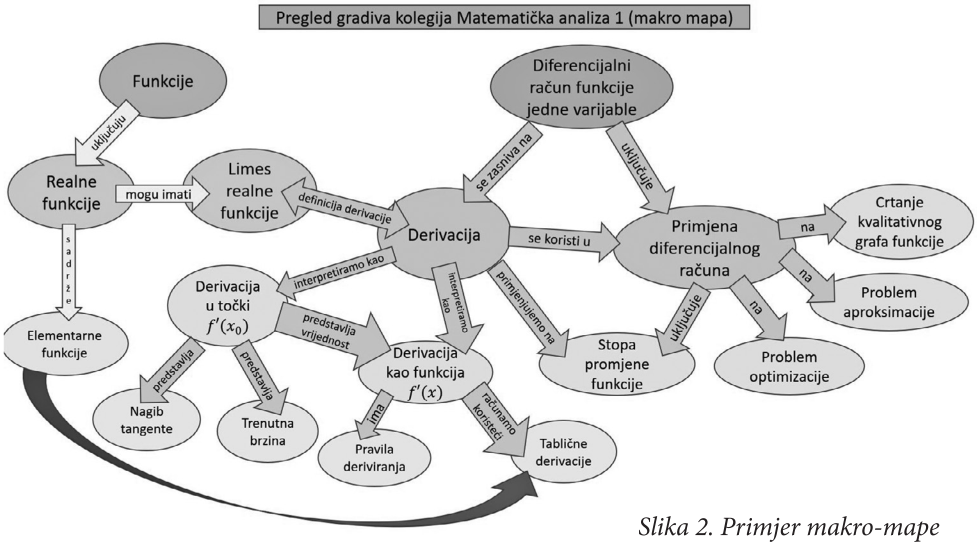
Stvaranje konceptualne mape kreativan je proces za organiziranje, povezivanje i dubinsko razumijevanje sadržaja. Sam proces možda je i važniji od završnog proizvoda jer dovodi do aktivnog uključivanja i dubinskog istraživanja pojma ili konteksta. Osnovni koraci u stvaranju mape su:

1. izabrati domenu znanja (kontekst), središnji problem ili koncept,
2. odrediti listu ključnih pojmova i koncepata iz domene,
3. organizirati pojmove prema hijerarhiji (od općenitih prema specifičnim),
4. napraviti preliminarnu mapu,
5. povezati pojmove i opisati poveznice,
6. revizija mape (mijenjanje pozicije koncepta radi jasnije slike),
7. finalna mapa (mapa se stalno mijenja i nadopunjuje).

Pri stvaranju mape posebno treba biti pažljiv kod povezivanja pojmova i opisivanja njihovih veza jer je većina pojmova nekako povezana pa je potrebno napraviti selekciju veza i dati precizan opis veza. Samo opisivanje veza zna biti i najveći izazov kod stvaranja mapa. Proces stvaranja konceptualne mape razvija kritičko mišljenje na sve višim razinama Bloomove taksonomije.

3.2. Primjena konceptualnih mapa

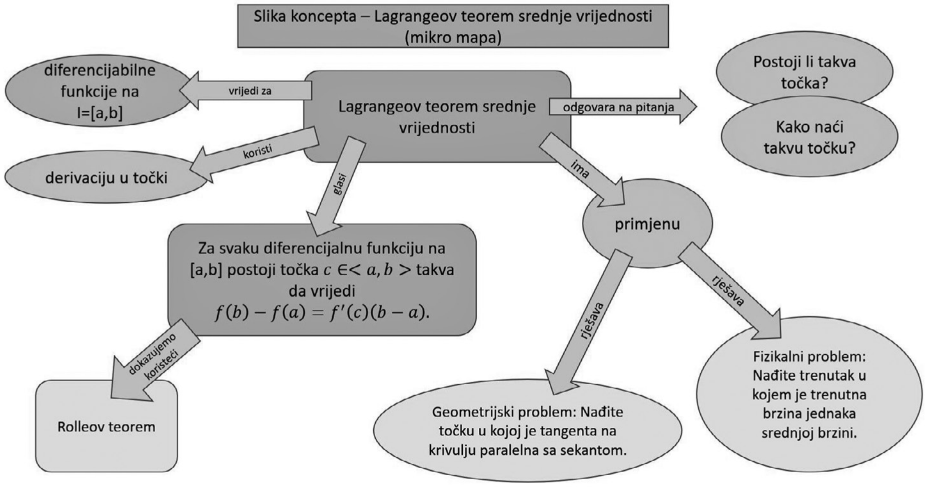
Na nekoliko primjera konceptualnih mapa pokazat ćemo kako se one mogu koristiti u sklopu samog poučavanja. Makro-mape daju širu sliku odnosno koristimo ih kao konceptualne mape gradiva kolegija za pregled gradiva na početku ili na kraju lekcije ili kolegija.



Slika 2. Primjer makro-mape

S druge strane, konceptualne mape za uvođenje novog pojma ili rješavanje složenog problema imaju više detalja te ih zovemo mikro-mape. Sada ćemo prezentirati jednu makro-mapu koja daje pregled gradiva kolegija (Slika 2.), jednu mikro-mapu o uvođenju novog teorema (Slika 3.) te mikro-mapu o rješavanju problemskog zadatka (Slika 4.).

Mapa na Slici 2. sadrži pregled glavnih koncepata diferencijalnog računa (limes i derivacija) te prikazuje cjeline gradiva i njihovu povezanost. Iz ove mape možemo iščitati i sam sadržaj kolegija tako da krenemo s lijeve gornje strane i idemo prema dolje pa desno.

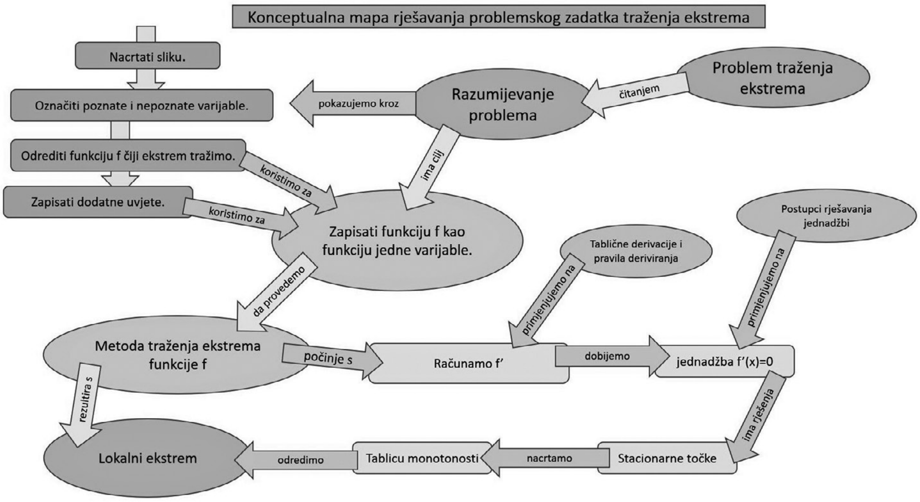


Slika 3. Primjer mikro-mape

Mapa na Slici 3. predstavlja sliku koncepta Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti te povezuje teorem s primjenom u geometriji i fizici. Time dajemo naglasak na ideju samog teorema i na odgovore koje on daje. Ovaj prikaz može pomoći studentima da shvate kako teorem nije samo formula nego da iza njega postoji cijela priča koju treba razumjeti i znati ispričati.

Pomoću mape na Slici 4. pokazujemo osnovne korake u rješavanju problemskih zadataka s lokalnim ekstremima, zajedno sa svim potrebnim konceptima i procedurama rješavanja. Time olakšavamo studentima razumijevanje metode i omogućavamo im da brže pronađu mjesta u rješavanju problemskih zadataka s kojima imaju problema ili koja im predstavljaju izazov. Ovakva konceptualna mapa, ali prazna, može se studentima ostaviti da sami ispunjavaju dok rješavaju problemski zadatak.

Osim korištenja na nastavi ili u materijalima, također je preporučljivo studente naučiti kako mogu samostalno koristiti konceptualne mape za organizaciju i strukturiranje znanja, kvalitetnije povezivanje s novim znanjem te za provjeru vlastite slike



Slika 4. Mikro-mapa za problemski zadatak

koncepta radi identifikacija pogrešnih uvjerenja. To se može napraviti kroz jednu praktičnu vježbu na nastavi u obliku grupnog izrađivanja konceptualne mape na kraju poglavlja ili lekcije. Nakon toga im se mogu dati slični zadatci za samostalan rad. Na primjer:

Zadatak 1. *Nadopuni oznake veza u zadanoj konceptualnoj mapi.*

Zadatak 2. *Riješi jedan problemski zadatak iz lokalnih ekstrema koristeći konceptualnu mapu na Slici 3.*

Zadatak 3. *Napravite konceptualnu mapu tipa 1 za sljedeće koncepte: funkcija jedne varijable, eksponencijalna funkcija, limes funkcije, derivacija i integral.*

4. Ciljana pitanja

Ciljana pitanja su pitanja kreirana tako da provjeravaju razumijevanje koncepata i ispravljaju pogrešno stvorene slike koncepata ili pomažu u proširenju ispravne slike koncepta. Kao što je navedeno u [5], trebala bi stimulirati motivaciju i znatiželju studenta, pomagati studentima i predavaču da razriješe najčešće nejasnoće i zablude, pomagati studentima da nadgledaju svoje razumijevanje, iskorištavati prijašnje znanje i načine razmišljanja u smislu poveznice s novim gradivom. Ovdje ćemo izložiti par pitanja koja ispituju razumijevanje i pomažu u ispravljanju krivo stvorene slike koncepta. Neka od ovih pitanja preuzeta su iz literature [9] .

Pitanje 1. Odredite, ako postoje, gomilišta niza

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n, & n \leq 10^9 \\ \dfrac{1}{n}, & n > 10^9 \end{cases}.$$

Odgovor: Ovaj niz ima samo jedno gomilište i to je njegov limes niza.

Cilj: Ispraviti krivo stvorenu sliku koncepta gomilišta niza. Dosta studenata ovdje će napisati da niz ima tri gomilišta. Primjer služi širenju slike koncepta gomilišta, te ukazuje na detalj da svako gomilište niza u svakoj svojoj okolini mora sadržavati beskonačno mnogo članova niza.

Pitanje 2. Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovore obrazložite.

a) Svako gomilište niza je limes niza.

b) Limes niza je gomilište niza.

c) Niz koji je konvergentan ima točno jedno gomilište.

d) Ako niz nema gomilišta, onda je konvergentan.

e) Ako niz ima više od jednog gomilišta, onda niz divergira.

Odgovor: Tvrdnja a) je netočna, tvrdnja b) je točna, tvrdnja c) je točna, tvrdnja d) je netočna, tvrdnja e) je točna.

Cilj: Objasniti razliku između gomilišta i limesa niza. Ovo pitanje uvodimo nakon što smo uveli i razjasnili koncepte gomilišta i konvergencije.

Pitanje 3. Je li sljedeća tvrdnja točna ili netočna?

Kada se x približava vrijednosti 100, funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *se približava* 0 *pa je limes kada x teži prema 100 funkcije f jednak nuli.*

Odgovor: Netočno.

Cilj: ovo pitanje ukazuje na neke pogrešne slike koje može stvoriti tvrdnja

„$f(x)$ se približava vrijednosti L kada $x \to a$, pa je prema tome $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$."

Pitanje 4. Ako funkcija f nije definirana u $x = a$, tada

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ne može postojati.

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ može biti 0.

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mora biti ∞.

d) Ništa od navedenog.

Odgovor: Točan odgovor je b).

Cilj: Odgovori a) i c) odgovori su koje studenti često odaberu zbog pogrešne slike koncepta limesa. $f(a)$ ne mora biti definirana da $\lim_{x\to a} f(x)$ postoji, i ne mora težiti u beskonačnost. Nadalje, limes može biti 0, npr. uzmimo funkciju $f(x)=0$ za sve $x \neq a$.

Pitanje 5. Je li sljedeća tvrdnja točna ili netočna?

Funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ *je prekinuta.*

Odgovor: Tvrdnja je netočna.

Cilj: Uočiti detalj definicije da se neprekinutost definira u točki domene funkcije. Ova je funkcija neprekinuta na svojoj domeni.

Pitanje 6. Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne?

a) $\lim_{x\to a} f(x)=L$ i $a \in D(f)$, tada je $L = f(a)$.

b) Ako funkcija ima lijevi i desni limes u točki $a \in \mathbb{R}$, tada postoji limes funkcije u toj točki.

c) Ako funkcija ima limes u točki $a \in \mathbb{R}$, onda ima i jednostrane limese u toj točki.

Odgovor: Tvrdnje a) i b) su netočne. Tvrdnja c) je točna.

Cilj: Proširiti sliku jednostranih limesa, postojanje limesa i neprekinutosti funkcije.

Pitanje 7. Točimo vodu u cilindričnu vazu s bazom radijusa *r*. Visina vode mijenja se kako se voda toči. Trenutna promjena visine u odnosu na volumen vode u vazi tada je:

a) konstantna;

b) varira recipročno r^3;

c) nemamo dovoljno informacija.

Odgovor: a)

Cilj: Uočiti da računanjem srednje brzine dobivamo veličinu koja ovisi samo o radijusu, pa je trenutna promjena jednaka srednjoj promjeni.

Pitanje 8. Točimo čaj u standardnu šalicu koja ima uži radijus na dnu i širi se prema vrhu. Visina čaja u šalici je funkcija volumena čaja u šalici. Graf ove funkcije je

a) rastući i konkveksan;

b) rastući i konkavan;

c) pravac s pozitivnim nagibom.

Odgovor: b)

Cilj: Prepoznavanje monotonosti funkcija i povezivanje s rastom i padom, odnosno konveksnošću i konkavnošću. Nije teško vidjeti da je funkcija visine u zavisnosti od volumena *v(V)* rastuća funkcija, odnosno što više čaja ulijevamo, to je veća visina. Nadalje, brzina promjene visine u odnosu na volumen, odnosno funkcija *v′(V)* je padajuća funkcija jer se šalica širi prema vrhu, dakle povećanjem volumena dobivamo sve manju promjenu u visini. Iz ovoga se može zaključiti konkavnost.

Pitanje 9. Je li sljedeća tvrdnja točna ili netočna? Ako je tvrdnja netočna, navedite protuprimjer.
Svaka funkcija koja ima tangentu u točki $a \in D(f)$ ujedno je i diferencijabilna u toj točki.

Odgovor: Tvrdnja je netočna.

Cilj: Pitanje produbljuje sliku tangente. Tangenta može biti i pravac paralelan osi ordinata. Protuprimjer bi bila funkcija $f(x)=\sqrt[3]{x}$ za koju u točki $x = 0$ derivacija ne postoji, odnosno nije konačna, ali crtanjem grafa jasno se može vidjeti da je pravac $x = 0$ vertikalna tangenta.

Pitanje 10. Ako za neprekinutu funkciju f i $a \in D(f)$ vrijedi $\lim\limits_{x\to a+} f'(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to a+} f'(x) = +\infty$, tada

a) funkcija u točki *a* ima lokalni minimum,

b) funkcija u točki *a* ima vertikalnu tangentu,

c) točka *a* je točka infleksije.

Odgovor: a)

Cilj: Proširiti sliku lokalnih ekstrema koji se mogu javiti kod funkcija koje imaju šiljak. Širenje slike neprekinute funkcije koja nije diferencijabilna u točki.

5. Zaključak

U praksi često nailazimo na proceduralni pristup poučavanju, što potiče površan pristup učenju i usvajanju gradiva studenata. U ovom radu opisano je konceptualno poučavanje koje je okrenuto studentu i dubinskom pristupu učenju te su predstavljeni primjeri kako nastavnik može usmjeriti svoje poučavanje tako da kod studenata potiče dublje shvaćanje gradiva i pridruženih pojmova i koncepata. U gradivu diferencijalnog računa identificirali smo koncepte koji su složeni i time za studente zahtjevni te smo pokazali ciljana pitanja i kreirali konceptualne mape za takve koncepte. Nadalje, prilikom poučavanja potrebno je poraditi na formiranju što više motivacijskih primjera iz svakodnevnog života, struke i znanosti kojima uvodimo i primjenjujemo matematičke koncepte i pojmove.

Literatura

1. I. Brnetić i ostali, *Matematička analiza 1*, online skripta, FER, 2019.
2. K. Chappell, K. Killpatrick. (2003.). *Effects of concept-based instructions on students' conceptual and procedural knowledge of calculus.* PRIMUS: Problems, Resources and Issues in Mathematics Udergraduate Studies, 13 (1): 17-37
3. El Gaidi, K. , Ekholm, T. (2015.) *Contextualizing calculus with everyday examples to enhance conceptual learning.* In: ASEE Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings.
4. Engelbrecht, J., Bergsten, C., Kågesten, O. (2012.). *Conceptual and Procedural Approaches to Mathematics in the Engineering Curriculum: Student Conceptions and Performance*. Journal of Engineering Education, 101: 138-162.
5. Gusić, M. (2016.). *Uloga nastavnika pri formiranju matematičkih koncepata kod učenika.* Poučak, 17 (67), 4-12.
6. Horvat Dmitrović, L., Žgaljić Keko, A. (2017.). *Primjena metoda aktivnog učenja u poučavanju funkcija više varijabli na tehničkom fakultetu*. Poučak, 18 (70), 46-57
7. H. Lynn Erickson, *Concept-Based Curriculum and Instruction: Teaching Beyond the Facts*, Corwin Press, Inc, USA, 2002.
8. J.D. Novak, A.J. Canas, *The Theory of Underlying Concept Maps and How to Construct and Use Them*, Technical Report IHMC CmapTools 2006-01 Rev 2008-01, Institute for Human and Machine Cognition, 2008.
9. Tall, D. & Vinner, S. *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular references to Limits and Continuity*, Educ Stud Math (1981.) 12: 151. https://doi.org/10.1007/BF00305619
10. Izvor primjera testova koncepata: http://mathquest.carroll.edu/libraries/