STUDENTSKA KATEDRA

Matematička indukcija

Karmela Šagud[1], Željka Toplek[2] i Maja Vojnović[3]

Sažetak: U ovom radu obradile smo temu matematičke indukcije. Navele smo Peanove aksiome, od kojih je jedan aksiom matematičke indukcije. Pokazale smo važnost matematičke indukcije osobito za dokazivanje brojnih tvrdnji i formula. Zadaci koje smo obradile pojavljuju se na različitim natjecanjima od 1. do 4. razreda srednje škole. Rad obuhvaća i neke druge zanimljive i zahtjevnije zadatke. Zadaci su iz područja geometrije, algebre i trigonometrije.

Ključne riječi: Peanovi aksiomi, matematička indukcija, algebra, trigonometrija, zadaci

Matematička indukcija

Matematička indukcija jedna je od Peanovih aksioma skupa prirodnih brojeva, a koristi se za dokazivanje tvrdnji koje ovise o prirodnim brojevima. Koristi se u gotovo svim područjima matematike. Matematičkom indukcijom ne računa se vrijednost, već se pokazuje istinitost ili neistinitost neke tvrdnje koja ovisi o prirodnom broju.

Nepotpuna matematička indukcija

Indukcija je način zaključivanja koji od promatranja posebnih slučajeva dovodi do općih zaključaka, međutim u matematici takvo zaključivanje ne mora biti dobro. Zato se ta indukcija u matematici zove nepotpuna indukcija i ona nema moć dokaza. Takva nepotpuna indukcija smatra se heurističkom, tj. pomaže nam da iz posebnih slučajeva dobijemo više ili manje vjerojatne hipoteze koje onda dalje provjeravamo te tu leži njezina vrijednost.

Kada bi naša hipoteza imala svojstvo *slijednosti*, odnosno kada bi iz činjenice da hipoteza vrijedi za neki element slijedilo da ona onda vrijedi i za sljedeći element toga skupa – iz toga bi slijedilo da ona vrijedi za sve elemente tog skupa te bi indukcija imala moć dokaza. To svojstvo slijednosti dobiva se principom matematičke indukcije. [9].

[1]Karmela Šagud, studentica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu
[2]Željka Toplek, studentica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu
[3]Maja Vojnović, studentica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Peanovi aksiomi

Peanovi[4] aksiomi

1. Svaki prirodni broj ima sljedbenika, tj. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! s(n) \in \mathbb{N}$ i ako je $s(n) = s(m)$ onda je $n = m$.
2. Postoji prvi element u skupu $\mathbb{N}$ i označavamo ga sa 1, tj. $1 \in \mathbb{N}$. To je jedini element koji nije sljedbenik nekog prirodnog broja.
3. Vrijedi aksiom matematičke indukcije.

Aksiom matematičke indukcije

Neka $S \subseteq \mathbb{N}$ ima sljedeća svojstva:

(a) $1 \in S$,

(b) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$.

Tada je $S = \mathbb{N}$.

Aksiom matematičke indukcije navodi sljedeće. Promatrajmo skup prirodnih brojeva. Ako on sadrži neki broj, onda sadrži i njegovog sljedbenika. Za svaki prirodni broj znamo koji broj dolazi nakon njega, tj. koji broj mu je sljedbenik. Ako krenemo od prvog prirodnog broja, kojeg označavamo s 1, i od svakog broja prijeđemo na njegovog sljedbenika, proći ćemo svim prirodnim brojevima [7].

Princip matematičke indukcije

Treba dokazati da neka tvrdnja T_n koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$ vrijedi za sve prirodne brojeve *n*. U tu svrhu, prema principu matematičke indukcije dovoljno je napraviti sljedeće:

(i) **baza indukcije** $(n=1)$: Pokazati da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

(ii) **induktivna pretpostavka** $(n=k)$: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj *k*.

(iii) **korak indukcije** $(n=k+1)$: Koristeći induktivnu pretpostavku treba pokazati da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $k+1$.

Tada tvrdnja T_n vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Poopćeni princip matematičke indukcije

(i) **baza:** Tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za $n = n_0$.

(ii) **pretpostavka:** Pretpostavljamo da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za neki $k \geq n_0$.

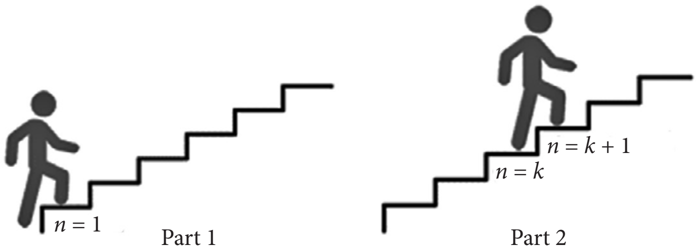
(iii) **korak:** Ako iz pretpostavke indukcije slijedi da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi i za broj $k + 1$, onda navedena tvrdnja vrijedi za svaki broj $n \geq n_0$.

[4] Giuseppe Peano (Torino, 27.8.1858. – Torino, 20.4.1932.), talijanski matematičar

Svaki princip dokazivanja matematičkom indukcijom sastoji se od tri elementa. Prvi nazivamo bazom i u tom elementu dokazujemo da tvrdnja vrijedi za n_0. Pretpostavka je drugi korak u kojem se pretpostavlja da tvrdnja vrijedi za neki $n = k$. Korak indukcije se temelji na dokazivanju tvrdnje za $n = k + 1$ uz korištenje pretpostavke kojim se onda dokazuje da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve [8].

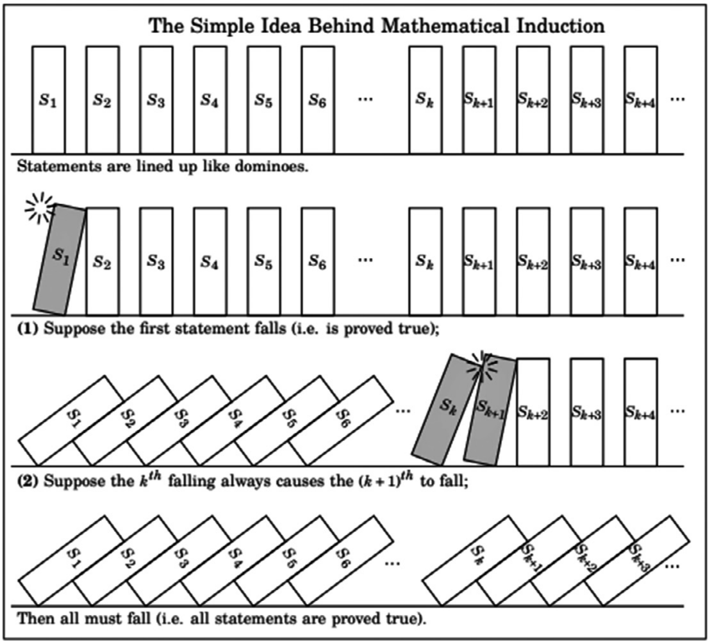
U knjizi *Concrete Mathematics* autora Grahama, Knutha i Patashnika (1994.) matematička indukcija slikovito je prikazana kao penjanje na ljestve.

Matematička indukcija princip je koji kaže: ako se možemo popeti ljestvama koliko god visoko želimo, podrazumijeva da smo morali početi od početka – od tla pa na prvu stepenicu, te da se i dalje sa svake možemo popeti na sljedeću.



Slika 1. Prikaz indukcije stepenicama – preuzeto s [11]

Drugi slikovit prikaz su pločice domina. Imamo složen niz domina te želimo indukcijom pokazati da će pasti n-ta pločica u nizu. Najprije je potrebno pokazati da



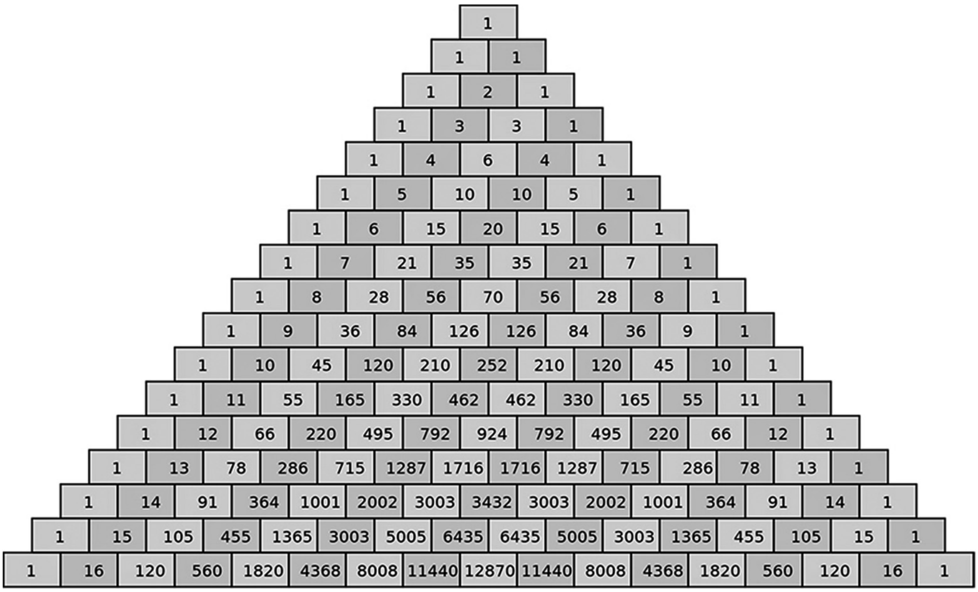
Slika 2. Prikaz indukcije domino pločicama – preuzeto s [12]

će k-to domino srušiti k + 1-vo domino, normalno to znači da će n-ta pločica pasti ako padne ona prije nje. Kako bi n-ta pločica stvarno pala, zapravo prvo mora pasti prva i srušiti drugu, druga će srušiti treću, treća četvrtu i tako do n-te pločice. Prvu pločicu u igri rušimo sami, a u matematičkoj indukciji to je provjera baze indukcije. Ako ne padne prva pločica, neće pasti niti jedna nakon nje, što vrlo lijepo ilustrira koliko je važno uvijek provjeriti bazu indukcije iako se to ponekad čini trivijalno [8].

Kratki osvrt na povijest matematičke indukcije

Prvi počeci dokazivanja matematičkom indukcijom naziru se u brojnim spisima Grka o čemu nam svjedoči Platonovo[5] djelo *Parmenid* iz 370. godine pr.Kr. Najraniji implicitni primjer dokazivanja ovom metodom je Euklidov[6] dokaz da prostih brojeva ima beskonačno mnogo. Ovu metodu također je koristio Al-Karaji oko 1000. godine za dokaz binomnog teorema i svojstava Pascalovog trokuta.

Induktivnu pretpostavku prvi je koristio Francesco Maurolico[8] za dokaz da je zbroj prvih n brojeva $\dfrac{n(n+1)}{2}$ u djelu *Arithmeticorum libri duo* napisanog 1557. godine, tiskanog u Veneciji 1575. godine u zbirci *D. Francisci Maurolyci Opuscula mathematica*.



Slika 3. Pascalov trokut – preuzeto s [13]

[5]Platon (Atena, 428. ili 427. pr. Kr. – Atena, 347. ili 348. pr. Kr.), grčki filozof

[6]Euklid (Aleksandrija, oko 330. g. pr. Kr. – oko 275. g. pr. Kr.), starogrčki matematičar

[7]Abū Bakr ibnMuḥammadibnalḤusaynal-Karajī (Karaj, oko 953. g. pr. Kr. – oko 1029. g. pr. Kr.), perzijski matematičar

[8]Francesco Maurolico (Messina, 16.9.1494. – Messina, 22.7.1575.), talijanski matematičar i astronom

Blaise Pascal[9] prvi je u svojim djelima dao potpunu eksplicitnu formulaciju matematičke indukcije. Ovu metodu dokazivanja objašnjava u specifičnom kontekstu dokaza o brojevima u trokutu poznatijem kao *Pascalov trokut* iako je taj trokut bio poznat još u 10. stoljeću prije Krista. Binomni koeficijenti mogu se izračunati kao dijelovi *Pascalovog trokuta* koji počinje u jednom vrhu s 1 i oni se nastavljaju svaki na svoju stranu, a svaki broj ispod zbroj je dva broja iznad sebe.

Naziv **matematička indukcija** prvi put se pojavljuje u De Morganovom[10] članku *Mathematical induction* , tiskanom 1838., nakon toga ga je usvojio i popularizirao I. Todhunter[11] u svojoj algebri [2].

Matematička indukcija u zadacima

Matematička indukcija primjenjuje se u gotovo svim područjima matematike, posebno u geometriji, trigonometriji i algebri.

U ovom odjeljku raspisat ćemo neke odabrane zadatke s natjecanja.

Matematička indukcija u geometriji

Zadatak 1. Dokažite da je za sve n-terokute vrijedi formula za sumu kutova:

$$S_n = (n-2)180°.$$

Rješenje: Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom, a za bazu uzimamo $n = 3$ jer n je broj vrhova, a trokut je n-terokut s najmanje vrhova. Napomenimo da se ovdje koristi generalizirani princip matematičke indukcije jer baza kreće od $n = 3$, a ne od $n = 1$

$$S_3 = (3-2)180° = 180°$$

Dobivamo da je suma kutova u trokutu 180° što znamo da uvijek vrijedi.

Pretpostavljamo da formula vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. U koraku indukcije tada uvrštavamo $n + 1$

$$S_{n+1} = ((n+1)-2)180° = (n-1)180°.$$

Znamo da n predstavlja broj vrhova u mnogokutu, pa onda $(n + 1)$-terokut ima $n + 1$ vrhova, odnosno točno jedan više od n-terokuta, a iz pretpostavke znamo da za n-terokut vrijedi formula $S_n = (n - 2)\ 180°$. Kada n-terokutu dodajemo jedan „novi" vrh zapravo dodajemo cijeli jedan trokut, odnosno dodajemo „novih" 180° stupnjeva. Stoga ima smisla da ako je $S_n = (n - 2)\ 180°$ istina za n-terokut, i tome dodamo 180°, dobivamo sumu vrhova $(n + 1)$-terokuta

$$S_n + 180° = (n-2)180° + 180° = n \cdot 180° - 360° + 180° = n \cdot 180° - 180° = (n-1)180°.$$

[9]Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 19. 9. 1623. – Pariz, 19. 8. 1662.), francuski filozof, matematičar i fizičar

[10]Augustus De Morgan (Madurai, 27. 6. 1806. – London, 18. 3. 1871.), britanski matematičar i logičar

[11]Isaac Todhunter (Rye, 23. 11. 1820. – Cambridge, 1. 3. 1884.), britanski matematičar

Zadatak 2. (Zadatak je preuzet s web stranice udruge Mladi nadareni matematičari „Marin Getaldić". [8])

Dokažite da je broj dijagonala pravilnog n-terokuta jednak $\frac{n(n-3)}{2}$.

Rješenje: Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Uočimo da tvrdnja ima smisla za $n \geq 3$, mnogokut ima najmanje tri vrha.

Dakle koristimo generalizirani princip matematičke indukcije, pri čemu je $n_0 = 3$.

Baza: Za $n = 3$ tvrdnja vrijedi jer trokut ima 0 dijagonala.

Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$, odnosno da za taj k svaki k-terokut ima $\frac{k(k-3)}{2}$ dijagonala. Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k + 1$. Uzmimo proizvoljni $(k + 1)$-terokut S i označimo jedan njegov vrh s T.

Sada promotrimo k-terokut S_1 koji dobijemo „izbacivanjem" vrha T iz $(k + 1)$-terokuta S. Odnosno S_1 je k-terokut kojem su stranice: dužina koja povezuje susjedne vrhove točke T i stranice od S bez stranica koje povezuju točku T sa susjednim vrhovima.

Sada uočimo da su dijagonale od S koje ne sadrže točku T upravo dijagonale od S_1, zajedno s dijagonalom koja povezuje susjedne vrhove od T. Dakle, ukupan broj dijagonala od S je za 1 veći od sume broja dijagonala od S_1 i broja dijagonala od S koje prolaze točkom T.

Prvi broj u ovoj sumi je po pretpostavci jednak $\frac{k(k-3)}{2}$, a drugi broj je jednak $k-2$ jer je to broj spojnica vrha T s vrhovima u S koji mu nisu susjedni. Dakle, sveukupno imamo

$$\frac{k(k-3)}{2}+(k-2)+1=\frac{(k+1)((k+1)-3)}{2}$$

dijagonala. Korak indukcije je dokazan, pa tvrdnja zadatka vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Matematička indukcija u algebri

Zadatak 3. (Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 4. razred, srednja škola, B varijanta, 2014. godina)

Dokažite da sljedeća jednakost vrijedi za sve prirodne brojeve n

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}.$$

Rješenje: Obzirom da se svako dokazivanje matematičkom indukcijom sastoji od baze, pretpostavke i koraka tako i u ovom zadatku najprije provjeravamo bazu, tj. vrijedi li tvrdnja za $n = 1$.

Prvo $n = 1$ uvrštavamo u lijevu stranu jednakosti i dobijemo

$$\frac{1}{(1+1)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Sada u desnu stranu jednakosti uvrštavamo $n = 1$.

$$\frac{(1+1)!-1}{(1+1)!} = \frac{2!-1}{2!} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dobijemo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, ustanovili smo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavimo da zadana tvrdnja vrijedi za neki proizvoljan broj n. Sada, u koraku indukcije dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za njegovog sljedbenika $n + 1$.

Treba dokazati da je:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}.$$

U početni izraz uvrstili smo $n + 1$ umjesto n. Koristeći pretpostavku indukcije, lijevu stranu možemo raspisati:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{((n+1)!-1)}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}.$$

Desnu stranu posljednje jednakosti sređujemo svođenjem na zajednički nazivnik

$$\frac{((n+1)!-1)}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)(n+1)!} = \frac{((n+1)!-1)(n+2)+(n+1)}{(n+2)(n+1)!}.$$

Primijetimo da je

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)!.$$

pa imamo

$$\frac{(n+2)(n+1)!-(n+2)+(n+1)}{(n+2)!} = \frac{(n+2)(n+1)!-1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}.$$

Vidimo da smo dobili traženi izraz.

Kako iz pretpostavke znamo da tvrdnja ako vrijedi za n onda vrijedi i za $n + 1$, zaključujemo da dana tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Zadatak 4. (Školsko/gradsko natjecanje, srednja škola, A varijanta, 2014. godine)

Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi:

$$\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\sqrt{(n-2)+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < \sqrt{n}+1.$$

Rješenje: Zadatak se može čini kompliciranim i učenike mogu obeshrabriti korijeni i to što brojevi nisu navedeni već se ispod korijena pojavljuje znak trotočja. Zato je najbolje velik problem podijeliti na manje dijelove i probleme te uvesti pomoćne oznake. Uvodimo oznaku A_n

$$A_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{(n-2) + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1 .$$

Zadatak od nas traži da dokažemo da za svaki n vrijedi ta tvrdnja, kako nas ne zanimaju konkretni brojevi već tvrdnja, i to za svaki n koristit ćemo matematičku indukciju.

Baza: Počinjemo s provjerom da li tvrdnja vrijedi za prvi prirodni broj, a to je 1. Za $n = 1$ je $A_1 = \sqrt{1} < \sqrt{1} + 1$ i tvrdnja vrijedi.

Korak: Sada pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi $A_n < \sqrt{n} + 1$. Koristeći pretpostavku da za neki n vrijedi tvrdnja, želimo vidjeti da li vrijedi i za $n + 1$. Izraz $A_{n+1}+ {}_{n+1}$ izgleda ovako:

$$A_{n+1} = \sqrt{(n+1) + A_n} .$$

Koristeći pretpostavku indukcije o A_n zaključujemo

$$A_{n+1} < \sqrt{n+1+\sqrt{n}+1}.$$

Raspisujući desnu stranu nejednakosti slijedi da je

$$A_{n+1} < \sqrt{n+1+\sqrt{n}+1} < \sqrt{n+1+2\sqrt{n+1}+1} .$$
$$= \sqrt{(\sqrt{n+1}+1)^2} = \sqrt{n+1}+1 .$$

Desnu smo stranu nadopunili do punog kvadrata da bi lakše pročitali rješenje. Kada je lijevi izraz manji od desnog možemo na desnu stranu još dodati nešto što nam olakšava postupak, a da pri tome ne utječemo na nejednakost.

Budući da je $A_1 < \sqrt{1} + 1$ i da iz $A_n < \sqrt{n} + 1$ slijedi

$$A_{n+1} < \sqrt{(n+1)} + 1 ,$$

po principu matematičke indukcije zaključujemo da za svaki prirodni broj vrijedi $A_n < \sqrt{n} + 1.$

Zadatak 5. (Županijsko natjecanje, 4. razred srednje škole, A varijanta, 2017. godine)

Dan je niz pozitivnih realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots$ takvih da vrijedi

$$a_1 = 1 - a_0, \quad a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n), \quad \text{za } n \geq 1.$$

Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$a_0 a_1 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

Rješenje: Tvrdnju dokazujemo koristeći matematičku indukciju stoga krećemo od baze. Najprije pokazujemo da tvrdnja vrijedi za neki n, u ovom slučaju uzimamo $n = 0$, jer niz počinje članom a_0. Vidimo da je $a_0 \cdot \frac{1}{a_0} = 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki broj $n \geq 0$. Tada je

$$a_0 a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdot \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) =$$

$$a_{n+1} \cdot a_0 a_1 \cdots a_n \cdot \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) + a_0 a_1 \cdots a_n =$$

$$(\text{pretpostavka}) = a_{n+1} \cdot 1 + a_0 a_1 \cdots a_n .$$

Raspisujemo a_{n+1} kako je zadan po definiciji: $a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) = 1 - a_n + a_n \cdot a_n$ te uočavamo da će korak indukcije biti proveden ako dokažemo sljedeću pomoćnu tvrdnju: $a_n = 1 - a_0 a_1 \cdots a_n$. Pomoćnu tvrdnju također dokazujemo matematičkom indukcijom po n. Za $n = 1$ vrijedi $a_1 = 1 - a_0$ prema definiciji. Pretpostavimo da pomoćna tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n. Tada je

$$a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) = 1 - a_n \cdot a_0 a_1 \cdots a_{n-1} = 1 - a_0 a_1 \cdots a_n .$$

Prema principu matematičke indukcije slijedi da pomoćna tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, time je dovršen i korak indukcije u dokazivanju tvrdnje iz zadatka, pa prema principu matematičke indukcije tvrdnja zadatka vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

Matematička indukcija u trigonometriji

Metoda dokazivanja matematičkom indukcijom koristi se za dokazivanje raznih matematičkih izraza na svim područjima matematike pa tako i u trigonometriji. Iako je sam princip matematičke indukcije jednostavan, njime se mogu dokazati vrlo komplicirani matematički izrazi.

Zadatak 6. (Zadatak je preuzet s web stranice matemanija.com. [6])

Dokažite matematičkom indukcijom da tvrdnja vrijedi.

$$\cos(x)\cos(2x)\cdots\cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{(n+1)} x)}{2^{(n+1)} \sin(x)}.$$

Rješenje: Najprije je potrebno provjeriti bazu indukcije. Uzimamo $n = 1$.

$$\cos(x)\cos(2x) = \frac{\sin(2^{(1+1)} x}{2^{(1+1)} \sin(x)} = \frac{\sin(2^2 x)}{2^2 \sin(x)} = \frac{\sin(4x)}{4\sin(x)} .$$

Sada ćemo na dobiveni izraz dva puta primijeniti trigonometrijskih identitete za funkcije dvostrukog argumenta:

$$\frac{\sin(4x)}{4\sin(x)}=\frac{2\sin(2x)\cos(2x)}{4\sin(x)}=\frac{2(2\sin(x)\cos(x))\cos(2x)}{4\sin(x)}=\cos(x)\cos(2x).$$

Skraćivanjem razlomka dobili smo početni izraz što znači da naša tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavka:

$$\cos(x)\cdot\cos(2x)\cdots\cos(2^n x)=\frac{\sin(2^{(n+1)}x)}{2^{(n+1)}\cdot\sin(x)}.$$

Nadalje, u koraku indukcije pokazujemo da tvrdnja vrijedi i za njegovog sljedbenika što je u našem slučaju $n + 1$.

Izraz izgleda:

$$\cos(x)\cos(2x)\cdots\cos(2^n x)\cos(2^{(n+1)}x)=\frac{\sin(2^{(n+2)}x)}{2^{(n+2)}\sin(x)}\text{, odnosno}$$

$$\cos(x)\cos(2x)\cdots\cos(2^n x)\cos(2^{(n+1)}x)=\frac{\sin(2\cdot 2^{(n+1)}x)}{2\cdot 2^{(n+1)}\cdot\sin(x)}.$$

Sada primijenimo pretpostavku na lijevu stranu jednakosti

$$\frac{\sin(2^{(n+1)}x)}{2^{(n+1)}\cdot\sin(x)}\cos(2^{(n+1)}x)=\frac{\sin(2\cdot 2^{(n+1)}x)}{2\cdot 2^{(n+1)}\cdot\sin(x)}.$$

Na desnu stranu jednakosti u brojniku opet primjenjujemo formule za funkcije dvostrukog argumenta

$$\frac{\sin(2^{(n+1)}x)}{2^{(n+1)}\cdot\sin(x)}\cos(2^{(n+1)}x)=\frac{2\cdot\sin(2^{(n+1)}x)\cdot\cos(2^{(n+1)}x)}{2\cdot 2^{(n+1)}\cdot\sin(x)}.$$

Sada obje strane jednakosti podijelimo sa $\cos(2^{(n+1)}x)$ i dobivamo:

$$\frac{\sin(2^{(n+1)}x)}{2^{(n+1)}\cdot\sin(x)}=\frac{\sin(2^{(n+1)}x)}{2^{(n+1)}\cdot\sin(x)}.$$

Ovime smo dokazali da po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Zadatak 7. (Zadatak je preuzet s web stranice Prve gimnazije Varaždin. [10])

Koristeći matematičku indukciju dokažite:

$$\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cdots+\cos((2n-1)x)=\frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}.$$

Rješenje: Provjerit ćemo vrijedi li tvrdnja za $n = 1$.

Lijeva strana jednakosti iznosi

$$\cos((2\cdot 1-1)x)=\cos((2-1)x)=\cos x.$$

Desna strana jednakosti iznosi
$$\frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}.$$
Lijeva strana mora biti jednaka desnoj
$$\cos x = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}.$$
U ovom koraku sređivanja izraza u nazivniku razlomka s desne strane jednakosti koristimo formulu za sinus dvostrukog kuta:
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x);$$
$$\cos(x) = \frac{2\sin(x)\cdot\cos(x)}{2\sin(x)}.$$
Skraćivanjem razlomka na desnoj strani dobivamo:
$$\cos(x) = \cos(x)$$
čime smo dokazali da vrijedi baza indukcije.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi:
$$\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cdots+\cos(2n-1)x = \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}.$$
U koraku indukcije moramo dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$.

Najprije možemo pogledati kako bi izraz na desnoj strani izgledao kada bi suma na lijevoj strani izraza imala $n + 1$ članova. To ćemo učiniti tako što ćemo u izraz na desnoj strani umjesto n uvrstiti $n + 1$:
$$\frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin(x)}.$$
Sada računamo sumu na lijevoj strani izraza:
$$\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cdots+\cos(2n-1)x+\cos(2(n+1)-1)x.$$
Primijetimo da suma sada ima jednog člana više. Njega smo dobili uvrštavanjem $n + 1$ u opći član sume. Također, uočimo da je zbroj prvih n članova sume jednak
$$\frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}$$
pa dobivamo:
$$\frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}+\cos(2n+2-1)x = \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}+\cos(2n+1)x.$$
Izraz svodimo na zajednički nazivnik
$$\frac{\sin(2nx)+2\cos(2n+1)x\cdot\sin(x)}{2\sin(x)}.$$

Sada u nazivniku izraza koristimo formulu za pretvorbu umnoška u zbroj:

$$\cos(x)\cdot\sin(y)=\frac{1}{2}\cdot\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right].$$

Dobivamo

$$\frac{\sin(2nx)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\sin\left((2n+1)x+x\right)-\sin\left((2n+1)x-x\right)\right]}{2\sin(x)}=$$

$$\frac{\sin(2nx)+\sin(2nx+2x)-\sin(2nx)}{2\sin(x)}=\frac{\sin(2nx)+\sin(2\cdot(n+1)x)-\sin(2nx)}{2\sin(x)}.$$

Sada zbrajanjem dobivamo izraz:

$$\frac{\sin(2(n\quad 1)x)}{2\sin(\quad)}$$

te vidimo da je dobiveni izraz jednak izrazu na početku koraka indukcije što smo i htjeli dokazati. Stoga, po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n\in\mathbb{N}$.

Složeniji zadaci

Zadatak 8. (Županijsko natjecanje, 4. razred srednje škole, A varijanta, 2009. godine)

Dan je niz (a_n):

$$a_1=1,\ a_n=3a_{n-1}+2^{n-1},\text{ za } n\geq 2.$$

Izrazite opći član niza a_n pomoću n.

Rješenje: Trebamo izraziti opći član preko n, znači ne smijemo u tom općem članu imati neki prethodni član niza. Možemo pretpostaviti kako izgleda opći član i onda zadatak riješiti matematičkom indukcijom. Ovaj zadatak je time zanimljiviji jer nije očita primjena matematičke indukcije. Obično nam je formula već dana i mi samo primjenjujemo aksiom matematičke indukcije, sada ju sami trebamo dobiti.

Izračunajmo nekoliko prvih članova niza:

$$a_1=1$$

$$a_2=3a_1+2=3\cdot 1+2=5$$

$$a_3=3a_2+2^2=3\cdot 5+4=19$$

$$a_4=3a_3+2^3=3\cdot 19+8=65$$

$$\ldots$$

Potrebno je napisati a_n izražen preko n, bez ostalih članova niza. Zbog toga kako je niz zadan pretpostavljamo da će biti razlika potencije broja 3 i 2.

Uočimo da je

$$a_1=1=3-2=3^1-2^1,$$

$$a_2 = 5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2,$$
$$a_3 = 19 = 27 - 8 = 3^3 - 2^3,$$
$$a_4 = 65 = 81 - 16 = 3^4 - 2^4.$$

Stoga možemo naslutiti da vrijedi $a_n = 3^n - 2^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza indukcije vrijedi jer vidimo da je $a_1 = 1$.

Pretpostavimo da je za neki prirodan broj k

$$a_k = 3^k - 2^k.$$

Tada je a_{k+1} $= \text{(prema danoj rekurziji)} = 3 \cdot a_k + 2^k$.

$$= \text{(prema pretpostavci za } a_k) = 3 \cdot (3^k - 2^k) + 2^k$$
$$= 3 \cdot 3^k - 3 \cdot 2^k + 2^k = 3^{k+1} - 2 \cdot 2^k$$
$$= 3^{(k+1)} - 2^{(k+1)}.$$

Pretpostavili smo da tvrdnja vrijedi za a_k, a onda pokazali da vrijedi i za a_{k+1}.

Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n = 3^n - 2^n$$

što smo i htjeli pokazati.

Zadatak 9. (Županijsko natjecanje, 4. razred srednje škole, A varijanta, 2012. godine)

Na teniskom turniru sudjelovalo je 2^n igrača, gdje je n prirodan broj. Svaki je igrač odigrao po jedan meč sa svakim od preostalih igrača. Dokažimo da možemo odabrati $n + 1$ igrača i poredati ih u niz, tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega u nizu.

Rješenje: Tvrdnja se dokazuje matematičkom indukcijom po n.

Najprije provjeravamo bazu. Za $n = 1$ bit će $2^1 = 2$ igrača na turniru. Prvi u nizu očito će biti pobjednik turnira, tj. u ovom slučaju njihovog međusobnog meča, a iza njega slijedi preostali igrač.

Pokazali smo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ te pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n, tj. da među 2^n igrača koji su igrali svaki sa svakim možemo odabrati $n + 1$ igrača i poredati ih u niz tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega u nizu.

Promotrimo turnir s 2^{n+1} igrača koji igraju svaki sa svakim. Tvrdimo da je pobjednik tog turnira pobijedio barem 2^n igrača. Kada to ne bi bilo točno, to bi značilo da svi igrači imaju manje od 2^n, tj. najviše $2^n - 1$ pobjeda. Ukupan broj pobjeda na turniru bio bi onda najviše $2^{n+1}\cdot(2^n-1)$. No ukupan broj pobjeda jednak je broju mečeva na turniru, kojih je $\frac{1}{2}\cdot 2^{n+1}\cdot(2^{n+1}-1)=2^n\cdot(2^{n+1}-1)>2^{n+1}\cdot(2^n-1)$. Dakle, nemoguće je da su svi igrači imali manje od 2^n pobjeda.

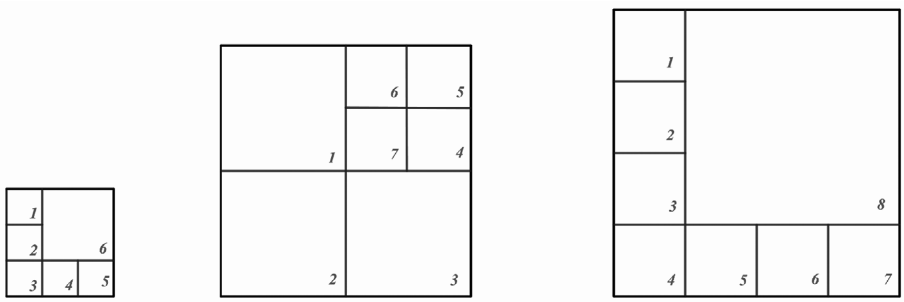
Po pretpostavci, među 2^n igrača koje je pobjednik pobijedio možemo odabrati njih $n+1$ i poredati ih tako da je svaki od njih pobijedio sve igrače koji su iza njega. Pobjednika dodamo na početak i tako dobivamo traženi niz od $n+2$ igrača.

Zadatak 10. Dokažite da se za svaki prirodni broj $n\geq 6$ dani kvadrat može „razrezati" na točno n manjih kvadrata.

Uputa: Možete koristiti matematičku indukciju s korakom 3.

Rješenje:

Baza: U ovom zadatku bazu pokazujemo na slici. Za indukciju ćemo koristiti korak 3 pa zato kao bazu indukcije trebamo provjeriti tvrdnju za $n=6$, $n=7$ i $n=8$.



Slika 4. Prikaz baze indukcije

Korak: Pretpostavimo da za neki $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6$ dani kvadrat možemo „razrezati" na točno n manjih kvadrata.

Pokazat ćemo da tvrdnja tada vrijedi za $n+3$, tj. da kvadrat možemo razrezati i na $n+3$ manja kvadrata. Razrežimo najprije kvadrat na n manjih kvadrata. Odaberimo jednog od manjih kvadrata te njega razrežimo na 4 manja. Time smo veliki kvadrat razrezali na $n-1+4=n+3$ manja kvadrata, tj. pokazali smo tvrdnju za $n+3$.

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da se za svaki $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6$, kvadrat može razrezati na točno n manjih kvadrata.

Zadatak 11. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi:

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Rješenje:

Baza: Najprije u bazi provjeravamo vrijedi li zadana tvrdnja za $n = 1$. Tada suma na lijevoj strani ima samo jedan element:

$$\sum_{k=1}^{1} 1(1-1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{6}, \text{ a što je}$$

$$1 \cdot 1 = \frac{6}{6} \Leftrightarrow$$

$$1 = 1.$$

Korak: Obzirom da smo pokazali da tvrdnja vrijedi za $n = 1$, možemo pretpostaviti da tvrdnja

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Želimo pokazati da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$, odnosno želimo dobiti

$$\sum_{k=1}^{n+1} k((n+1)-k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

Raspisujući sumu na lijevoj strani dobivamo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k+1) &= \sum_{k=1}^{n+1}(kn+k-k^2+k) = \sum_{k=1}^{n+1}(k(n-k+1)+k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k(n-k+1) + \sum_{k=1}^{n+1} k.\end{aligned}$$

Kako je $(n + 1)$-vi član prve sume jednak 0, prva suma jednaka je sumi koja se pojavljuje u pretpostavci indukcije. Druga suma je zbroj prvih $n + 1$ prirodnih brojeva. Sve skupa jednako je

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo

$$\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

Po principu matematičke indukcije za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Zadatak 12. Neka je n prirodan broj. Dokažite da se iz svakog skupa od $2^{n+1}-1$ cijelih brojeva može odabrati 2^n brojeva čiji je zbroj djeljiv s 2^n.

Rješenje:

Baza: Za $n = 1$ provjeravamo tvrdnju:

$$2^{n+1}-1 = 2^2-1 = 3.$$

Imamo tri cijela broja, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Među ta tri broja su ili barem dva parna ili barem dva neparna. U prvom slučaju odabirem podskup od $2^1 = 2$ parna broja, u drugom od 2 neparna broja. Zbroj tih brojeva bit će djeljiv s $2^1 = 2$ te je baza time zadovoljena.

Korak:

Pretpostavka: za neki $n \in \mathbb{N}$ iz svakog skupa od 2^{n+1} cijelih brojeva možemo odabrati 2^n elemenata čija će suma biti djeljiva s 2^n.

Imamo skup od $2^{n+2} - 1$ elemenata. Trebamo pokazati da možemo odabrati nekih 2^{n+1} elemenata takvih da je njihova suma djeljiva s 2^{n+1}. Primijetimo da je

$$2^{n+2} - 1 > 2^{n+1} - 1 .$$

Gledamo neki podskup tog skupa koji ima $2^{n+1} - 1$ element. Iz pretpostavke slijedi da iz tog podskupa možemo izdvojiti 2^n elemenata takvih da je njihova suma djeljiva s 2^n. Neka je ta suma S_1. Kada smo izdvojili 2^n elemenata u cijelom skupu preostaje nam:

$$(2^{n+2} - 1) - 2^n = 2^{n+1} \cdot 2 - 1 - 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 - 2^n = 2^{n+1} - 2^n + 2^{n+1} - 1$$
$$= 2^n (2 - 1) + 2^{n+1} - 1 = 2^n + 2^{n+1} - 1.$$

Dakle, u skupu nam je preostalo $2^n + 2^{n+1} - 1$ elemenata. Obzirom da je $2^n + 2^{n+1} - 1 > 2^{n+1} - 1$ možemo ponovno promatrati podskup tog skupa koji ima $2^{n+1} - 1$ elemenata.

Analogno, pozivajući se na pretpostavku, dobivamo sumu S_2. Preostaje nam $2^n + 2^{n+1} - 1 - 2^n = 2^{n+1} - 1$ elemenata te još jednom ponavljamo postupak kako bi smo dobili sumu S_3.

Sve tri sume djeljive su s 2^n stoga ih možemo zapisati kao

$$S_1 = 2^n \cdot T_1, S_2 = 2^n \cdot T_2, S_3 = 2^n \cdot T_3,$$

gdje su T_1, T_2 i T_3 neki cijeli brojevi.

Ne znamo ništa o njihovoj parnosti, ali imamo situaciju kao u bazi. U bazi smo pokazali da u bilo kojem slučaju od tri elementa možemo izdvojiti dva, označimo ih sa T_i i T_j, takva da je njihova suma parna, $T_i + T_j = 2 \cdot R$, za neki $R \in \mathbb{Z}$. Za pripadne sume S_i i S_j je tada

$$S_i + S_j = 2^n \cdot T_i + 2^n \cdot T_j = 2^n (T_i + T_j) = 2^n \cdot 2 \cdot R = 2^{n+1} \cdot R.$$

Svaka od ove tri sume S_1, S_2, S_3 dobivena je izdvajanjem 2^n elemenata i njihovim zbrajanjem. Kada zbrojimo bilo koje dvije sume zapravo smo zbrojili 2^n i 2^n elemenata, odnosno $S_i + S_j$ je suma $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ elemenata koji su izdvojeni iz početnog skupa od $2^{n+2} - 1$ elemenata.

Dakle, u skupu od $2^{n+1} - 1$ brojeva našli smo podskup od 2^{n+1} brojeva čija je suma djeljiva s 2^{n+1}.

Po principu matematičke indukcije za sve $n \in \mathbb{N}$ iz svakog skupa od $2^{n+1} - 1$ elemenata koji su cijeli brojevi možemo odabrati 2^n elemenata čija će suma biti djeljiva s 2^n.

Zaključak

Matematika je u pravilu deduktivna disciplina stoga je matematička indukcija zanimljiv način dokazivanja, posebno jer se javlja u mnogim područjima. Iako postoji stroga i formalna definicija principa matematičke indukcije i aksiomi na kojima se ona zasniva, važno je i da upoznamo takav način zaključivanja na konkretnim primjerima koji su nam bliski te da se istakne kako se takav način zaključivanja može primijeniti u različitim područjima matematike, a ne samo u području aritmetike i algebre kako se najčešće matematička indukcija uči i primjenjuje u školama.

Bibliografija

1. W. H. Bussey, The Origin of Mathematical Induction, *The American Mathematical Monthly*, 5 (1917.), 199-207

2. R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics: a foundation for computer science*, Addison-Wesley Publishing Company 1994.

a. Horvatek, Natjecanja iz matematike, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm

3. Matemanija, Trigonometrija, http://forum.matemanija.com/viewtopic.php?f=4t=815 sid=e4e79ab250c9b5c5a05ef7f9a54d40a3

4. S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, Zagreb 1979.

5. Mladi nadareni matematičari „Marin Getaldić", http://mnm.hr/wp-content/uploads/11/matematickaindukcija.pdf (16. ožujka 2018.)

6. Element, Nepotpuna indukcija, https://element.hr/artikli/file/1443 (16. ožujka 2018.)

7. Prva gimnazija Varaždin, Trigonometrija, http://www.hornwood.info/matematickaindukcija12trig.pdf

8. Slika 1. Prikaz indukcije stepenicama, http://cdn1.askiitians.com/Images/201743-121937155-3111-2-principle-of-mathematical-induction.png (15. ožujka 2018.)

9. Slika 2. Prikaz indukcije domino pločicama, https://i.stack.imgur.com/bBHiC.png (15. ožujka 2018.)

10. Slika 3. Pascalov trokut, https://wonderopolis.org/wp-content/uploads/2017/01/1853PascalsTriangle2000px-Pascal27sTrianglerows0-16.svg.jpg (20. ožujka 2018.)

11. Slika 4. Baza indukcije, vlasništvo autorica