Pregledni znanstveni članak

Modeli rizika u neživotnom osiguranju i reosiguranju

Matea Spajić[1]

Sažetak: *U ovom radu je opisan je način poslovanja osiguravajućeg društva. Za početak je objašnjeno s kojim se rizicima se susreće osiguravajuće društvo i na koji način ih dijeli. Nadalje, opisan je Cramér-Lundbergov model, način računanja vjerojatnosti propasti te kako s pomoću Lundbergovog koeficijenta utjecati na nju. U drugom dijelu rada opisuje se reosiguranje, tj. postupak kojim se osiguravajuće društvo osigurava. Navodi se raspodjela reosigurateljnih ugovora te opisivanje ugovora unutar te podjele. Naposljetku, proučava se kako reosiguranje utječe na vjerojatnost propasti.*

Ključne riječi: *osiguranje, štete, proces viška prihoda, Cramér-Lundbergov model, vjerojatnost propasti, Lundbergov koeficijent/koeficijent prilagodbe, reosiguranje*

1. UVOD

Sigurnost je jedna od temeljnih ljudskih potreba, ljudi žele osjetiti sigurnost u slučaju da nešto pođe po zlu. Mnogi se iz tog razloga tijekom svog života odlučuju za osiguranje kako bi imali jamstvo da će im netko pomoći. Osiguranje je ekonomska djelatnost kojom se zainteresiranim osobama pruža ekonomska zaštita od različitih rizika koji ugrožavaju njihov život, zdravlje ili imovinu. Osiguranje funkcionira na način da se rizik transferira s osiguranika na osiguratelja, koji prihvaća nadoknaditi slučajne štete onima kod kojih su nastale. Osiguranik za svoju sigurnost plaća premiju osiguratelju. Maksimalni iznos osigurateljeve obveze prema osiguraniku, odnosno korisniku osiguranja ukoliko nastupi osigurani slučaj, prema [14], naziva se svota osiguranja.

U ovom radu ćemo detaljnije opisati način na koji funkcionira osiguravajuće društvo. Rizici s kojima se osiguravajuće društvo svakodnevno susreće su neizvjesni, jer nije poznato ni kada će šteta nastati niti u kojem iznosu. Iz tog razloga vrijeme nastanka šteta kao i iznos šteta modeliramo slučajnim procesima. Prvi model s pomoću kojega možemo reći nešto više o riziku poslovanja osiguravajućeg društva djelo je matematičara Filipa Lundberga i Haralda Craméra. Prema njima je model dobio i ime, a njega ćemo opisati u poglavlju 2.1. Nadalje, zanima nas

1 Matea Spajić, magistra matematike, Croatia osiguranje d.d., matea.spajic@crosig.hr

kolika je vjerojatnost propasti osiguravajućeg društva i na koji način možemo utjecati na nju, tj. kako ćemo ju minimizirati. Jedan od načina je da pomoću Lundbergovog koeficijenta pronađemo gornju granicu za vjerojatnost propasti. Kako bi se osiguravajuće društvo zaštitilo od velikih rizika, također se osigurava, i to se naziva reosiguranje. Osirurateljima je u cilju naći optimalne reosigurateljne ugovore kojima će moći primiti u pokriće velike rizike, a da time ne ugrozi svoje poslovanje. Kako reosigrateljni ugovori utječu na vjerojatnost propasti, prikazat ćemo u zadnjem, 4. poglavlju.

2. MODELIRANJE RIZIKA U NEŽIVOTNOM OSIGURANJU

Rizik je širok pojam koji označava neku neizvjesnost, gubitak, opasnost, nesigurnost. Rizik je stanje u kojem postoji mogućnost negativnog odstupanja od poželjnog ishoda koji očekujemo ili kojemu se nadamo. Često se umjesto pojma rizika pogrešno koristi pojam neizvjesnost, no ta dva pojma nemaju isto značenje. Neizvjesnost predstavlja nesposobnost predviđanja nekog ishoda, a obično se temelji na nedovoljnim saznanjima što se sve može dogoditi u budućnosti. Ona je sastavni dio svakog rizika, a time je još više naglašena vrijednost svake informacije koja pridonosi smanjenju neizvjesnosti, pa ona u upravljanju rizikom ima ekonomsku vrijednost. Vidjeti u [7] i [4].

Karakteristika rizika je da budu budući, neizvjesni i neovisni od naše volje. Prema teoriji vjerojatnosti, ako postoji vjerojatnost ostvarenja nekog događaja, rizik da će se neki događaj ostvariti odnosno vjerojatnost njegova događanja je neka vrijednost iz intervala [0,1]. Ako vjerojatnost nekog događaja nije poznata, riječ je o neizvjesnosti.

Svrha osiguranja je prenošenje rizika koji nas okružuju s pojedinca na osiguratelja sklapanjem ugovora o osiguranju. Ugovorom o osiguranju pojedinac se nastoji zaštiti od rizika koji mogu ugroziti njegov život ili imovinu. Premija je iznos koji osiguranik plaća osiguratelju za zaštitu, i ona se izračunava prema principu velikih brojeva, odnosno vjerojatnosti nastupanja osiguranog slučaja. Prema [2] premija se prikuplja od velikog broja osiguranika koji se osiguravaju od istog rizika, pri čemu je osnovna pretpostavka da će samo mali broj osiguranika zaista imati štetu. U slučaju nastupanja štete, osiguravajuće društvo će osiguraniku koji se osigurao od tog štetnog događaja isplatiti štetu.

Postoji mnogo kriterija prema kojima se može izvršiti podjela osiguranja. Podjela osiguranja koja je nama u interesu jest podjela prema bilanciranju poslova osiguranja i utvrđivanju poslovnog rezultata i to na:

- neživotna osiguranja
- životna osiguranja

Ekonomski promatrano, sklapanjem osiguranja osiguranik svoje varijabilne troškove pretvara u fiksne troškove plaćanjem premije osiguranja, a ekonomske posljedice nastupanja određenog događaja koji izaziva štete prenosi na osiguratelja. Navedeni međuodnos jasno upućuje na osnovnu funkciju osiguranja - funkciju naknade štete, koja je osnovni razlog postojanja osigurateljne djelatnosti. Dakle, ukupan iznos štete u određenom vremenskom razdoblju je najznačajnija je veličina za pravilno vođenje osiguravajućeg društva. Kako bi osiguravajuće društvo dobro poslovalo, mora odrediti primjerenu premiju za podmirenje očekivanih šteta jer bi u protivnom bi moglo doći do velikih gubitaka i insolventnosti. Vrijeme nastanka i iznos štete je neizvjestan je događaj i njegovim modeliranjem se bavi se teorija rizika.

Proučavat ćemo portfelj neživotnog osiguranja, tj. kratkoročne police koje su sklopljene za osiguranje prethodno navedenih rizika. Kratkoročne police su definirane su time što traju fiksno i relativno kratko vremensko razdoblje, obično jednu godinu i za vrijeme trajanja osiguratelj plaća premiju te zauzvrat osiguratelj u slučaju nastanka štete snosi troškove. Važno obilježje kratkoročnog ugovora jest da je premija određena na razini pokrića šteta nastalih samo za vrijeme trajanja police, što je razlika u odnosu na police životnog osiguranja. Osiguratelj može prenijeti dio premije reosiguratelju, koji će u slučaju nastanka štete za vrijeme trajanja police sudjelovati u likvidaciji štete. Detaljnije o reosiguranju ćemo govoriti kasnije.

Važno je naglasiti da svrha osiguranja nije mogućnost zarade pojedinca, već zaštita osiguranika ili njegove imovine od posljedica nastupanja štetnog događaja. Da bi nešto bilo predmet osiguravajuće zaštite od štetnog događaja, mora ispunjavati sljedeće uvjete:

- događaj mora biti budući, neizvjestan i nezavisan od volje ugovaratelja osiguranja/osiguranika,
- rizik procjenjiv,
- šteta procjenjiva.

Budući da su štete u određenom vremenskom razdoblju najznačajnija veličina za pravilno vođenje osiguravajućeg društva, a one su neizvjesne, možemo samo odrediti vjerojatnost nastanka štete. Način na koji ćemo matematički modelirati funkcioniranje osiguranja slijedi u nastavku. Model će uključivati mnoga pojednostavljenja, kao i svaki model kompleksne životne situacije.

Kako je broj šteta nastalih u portfelju u vremenskom intervalu $[0, t]$ za sve $t \geq 0$ događaj za koji vrijedi prethodno navedeno, opisivat ćemo ga familijom slučajnih varijabli $\{N_t\}_{t\geq 0}$ koju zovemo brojeći proces šteta. Isto vrijedi i za iznos šteta koje ćemo opisivati nizom jednako distribuiranih slučajnih varijabli $\{X_i\}_{i\in N}$ gdje je X_i slučajna varijabla koja opisuje iznos i-te štete. Ukupne štete u vremenskom intervalu su opisane familijom slučajnih varijabli $\{S_t\}_{t\geq 0}$, koja je jednaka:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Osiguratelj ovog portfelja dobiva premiju i pretpostavit ćemo da ju prima neprekidno i po konstantnoj stopi *c*, tako da je ukupna premija primljena u vremenskom intervalu [0, t] jednaka *ct*. Zbog pretpostavki funkcija kojom modeliramo prihod od premija je deterministička i označavat ćemo ju s:

$$p(t) = ct, \quad t \geq 0.$$

Osim toga, pretpostavit ćemo da je u trenutku 0 osiguratelj odvojio na stranu iznos novca za portfelj kojii on se naziva početni višak i označavat ćemo ga s *u*. Vrijednost od U_t je poznata je samo u trenutku $t = 0$, a u ostalim trenutcima $t > 0$ ona je nenegativna slučajna varijabla, jer ovisi o štetama i možemo ju zapisati na slijedeći način:

$$U_t = u + p(t) - S_t,$$

gdje je *u* iznos početnog viška, a *p(t)* prihod od premija do trenutka *t* kojieg smatramo determinističkim zbog jednostavnosti. Dakle, $\{U_t\}_{t\geq 0}$ je slučajan proces koji nazivamo proces viška prihoda ili proces rizika. Treba imati na umu da je ovo pojednostavljen model u kojem smo zanemarili inflaciju i druge dinamičke promjene u portfelju. Osim toga, pretpostavit ćemo da se štete rješavaju odmah nakon što nastanu i da su troškovi rješavanja šteta uračunati u premiju. Uz te pretpostavke, osigurateljev je profit poznat na kraju godine. U praksi se štete obično rješavaju uz malu odgodu, a kad su u pitanju štete odgovornosti koje se rješavaju na sudu, to može trajati i nekoliko godina.

2.1 Cramér-Lundbergov model

Naveli smo kako distribucija šteta u praksi gotovo nikad nije poznata, pa time ni distribucija procesa viška prihoda $\{U_t\}_{t\geq 0}$. Preduvjet za poznavanje distribucije slučajne varijable U_t je poznavanje je iznosa početnog viška u te dobra procjena konstantne stope uplata premija *c* i poznavanje distribucija slučajnih varijabli N_t i X_i. Kada bismo poznavali distribuciju procesa viška prihoda $\{U_t\}_{t\geq 0}$ mogli bismo reći nešto više o riziku poslovanja osiguratelja. U okviru toga koristit ćemo se pretpostavkamae švedskog matematičara Filipa Lundberga na proces šteta. Filip Lundberg postavio je temelje moderne teorije rizika, a njegov sunarodnjak Harald Cramér usavršio je njegove ideje i prema njima je nazvan prvi model procesa rizika kojieg ćemo definirati u nastavku, prema [10].

Lundbergove pretpostavke na proces ukupne vrijednosti šteta $\{S_t\}_{t\geq 0}$:

- Štete stižu u vremenima $0 < T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ koje nazivamo dolaznim vremenima.
- Šteta koja stiže u vremenu T_i ima iznos X_i. Slučajan proces $\{X_i\}_{\{i\in N\}}$ čine nezavisne, nenegativne, jednako distribuirane slučajne varijable.
- Slučajni procesi dolaznih vremena $\{T_i\}_{i\in N}$ i iznosa šteta $\{X_i\}_{i\in N}$ su međusobno su nezavisni.

Štete se događaju u vremenima $T_1, T_2, T_3, \ldots$ i u iznosima $X_1, X_2, X_3, \ldots$. Uz definiran niz dolaznih vremena $\{T_i\}_{i\in N}$, broj pristiglih šteta do trenutka t zapisujemo kao

$$N_t = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{I}_{\{T_i \le t\}} = \#\{i \in \mathbb{N}: T_i \le t\}, \;\; t \in [0,\infty\rangle$$

pri čemu je # broj elemenata skupa. Iznosi šteta ne utječu na broj šteta i iznos jedne štete ne utječe na iznos druge štete. Višak prihoda osiguravajućeg društva se u trenutcima nastanka štete smanjuje za iznos štete, a tijekom trajanja osiguranja povećava se za iznos premije po konstantnoj stopi.

Prije nego navedemo dodatnu pretpostavku modela, prisjetit ćemo se definicije Poissonovog procesa.

Definicija 2.1. Slučajan proces $\{N_t\}_{t\geq 0}$ je homogeni je Poissonov proces s intezitetom λ > 0 ako zadovoljava sljedeće pretpostavke:

- $N_0 = 0$ g.s., odnosno P (N_0 = 0) = 1,
- za $0 \le s < t$, slučajna varijabla $N_t - N_s$ je jednako distribuirana kao slučajna varijabla N_{t-s} - stacionarnost prirasta procesa,
- za 0 ≤ s < t, slučajna varijabla $N_t - N_s$ je nezavisna od familije $\{N_u\}_{u\le s}$ - nezavisnost prirasta procesa,
- za svaki $t > 0$, N_t ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt, odnosno

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, za\ n\epsilon\mathbb{N}.$$

Homogeni Poissonov proces ima vrlo važnu ulogu u osiguranju, ako brojeći proces šteta definiramo kao homogen Poissonov proces, tada takav proces U_t nazivamo Cramér-Lundbergov proces rizika.

Definicija 2.2. Cramér-Lundbergov proces rizika je proces $\{U_t\}_{t\geq 0}$ definiran je s

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i\,, t \ge 0,$$

pri čemu je $u > 0$, $c > 0$, N_t, $t \geq 0$ je homogen Poissonov proces s intenzitetom λ, a $\{X_i\}_{i\in N}$ je niz nezavisnih, nenegativnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F.

Definicija 2.3. Neka je $0 < T_1 \le T_2 \le \ldots$ niz slučajnih varijabli kojim modeliramo dolazna vremena nastanka šteta. Kažemo da je slučajan proces $\{W_n\}_{n\in N}$ niz slučajnih varijabli kojima modeliramo vrijeme proteklo između $(n-1)$-ve i n-te realizacije promatranog događaja, gdje je

$W_n = T_n - T_{n-1,}\ n \in$.

Proces $\{W_n\}_{n\in N}$ nazivano još proces međudolaznih vremena.

Teorem 2.1. Ako je $\{N_t\}_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces s intezitetom λ > 0 tada niz međudolaznih vremena $\{W_n\}_{n\in N}$ čine nezavisne, eksponencijalno distribuirane slučajne varijable s parametrom λ.

Detaljno o prethodnim rezultatima možemo vidjeti u [10]. Distribucije šteta gotovo nikada nisu poznate, ali se pretpostavlja da dolaze iz neke parametarske familije distribucija. Parametri familije se procjenjuju se na osnovu podataka iznosa šteta u nekom razdobljuperiodu. Pri procjeni se koriste razne statističke metode, kao što su metoda maksimalne vjerodostojnosti, metoda momenata i druge. ČVrlo često su distribucije šteta su sklone imati pozitivnu asimetričnost i dug rep. Kod odabira prikladne funkcije distribucije šteta važno je da ta funkcija može modelirati i najveće štete. Jedna velika šteta može svojim iznosom nadmašiti sve ostale zajedno i time ugroziti poslovanje osiguranja. Procjena takvih ekstremnih događaja je od izuzetne je važnosti, ai oni se opisuju desnim repom distribucije, tj. ponašanjem repne funkcije distribucije:

$$\bar{F} = 1 - F(x) = P(X > x)$$

za velike vrijednosti x.

Definicija 2.4. Za slučajnu varijablu *X* s funkcijom distribucije F kažemo da ima distribuciju s teškim repom ako je

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = L(x)x^{-\alpha}$$

gdje a > 0 nazivamo repni indeks dok je L funkcija takva da za svaki x > 0 vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Parametar a određuje težinu repa distribucije, što su vrijednosti niže, ekstremne vrijednosti su vjerojatnije. Komplikacije mogu nastati kod velikih šteta koje imaju i reosigurateljne ugovore ili kod malih šteta koje imaju ugovorenu franšizu pa se ne prijavljuju. Kod ugovora koji imaju ugovorenu franšizu osiguranik s određenim iznosom sudjeluje u šteti. Razlikujemo dvije vrste franšiza, a to su integralna i odbitna. Kod integralne franšize osiguratelj ne sudjeluje u šteti koja je ispod ugovorene franšize, a kad prijeđe iznos franšize, u potpunosti pokriva štetu. U slučaju odbitne franšize ista je situacija u slučaju kada su štete ispod ugovorenog iznosa franšize, a kada prijeđu iznos franšize, osiguranik sudjeluje u šteti u iznosu franšize, a osiguratelj u ostatku štete umanjene za iznos franšize. Kod osiguranja koja imaju reosigurateljne ugovore slična je situacija, samo je sada osiguratelj u poziciji osiguranika, a reosiguratelj u poziciji osiguratelja. Više o reosiguranju može se vidjeti u poglavlju 3, gdje ćemo i opisati što se događa s distribucijom šteta.

2.2 Vjerojatnost propasti

Pitanje koje nam se prirodno nameće jest kolika je vjerojatnost da će osiguratelj ostati bez novaca, tj. vjerojatnost propasti. Cilj svakog društva je minimizirati tu vjerojatnost ili je držati ispod neke određene granice. Kada govorim o propasti, možemo reći da je osiguravajuće društvo nesolventno. U praksi je nesolventnost vrlo složen problem, ali kako se u našem slučaju radi o pojednostavljenom modelu, možemo koristiti i taj izraz. Propast definiramo kao događaj

$$\{U_t < 0, \text{ za neki } t > 0\}$$

i zanima nas kada će se taj događaj realizirati.

Definicija 2.5. Vrijeme T kada proces rizika poprimi vrijednost manju od nule naziva se vrijeme propasti:

$$T = \inf\{t > 0 : U_t < 0\}.$$

Primijetimo da slučajna varijabla T ne mora nužno biti realna slučajna varijabla, jer je moguće da se propast nikada ne realizira, tj. da se T realizira s ∞.

Definicija 2.6. Vjerojatnost propasti s obzirom na početni kapital u > 0 i konstantnu stopu uplata premija c dana je izrazom

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P(U_t < 0, \text{ za neki } t > 0 | U_0 = u) \\ &= P(u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i < 0, \text{ za neki } t > 0 | U_0 = u) \\ &= P(T < \infty).\end{aligned}$$

Definicija 2.7. Vjerojatnost propasti do trenutka t s obzirom na početni kapital u > 0 i konstantnu stopu uplata premija c definirana je izrazom:

$$\psi(u; t) = P(T \leq t), \text{ za } t \geq 0.$$

Osiguratelju je u cilju držatida drži vjerojatnost propasti na što nižoj razini ili barem ispod neke određene granice. Vjerojatnost propasti je općenito teško izračunati, unatoč svim pretpostavkama i pojednostavljenjima. Prvi cilj osiguratelja je da bez obzira na početni kapital izbjegne slučaj kada propast nastupa s vjerojatnošću 1. Taj slučaj se može se jednostavno identificirati, štoi to nam tvrdi slijedeći teorem [10].

Teorem 2.2. Ako je u Cramér-Lundbergovom modelu:

$$E[X_1] < \infty \text{ i } c - \lambda E[X_1] \leq 0,$$

tada za svaki $u > 0$ propast nastupa s vjerojatnošću 1.

Definicija 2.8. Kažemo da model zadovoljava uvjet neto profita ako vrijedi:

$$c - \lambda E[X_1] > 0.$$

Uvjet neto profita je minimalan je uvjet koji osiguratelj mora zahtijevati, inače nema smisla preuzimati rizik.

2.3 Lundbergov koeficijent

Kako će mnogi rezultati u nastavku biti izvedeni korištenjem funkcije izvodnice momenata, u nastavku ćemo je definirati.

Definicija 2.9. Neka je X diskretna ili neprekidna slučajna varijabla. Funkcija izvodnica momenata slučajne varijable X je funkcija M_X definirana s:

$$M_X(t) = E[e^{tX}],$$

za sve realne brojeve t za koje postoji navedeno očekivanje, tj. $E[e^{tX}] < \infty$.

Osim toga, navest ćemo pretpostavke koje će nam biti potrebne i koje će vrijediti kroz cijeli rad, a to su:

- početni kapital iznosi u i premija dolazi po konstantnoj stopi $c > 0$
- $\{X_i\}_{i \in N}$ je proces šteta gdje su X_i nezavisne i jednako distribuirane kao X
- proces šteta je i proces rizika je U_t kao u poglavlju 2.1
- funkcija gustoće od X postoji i označavat ćemo ju s f_X
- očekivanje od X označavamo kao $\mu = E[X]$, a s $M_X(t) = E[e^{tX}]$ označavamo funkciju izvodnicu momenata od X ako postoji
- vrijedi uvjet neto profita $c > \lambda\mu$, pa ćemo definirati i dodatak na premiju koji ćemo označavati s θ tada je

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu.$$

Kao što smo već spomenuli, vjerojatnost propasti je općenito je teško izračunati. Tek za neke primjere distribucija šteta postoje eksplicitni izrazi. Iz tog razloga često se kao mjere rizika mogu koristiti i druge veličine. Jedna do njih je koeficijent prilagodbe ili Lundbergov R.

Definicija 2.10. Lundbergov koeficijent ili koeficijent prilagodbe je jedinstveno strogo pozitivno rješenje jednadžbe:

$$\lambda M_X(R) - \lambda - cR = 0.$$

Lundbergov koeficijent definira se pomoću Poissonovog parametra λ, funkcije izvodnice momenata distribucije iznosa šteta X i prihoda od premije. Lundbergov koeficijent R dan je kao rješenje jednadžbe:

$$\lambda M_x(R) = \lambda + cR.$$

Kada uvrstimo premijsku stopu $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ dobijemo slijedeće

$$\lambda M_x(R) = \lambda + (1 + \theta)\lambda\mu R$$
$$M_x(R) = 1 + (1 + \theta)\mu R.$$

Primjećujemo da R ovisi samo o dodatku na premiju θ i distribuciji pojedinačnih iznosa šteta. Sada ćemo pokazati da je R jedinstveno rješenje koje zadovoljava prethodnu jednadžbu.

Definiramo funkciju $g(R) = \lambda M_x(R) - \lambda - cR$. Uočimo da je $g(0) = 0$. Nadalje, deriviramo funkciju $g(R)$ i dobijemo slijedeće

$$\frac{d}{dR} g(R) = \lambda \frac{d}{dR} M_x(R) - c$$

pa je

$$g'(0) = \lambda\mu - c.$$

Primjećujemo da je $g'(0)$ negativna vrijednost uvjeta neto profita pa je prema definiranom u poglavlju 2.2 $g'(0) < 0$. Zaključujemo da je $g'(R)$ padajuća funkcija. Pokažimo sada da funkcija ima lokalni ekstrem, pa ćemo funkciju $g(R)$ dva puta derivirati. Deriviranjem slijedi:

$$\frac{d^2}{dR^2} g(R) = \lambda \frac{d^2}{dR^2} M_x(R)$$

što je strogo pozitivno. Budući da je $g'(0) < 0$ i $g''(0) > 0$ onda postiže lokalni minimum (vidjeti [13]). Dakle, postoji lokalni ekstrem i to minimum funkcije.

Nekada se za neke oblike od $F(x)$ može riješiti eksplicitno po R, a većinom jednadžbu moramo riješiti numerički. Pogledajmo sada kako se računa R na primjeru eksponencijalne distribucije šteta X. Neka je dana eksponencijalna distribucija šteta $F(x) = 1 - e^{-\rho x}$. Tada je

$$M_x = \frac{\rho}{\rho - \mathrm{R}}$$

pa imamo:

$$\begin{aligned}
&\lambda + cR = \frac{\lambda}{\rho - R}\\
&\lambda\rho - \lambda R + cR\rho - cR^2 = \lambda\rho\\
&R^2 - \left(\rho - \frac{\lambda}{c}\right) R = 0\\
&\Rightarrow R = \rho - \frac{\lambda}{c}.
\end{aligned}$$

Općenito, gornju granicu za R možemo dobiti iz:

$$\begin{aligned}
\lambda + cR &= \lambda M_X(R)\\
&= \lambda \int_0^\infty e^{Rx} f(x)dx\\
&> \lambda \int_0^\infty \left(1 + Rx + \frac{1}{2}R^2x^2\right) f(x)dx\\
&= \lambda \left(1 + R\mu + \frac{1}{2}R^2x^2\right)
\end{aligned}$$

tako da je:

$$(c - \lambda\mu)R > \frac{R^2\mu)}{2}$$

pa slijedi:

$$R < \frac{2(c-\lambda\mu)}{\lambda\mu}.$$

Prije nego vidimo koja je uloga koeficijenta prilagodbe kod vjerojatnosti propasti, podsjetit ćemo se nekih rezultata koji će nam biti potrebni u nastavku (vidjeti [6]).

Definicija 2.11. Slučajna varijabla T : Ω → N_0 ∪{∞} zove se vrijeme zaustavljanja procesa $\{X_n\}_{n\in N}$ ako je za svaki *n∈N*

$$\{T \leq n\} \in \sigma\{X_0, X_1, \ldots, X_n\},$$

tj. događaj *{T ≤ n}* ovisi samo o $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Ako je uz proces dana i filtracija ponekad se gornji zahtjev zamjenjuje s
a

$$\{T \leq n\} \in .$$

Propozicija 2.1. Slučajna varijabla T je vrijeme zaustavljanja procesa ako i samo ako za svaki $n \in N_0$ vrijedi

$$\{T = n\} \in \sigma\{ X_0, X_1, \ldots, X_n \}.$$

Definicija 2.12. Za dano vrijeme zaustavljanja T : $\Omega \rightarrow N_0 \cup \{\infty\}$ definiramo slučajnu varijablu

$$X_T(\omega) = Xn(\omega), \text{ ako je } T(\omega) = n.$$

Definicija 2.13. Neka je *T* vrijeme zaustavljanja za proces $\{X_n\}_{n\in N0}$) . Slučajni proces zaustavljanja u vremenu *T* je proces $X^T=\{X_n^T\}_{n\in N0}$ gdje je

$$X_n^T = X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n\,, & \text{ako je } n \leq T \\ X_T\,, & \text{ako je } n > T \end{cases} .$$

Teorem 2.3. Ako je $\{X_n\}_{n\in N0}$ martingal i *T* vrijeme zaustavljanja, tada je slučajan proces $\{X_n^T\}_{n\in N0}$ također martingal.

Teorem 2.4. *Doobov teorem o opcionalnom zaustavljanju*
Neka je *X* martingal i *T* vrijeme zaustavljanja. Pretpostavimo da vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:

1. *T* je omeđeno, tj. postoji $N > 0$ takav da je $T(\omega) \leq N$ za sve $\omega \in \Omega$
2. *X* je omeđeno, tj. postoji $K > 0$ takav da je $|X_n(\omega)| \leq K$ za sve $\omega \in \Omega$ i $n \in N$
3. $E[T] < \infty$ i postoji $K > 0$ takav da je $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq K$ za sve $\omega \in \Omega$ i $n \in N$.

Tada je X_T integrabilna i vrijedi $E[X_T] = E[X_0]$.

Propozicija 2.2. Neka je zadovoljen uvjet neto profita i neka postoji koeficijent prilagodbe R. Tada vrijedi Lundbergova nejednakost:

$$\psi(u; t) \leq \psi(u) \leq e^{-Ru},$$

gdje je u osigurateljev početni višak, a R je koeficijent prilagodbe.

Dokaz. Lundbergovu nejednakost ćemo dokazati pomoću martingala. Neka je $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtracija generirana procesom $(U_t)_{t\geq 0}$. Prvo ćemo pokazati da je e^{-RU_t} martingal

$$\begin{aligned} E[e^{-RU_{t+s}}|\mathcal{F}_t] &= E[e^{-R(U_t-U_{s+t-t})}|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-RU_t}E[e^{-RU_{s+t-t}}|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-RU_t}E[e^{-R(cs-(S_{t+s}-S_t))}|\mathcal{F}_t] \\ &= e^{-RU_t}e^{-Rcs}E[e^{RS_s}] \\ &= e^{-RU_t} \end{aligned}$$

Zadnja jednakost proizlazi iz definicije Lundbergovog koeficijenta. Vrijeme propasti $T = inf\{t > 0 : U_t < 0\}$ je vrijeme zaustavljanja za $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ generirana procesom $(U_t)_{t\geq 0}$ pa definiramo proces zaustavljen u vremenu T s $e^{-RU_{T\wedge t}}$. Kako smo pokazali da je e^{-RU_t} martingal, prema teoremu 2.3 je i $e^{-RU_{T\wedge t}}$ martingal. Nadalje, vrijedi

$$\mathbb{I}_{T\leq t} \leq e^{-RU_{T\wedge t}}.$$

Prema prethodnoj nejednakosti i prema teoremu 2.4 imamo traženu nejednakost

$$\psi(u;t) = E[\mathbb{I}_{T<t}] \leq E[e^{-RU_{T\wedge t}}] = e^{-Ru}.$$

□

R je funkcija parametara koji utječu na vjerojatnost propasti i može se promatrati ponašanje od *R* kao funkcija tih parametara. Primjećujemo da što je veća vrijednost od *R* bit će manja gornja granica za vjerojatnost propasti ψ(u). Osim toga, možemo primijetiti da je *R* i rastuća funkcija od θ, jer očekujemo da je ψ(u) opadajuća funkcija od θ. Zaključujemo kako će svaki faktor koji prouzrokuje pad od ψ(u) prouzrokovati rast od *R*.

U nastavku ćemo dodati izraz za jednakost vjerojatnosti propasti temeljenu na Lundberogovom koeficijentu.

Propozicija 2.3. Jednakost vjerojatnosti propasti:

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU_T}|T<\infty]}.$$

Dokaz. Za svaki $t \geq 0$,

$$E[e^{-RU_T}] = E[e^{-RU_T}|T \leq t]P(T \leq t) + E[e^{-RU_T}|T > t]P(T > t)$$

U dokazu prethodne propozicije smo pokazali da je $E[e^{-RU_T}]$ martingal i prema teoremu 2.4 za lijevu stranu jednakosti vrijedi

$$E[e^{-RU_T}] = e^{-Ru}.$$

Na desnoj strani jednakosti vrijedi da je

$$E[e^{-RU_T}|T \leq t]P(T \leq t) = E[e^{-RU_T}|T \leq t]\psi(u;t),$$

a za drugi dio jednakosti ćemo pokazati da teži u nulu kada t teži u beskonačno. Prema označimo sa

$$E[U_t] = E[u + ct - S_t] = u + \alpha t$$

i

$$Var(U_t) = Var(S_t) = \beta^2 t.$$

Osim toga iskoristit ćemo Čebiševljeva nejednakost u zadnjem koraku

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Sada podjelimo drugi dio jednakosti na dva dijela, tako da je U_t manje ili jednako od nula i veće od nula i imamo:

$$\begin{aligned}
E[e^{-RU_T}|T > t]P(T > t) =& E[e^{-RU_T}|T > t, 0 \leq U_t \leq u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}] \\
& P(T > t, 0 \leq U_t \leq u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) \\
& + E[e^{-RU_T}|T > t, U_t > u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}] \\
& P(T > t, U_t > u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) \\
& \leq P(U_t \leq u + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}) + e^{-Ru + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}} \\
& \leq t^{-\frac{1}{3}} + e^{-Ru + \alpha t - \beta t^{\frac{2}{3}}}.
\end{aligned}$$

Čebiševljeva nejednakost daje gornju granicu za prethodnu vjerojatnost. Kada u prethodnu nejednakost pustimo da $t \to \infty$ slijedi tražena jednakost. □

Iz propozicija 2.2 i 2.3 vidimo važnost Lundbergovog koeficijenta, pomoću njega smo dobili gornju granicu za vjerojatnost propasti, a često se koristi i aproksimacija. Kako se Lundbergovog koeficijent definira pomoću Poissonovog parametra λ, funkcije izvodnice momenata distribucije iznosa šteta *X* i prihoda od premije osiguratelj će pomoću njega moći utjecati na vjerojatnost propasti. Utjecaj na vjerojatnost propasti nije jednostavno odrediti, ali u nekim slučajevima se vjerojatnost propasti može se eksplicitno izraziti. Pogledat ćemo to na primjeru u kojem štete imaju eksponencijalnu distribuciju.

Primjer 2.1. Pretpostavimo da je u Cramér-Lundbergovom modelu distribucija iznosa šteta eksponencijalna s parametrom ρ > 0, tada je:

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-\rho x}, \quad za\ x \geq 0.$$

Rep distribucije eksponencijalno brzo opada u nulu, što znači da je vjerojatnost opažanja šteta velikog iznosa vrlo mala. Takva situacijaje vrlo je rijetka u stvarnim primjerima, stvarne primjere bolje opisuju distribucije kod kojih repna funkcija sporije opada u nulu. Vjerojatnost propasti za proces viška prihoda koji ima eksponencijalnu distribuciju iznosa šteta dan je izrazom:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c\rho}\, e^{-\left(\rho-\frac{\lambda}{c}\right)u} c, za\ u > 0.$$

3. REOSIGURANJE

Osiguravajuće društvo u mnogo slučajeva mora preuzeti u osiguranje pojedinačne rizike koji po veličini prelaze njegov kapacitet, te rizike kod kojih postoji mogućnost nastanka masovnih šteta, kumula šteta te katastrofalnih šteta s kojima se nije u mogućnosti samostalno nositi. Kod takvih slučajeva osiguranje putem suosiguranja i/ili reosiguranja povećava ukupne kapacitete preuzimanja rizika u osiguranje i tako štiti vlastitu sigurnost, a istovremeno i sigurnost svojih osiguranika. Kod svih veliki rizika koji prelaze samopridržaj društva, osiguranju je potrebna dodatna sigurnost. Samopridržaj društva je maksimalan iznos šteta koje osiguravajuće društvo može samo isplatiti, tj. predstavlja granicu pokrića osiguratelja [11]. Reosiguranje je zasebna djelatnost osiguranja u kojoj osiguratelj prenosi dio rizika koji je preuzeo u osiguranje na reosiguratelja, a zauzvrat plaća premiju reosiguratelju. Najjednostavnije rečeno reosiguranje je osiguranje osiguratelja. Pomoću reosiguranja osiguratelj homogenizira svoj portfelj, što znači da smanjuje mogućnost iznenađenja da dođe do značajnijih odstupanja između šteta i naplaćenih premija.

Reosiguranje možemo podijeliti prema nekoliko kriterija. Prema načinu ugovaranja zaštite dijelimo ga na fakultativno ili dobrovoljno reosiguranje i obligatorno ili obvezno reosiguranje.

Oblike reosiguranja ili tipove pokrića prema udjelu u riziku možemo podijeliti na proporcionalne oblike reosiguranja i neproporcionalne oblike reosiguranja. Prije nego krenemo u detaljnije opisivanje reosigurateljnih ugovora, pretpostavit ćemo da je višak prihoda osiguratelja modeliran Cramér-Lundbergovim modelom i ostale pretpostavke koje smo naveli u poglavlju 2.3.

3.1 Proporcionalno reosiguranje

Ugovore o proporcionalnom reosiguranju karakterizira to što su udjeli u premiji i šteti jednaki. Razlikujemo dva tipa ugovora o proporcionalnom reosiguranju. Prema [14] to su:

- kvotno reosiguranje (*Quota Share reinsurance*)
- svotno-ekscedentno reosiguranje (*Surplus reinsurance*)

3.1.1 Kvotno reosiguranje

Kvotno reosiguranje je oblik je proporcionalnog reosiguranja u kojem osiguratelj u reosiguranje prenosi isti postotak od svakog rizika portfelja neovisno o visini svote osiguranja. Reosiguranje sudjeluje u svakoj pojedinačnoj šteti u istom postotku u kojem je sudjelovao i u svakoj pojedinačnoj premiji. Ugovor o kvotnom reosiguranju možemo zapisati kao:

- premija osiguranja: $p_O(t) = act$, gdje je c konstantna premijska stopa
- premija reosiguranja: $p_R(t) = (1 - a)ct$
- štete osiguranja: $Y_i = aX_i$
- štete reosiguranja: $Z_i = (1 - a)X_i$

gdje je $0<a<1$ kvota sudjelovanja osiguratelja. Granica pokrića kod svakog kvotnog ugovora iznosi aX_i, tj. to je iznos samopridržaja za ovaj oblik reosigurateljnog pokrića. Kvotno reosiguranje ne dovodi do homogeniziranja portfelja ni do izjednačenja šteta pa ga neki ne smatraju pravim reosiguranjem.

3.1.2 Svotno-ekscedentno reosiguranje

Svotno-ekscedentno reosiguranje najvažniji je i najsloženiji oblik reosiguranja, koje se primjenjuje kod postojanja velike razlike u mogućnosti nastanka šteta. U ovom poglavlju dat ćemo samo vrlo pojednostavljen i kratak uvid u ovaj tip ugovora jer se u daljnjem radu nećemo njime detaljnije baviti. Zbog velike razlike u štetama osiguratelj želi homogenizirati svoj portfelj. Prema [2] raspodjela rizika kod svotno-ekscedentnog reosiguranja može se vršiti na osnovu:

- svote osiguranja - kod rizika kod kojih može doći do totalne štete.
- PML-a (*eng. Probable maximum loss* - maksimalna vjerojatna šteta) - kod onih rizika kod kojih neće doći do totalne štete uslijed jednog štetnog događaja.

Udio s kojim osiguratelj sudjeluje u premiji i štetama se može se iskazati s pomoću funkcije koja ovisi o svoti osiguranja ili PML- u i samopridržaju određenog od strane osiguravajućeg društva. Za svotu osiguranja i PML koristit ćemo se zajedničkomu oznakomu SO, a maksimalni samopridržaj označit ćemo s M . Funkciju udjela definiramo kao:

$$\alpha = \max\left(0, \frac{SO - M}{SO}\right).$$

To je udio koji nam govori koliki dio premije osiguratelj plaća reosiguratelju te ujedno i udio s kojim reosiguratelj sudjeluje u šteti. Neka je X_i iznos neke štete, tada osiguratelj sudjeluje u isplati iznosa štete s:

$$Y_i = \begin{cases} X_i, & ako\ je\ X_i \leq M \\ (1-\alpha)X_i, & ako\ je\ X_i > M \end{cases},$$

a reosiguratelj sudjeluje s:

$$Z_i = \begin{cases} 0, & ako\ je\ X_i \leq M \\ \alpha X_i, & ako\ je\ X_i > M \end{cases}.$$

Osim toga, zanima nas do kojeg iznosa osiguravajuće društvo može uzimati rizike u pokriće. Taj limit ugovora određuje se kao umnožak samopridržaja *k* puta i oni se nazivaju linije.

3.2 Neproporcionalno reosiguranje

Neproporcionalni ugovori o reosiguranju su:

- reosiguranje viška štete (*Excess of Loss, XL*)
- reosiguranje tehničkog rezultata (*Stop Loss, SL*)

3.2.1 Reosiguranje viška štete

Reosiguranje viška štete podrazumijeva da se samopridržaj društva ugovara u iznosu koje ono samo snosi u slučaju nastanka štete, a reosiguratelj pokriva onaj dio štete koji prelazi samopridržaj. Ovom vrstom reosiguranja osiguratelj je pokriven od velikih šteta na poje- dinom riziku kao i od kumuliranja rizika, koje su posljedice npr. elementarnih nepogoda. Obveza reosiguratelja počinje od visine samopridržaja pa do maksimalne svote - limita i po tome se razlikuje od proporcionalnih ugovora.

Koristimo se istim oznakama kao i ranije, tako da je M samopridržaj društva, Xi označava iznos štete, Yi iznos štete koji plaća osiguravajuće društvo, a Zi iznos koji plaća reosiguratelj. Iznos štete koji plaća osiguravajuće društvo iznosi:

$$Y_i = \begin{cases} X_i, & ako\ je\ X_i \leq M \\ M, & ako\ je\ X_i > M \end{cases}.$$

Iznos štete koji ide na teret reosiguratelja je:

$$Z_i = \begin{cases} 0, & ako\ je\ X_i \leq M \\ X_i - Y_i, & ako\ je\ X_i > M \end{cases}.$$

Određivanje premije reosiguranja kod neproporcionalnih ugovoraje vrlo je složeno. Iz tog razloga pretpostavit ćemo da je premija jednaka očekivanoj šteti i dijeli se u omjeru učešća u očekivanim štetama između osiguratelja i reosiguratelja. Ako zanemarimo druge elemente poslovanja koji mogu imati utjecaj na računanje premije i ako premiju utvrđujemo na osnovi raspodjela šteta, onda imamo:

- premija osiguranja: $p_O(t) = \frac{E_O}{E} ct$
- premija reosiguranja: $p_R(t) = \frac{E - E_O}{E} ct$

gdje su E ukupne očekivane štete, E_O očekivane štete koje padaju na teret osiguratelja, prema [2]. Zanima nas kako to utječe na osigurateljevu obvezu, a utječe tako da smanjuje očekivani isplaćeni iznos i varijancu isplaćenog iznosa što je posljedica da reosiguranje viška štete ograničava odozgo velike štete.

Pretpostavimo da je X_i iznos štete i da postoji funkcija gustoće $f(x)$. Očekivani iznos štete možemo zapisati kao:

$$E(X_i) = \int_0^\infty x f(x) dx$$

Kada uvrstimo samopridržaj M, dio očekivane štete koji plaća osiguravajuće društvo se može zapisati kao:

$$E(Y_i) = \int_0^M x f(x) dx + MP(X_i > M).$$

Dodatno, očekivane obveze društva možemo zapisati na slijedeći način:

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= \int_0^\infty x f(x) dx - \int_M^\infty x f(x) dx + M \int_M^\infty f(x) dx \\ &= E(X_i) - \int_M^\infty (x - M) f(x) dx \end{aligned}$$

Kada napravimo supstituciju $z = x - M$ dobit ćemo:

$$E(Y_i) = E(X_i) - \int_0^\infty z f(z - M) dz$$

gdje je:

$$\int_{0}^{\infty} zf(z-M)dz$$

smanjenje očekivanog iznosa štete.

Premija je kod ovakvih ugovora također znatno niža nego kod svotno-ekscedentnih ugovora. Razlog tomu je što štete mogu značajno odstupati u kretanju kod osiguratelja i kod reosiguratelja. Može biti godina da su sve štete ispod samopridržaja, pa reosiguratelj prima premiju, a ne sudjeluje u naknadi šteta, dok s druge strane u nekim godinama može doći do velikih šteta, koje u značajnom iznosu padaju na teret reosiguratelja. Ovakva vrsta ugovora se najčešće se koristi kod osiguranja karga, automobilske odgovornosti, osiguranja posljedica nesretnog slučaja, a kod imovinskih osiguranja je dopuna je svotno-ekscedentnom osiguranju.

3.2.2 Reosiguranje tehničkog rezultata

Reosiguranje tehničkog rezultata oblik je reosiguranja kod kojeg reosiguratelj preuzima is- platiti iznos šteta koji premašuje unaprijed utvrđeni iznos M, s tim da se reosiguravajuće pokriće ograničava i odozgo. Razlikuje se od prethodnih po tome što je vezan uz ukupni godišnji iznos šteta, a drugi izravno ovise o obliku i ponašanju distribucije šteta po veličini. Ovaj oblik reosiguranja se koristi kod osiguranja kod kojih rezultat poslovanja ima značajne oscilacije iz godine u godinu zbog nastanka malih i srednjih šteta. Najčešći primjeri ovog oblika reosiguranja su kod osiguranja usjeva, životinja i slično. Reosigurateljni ugovor ovog tipa vrlo je pogodan za osiguratelja jer unaprijed zna svoje obveze. Problem može nastati u slučaju da štete prijeđu dogovoreni limit u tom slučaju iznos iznad limita ide na teret osiguratelja. Treba voditi računa o tome da se utvrdi korektan samopridržaj jer bi u slučaju preniskog samopridržaja osiguranje uvijek ostvarivalo pozitivne rezultate što nije po pravilima struke. Samopridržaj bi se trebao utvrditi u visini M, koja je najniža razina iznosa šteta zbog koje osiguranje ne može ostvariti pozitivan tehnički rezultat. Samopridržaj se određuje u postotku od premije, na sljedeći način:

$$M = \frac{(1-p_R(T))}{p_O(T)}100,$$

gdje je p_0 (T) premija osiguranja, a p_R(T) premija reosiguranja za promatrani period *T* koji je najčešće jedna godina.

Kod ugovora tehničkog rezultata sa samopridržajem *M* i ukupnim godišnjim iznosom šteta S_t [poglavlje 2.1] iznos štete koji plaća osiguratelj je:

$$Y_T = \begin{cases} S_T, & S_T \le M \\ M, & S_T > M \end{cases}.$$

Iznos štete koji ide na teret reosiguratelja je:

$$Z_T = (S_T - M)^+ = \begin{cases} 0, & S_T \leq M \\ S_T - M, & S_T > M \end{cases}$$

Pretpostavimo da je F_{ST} funkcija distribucije ukupnih šteta S_T koje nikada nemaju negativne vrijednosti. Očekivani iznos štete koji plaća reosiguratelj se računa se na slijedeći način:

$$\begin{aligned} E[Z_T] = E[(S_T - M)^+] &= \int_M^\infty (x - M) dF_{S_T}(x) \\ &= E[S_T] - M + \int_0^M (M - x) dF_{S_T}(x) \\ &= \int_M^\infty (1 - F_{S_T}(x)) dx \\ &= E[S_T] - \int_0^M (1 - F_{S_T}(x)) dx. \end{aligned}$$

4. REOSIGURANJE I PROPAST

Kako bi smanjio varijabilnost troškova od ukupnih šteta iz rizika koje je preuzeo u osiguranje, osiguratelj može dio predati u reosiguranje i tako smanjiti troškove pa i vjerojatnost da će doći do propasti. Detaljno smo ugovore o reosiguranju opisali u 3.2 i 3.1. U ovom poglavlju promatrat ćemo kako reosiguranje djeluje na vjerojatnost propasti ψ(u) i Lundbergov koeficijent prilagodbe R o kojima smo govorili u 2.2 i 2.3. Osiguranju je u interesu pronaći reosiguranje koje će maksimizirati vrijednost Lundbergovog koeficijenta i time minimizirati vjerojatnost propasti. Kao i prije, funkciju distribucije šteta Xi označavat ćemo s F(x) i pretpostaviti da su sve štete pozitivnog iznosa. Funkciju gustoće Xi , ako postoji, označavat ćemo s f(x).

Problem procjene distribucije šteta može nastati zato što se promatraju samo štete iznad samopridržaja, tj. promatraju se štete iz odrezane distribucije. Taj problem nastaje i kod polica koje imaju ugovorenu franšizu, što smo spomenuli u 2.1. Kada imamo uzorak podataka šteta nastalih po policama koje imaju ugovorenu franšizu ili imaju ugovor o reosiguranju, takav uzorak zove se cenzurirani uzorak. Cenzurirani uzorak je uzorak u kojemu su neke vrijednosti točno zabilježene, dok je za druge poznato da prelaze neku određenu vrijednost [3].

Pogledat ćemo situaciju iz pozicije reosiguratelja. Pretpostavimo da reosiguratelj raspolaže s informacijama o iznosu šteta iznad samopridržaja, označavat ćemo ga s M , te da postoji f(x) funkcija gustoće iznosa šteta X i F(x) funkcija distribucije. Prema [3] iznos štete koju plaća reosiguratelj modelirana je slučajnom varijablom Z i iznosi:

$$Z = X - M$$

gdje je *X* iznos štete. Funkcija distribucije iznosa koji plaća reosiguratelj je:

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(X \leq z + M | X > M) \\ &= \int_M^{M+z} \frac{f(x)}{1 - F(M)} dx \\ &= \frac{F(z+M) - F(M)}{1 - F(M)} \end{aligned}$$

Zatim deriviramo sve po z i dobijemo funkciju gustoće reosigurateljevih šteta

$$g(z) = \frac{f(z+M)}{1 - F(M)}, \qquad z > 0.$$

U nastavku ćemo pretpostaviti da osigurateljeve pojedinačne štete imaju eksponencijalnu distribuciju $F(x) = 1 - e^{-\rho x}$, gdje je $\rho > 0$. Razmatrat ćemo utjecaj koeficijenta prilagodbe na kvotno reosiguranje i na reosiguranje viška štete.

4.1 Maksimiziranje Lundbergovog koeficijenta uz kvotno reosiguranje

Kako smo već naveli, kod kvotnog reosiguranja osiguratelj i reosiguratelj sudjeluju u svakoj šteti i premiji u određenom omjeru. Iznosi individualnih šteta za osiguratelja distribuirani su s aX_i, a za reosiguratelja s $(1-a)X_i$. Iznosi skupnih šteta do trenutka t distribuirani su kao aS_t za osiguratelja, odnosno $(1-a)S_t$ za reosiguratelja, gdje je S_t kao u poglavlju 2.1 proces ukupnih šteta. Pogledajmo utjecaj kvotnog reosiguranja na vjerojatnost propasti i Lundbergov koeficijent. Kao i prije, radi jednostavnosti pretpostavljamo da su ukupne premije jednake očekivanim štetama. Sljedećim ćemo se oznakama koristiti za:

- ukupnu premiju po jedinici vremena koja predstavlja i očekivane ukupne štete po jedinici vremena:

  $$(1 + \theta)\lambda\mu,$$

  gdje je θ dodatak na premiju, a $\mu = E[X]$.
- reosigurateljna premija po jedinici vremena:

  $$(1 + \varepsilon)(1 - a)\lambda\mu,$$

gdje je $\varepsilon \geq 0$ reosigurateljev dodatak na premiju. Kada ne bi bio ispunjen uvjet da je $\varepsilon \geq 0$, tada bi osiguratelj mogao prebaciti cijeli rizik na reosiguratelja i tako ostvariti siguran profit.

- osigurateljna premija po jedinici vremena:

  $$[(1 + \theta) - (1 + \varepsilon)(1 - a)]\lambda\mu$$

- osigurateljeve očekivane štete po jedinici vremena:

$$\alpha\lambda\mu$$

- reosigurateljeve očekivane štete po jedinici vremena:

$$(1-\alpha)\lambda\mu.$$

Treba vrijediti da je:

$$(1+\theta) > (1+\varepsilon)(1-\alpha)$$
$$\alpha = \frac{(\varepsilon - \theta)}{(1+\varepsilon)},$$

što osigurava da neto prihod od premija bude pozitivan. Za osigurateljev neto prihod od premija treba vrijediti i uvjet neto profita, tj. da su prihodi veći od očekivanih šteta, u protivnom je propast sigurna. Kako su osigurateljeve ukupne štete po jedinici vremena $\alpha\lambda\mu$, slijedi da mora vrijediti:

$$\alpha\lambda\mu < [(1+\theta) - (1+\varepsilon)(1-\alpha)]\lambda\mu$$
$$\alpha < (1+\theta) - (1+\varepsilon)(1-\alpha)$$
$$\alpha > 1 - \theta/\varepsilon$$

Zadnja nejednakosti specificira osigurateljev minimalni samopridržaj. Sada ćemo odrediti vjerojatnost propasti za ovakav tip ugovora i Lundbergov koeficijent s pomoću kojeg možemo kontrolirati gornju granicu vjerojatnosti propasti.

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P\Big((u + (1+\theta-(1-\alpha)(1+\varepsilon)t - \sum_{i=1}^{N_t}\alpha X_i < 0, \quad \text{za} \quad t>0\Big)\\ &= P\Big(\frac{u}{\alpha} + \Big(1 + \frac{\theta - \varepsilon(1-\alpha)}{\alpha}\Big)t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i < 0, \quad \text{za} \quad t>0\Big)\end{aligned}$$

Pogledajmo sada što se događa s Lundbergovim koeficijentom. Lundbergov koeficijent će u ovom slučaju biti funkcija samopridržaja. Promotrimo prvo slučaj kada je $\theta = \varepsilon$. Nakon toga ćemo promatrati općeniti slučaj gdje su θ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni.

4.1.1 Slučaj θ = ε

Promatramo slučaj u kojem i osiguratelj i reosiguratelj koriste θ kao dodatak na premiju pa prema navedenim uvjetima slijedi da je $\alpha > 0$. Znamo da je dio koji ide na teret osiguratelja $Y_i = \alpha X_i$ i tada vrijedi:

$$P(Y_i \leq y) = P\left(X_i \leq \frac{y}{\alpha}\right) = 1 - e^{-\frac{\rho}{\alpha}y}.$$

Kako je *R* definiran kao jedinstveno pozitivno rješenje jednadžbe $\lambda M_x(R) = \lambda + cR$, a funkcija izvodnica $M_x(R)=\rho/\rho\text{-}R$ dobivamo sljedeće:

$$\lambda\left(\frac{\rho}{\rho - \alpha R}\right) = \lambda + (1+\theta)\lambda\frac{\alpha}{\rho}R$$
$$\frac{1}{\rho - \alpha R} = \rho + (1+\theta)\alpha R$$
$$R^2(\alpha^2(1+\theta)) - R\alpha\rho\theta + (1-\rho^2) = 0.$$

Dobivenu funkciju ćemo zatim derivirati po *R*, jer želimo pronaći maksimalan *R* pate imamo:

$$2R(\alpha^2(1+\theta)) - R\alpha\rho\theta = 0$$
$$R = \frac{\rho\theta}{2\alpha(1+\theta)}$$

Primjećujemo da je *R* opadajuća funkcija od a. Prema tome, možemo zaključiti da što manji udio rizika pada na teret reosiguratelja, to će vjerojatnost propasti za osiguratelja biti manja. Iako je u praksi moguće da je θ=*E*, ovaj slučaj nije toliko zanimljiv s obzirom na to da je optimalni samopridržaj uvijek jednak nula (vidjeti [5]).

4.1.2 Opći slučaj

Lundbergov koeficijent tražimo na isti način, ali je u ovom slučaju:

$$c = [(1 + \theta) - (1 + \varepsilon)(1 - a)]\lambda\mu.$$

Tada slijedi da je:

$$\lambda M_X(R) = \lambda + cR$$
$$\frac{\rho}{\rho - \alpha R} = 1 + (1 + \theta - (1+\varepsilon)(1-\alpha))\mu R$$
$$\alpha\mu(\alpha(1+\varepsilon) + \theta - \varepsilon)R^2 + (\rho\mu(\alpha(1+\varepsilon) + \theta - \varepsilon) - \alpha)R = 0$$

Kako želimo maksimizirati prethodnu funkciju, derivirat ćemo sve po R i dobijemo slijedeće:

$$R = \frac{\rho\mu(\alpha(1 + \varepsilon) + \theta - \varepsilon) - 1}{2\alpha\mu(\alpha(1 + \varepsilon)\theta + \varepsilon)}.$$

Primjećujemo da *R* ovisi o puno parametara. Osiguratelj prema svojim mogućnostima određuje po kojoj će vrijednosti maksimizirati *R* i smanjiti vjerojatnost propasti. Pokazat ćemo na konkretnom primjeru način na koji se računa, detaljnije možemo vidjeti u [3].

Primjer 4.1. U ovom primjeru pretpostavit ćemo da iznosi šteta imaju eksponencijalnu distribuciju s očekivanjem 1, tj. $F(x)=1-e^{-x}$. Zatim ćemo maksimizirati Lundbergov koeficijent *R* po α. Maksimizaciju ćemo promatrati tako da uzmemo različite dodatke na
premiju za osiguratelja i reosiguratelja. Prisjetimo se da treba biti zadovoljen uvjet:

$$\alpha > 1 - \theta/\epsilon.$$

Neka su zadani dodatci na premiju θ = 0.2 i ε = 0.4 tada slijedi da je α > 0.5, tj. vrijednost koja maksimizira *R* ćemo tražiti u α ∈ *[0.5, 1]*. Jednadžba koja definira R tada je dana s:

$$R = \frac{\theta - \varepsilon(1-\alpha)}{\alpha[1+\theta-(1+\varepsilon)(1-\alpha)]}, \qquad za\ \alpha \in [0.5, 1].$$

Tražimo vrijednost od α koja maksimizira *R*. Za dane parametre θ i ε maksimalni Lundbergov koeficijent iznosi 0.1678, za optimalni samopridržaj α = 0.922577.
U nastavku slijede vrijednosti maksimalnog Lundbergovog koeficijenta uz pripadni α prema različitim dodatcima na premiju.

Tablica 1: Maksimiziranje Lundbergovog koeficijenta *R* po α

Dodatak na premiju	α	Lundbergov koeficijent
θ = 0.1, ε = 0.15	0.644168	0.104779
θ = 0.1, ε = 0.2	0.956435	0.0910977
θ = 0.2, ε = 0.3	0.625686	0.196491
θ = 0.2, ε = 0.4	0.922577	0.16784

Prema dobivenim vrijednostima možemo zaključiti da što je manji dodatak na premiju nakon odbitka za reosiguranje, to je manji Lundbergov koeficijent.

Ako osiguranje uzima u pokriće one rizike s kojima se može samostalno nositi, riječ je o manjim rizicima jer se reosiguranje koristi samo kod većih rizika. Kod većih rizika osiguratelji posežu za reosiguranjem kako bi se dodatno zaštitili. Kada osiguratelj sklopi ugovor o reosiguranju, osigurateljev dodatak na premiju opada nakon odbitka za reosiguranje i vrijednost koeficijenta prilagodbe opada s dodatkom na premiju. Osiguratelji maksimiziranjem koeficijenta prilagodbe žele minimizirati vjerojatnost propasti.

4.2 Maksimiziranje Lundbergovog koeficijenta uz reosiguranje viška štete

Pogledajmo utjecaj reosiguranja viška štete na koeficijent prilagodbe. Slijedećim ćemo se oznakama koristiti za:

- ukupnu premiju po jedinici vremena: $(1 + \theta)\lambda\mu$, gdje je θ dodatak na premiju
- osigurateljnu premiju po jedinici vremena: $c = (1 + \theta)\lambda\mu - (1 + \varepsilon)\lambda E[Z]$
- reosigurateljnu premiju po jedinici vremena: $(1 + \varepsilon)\lambda E[Z]$, gdje je $\varepsilon \geq 0$ reosigurateljev dodatak na premiju
- osigurateljeve štete: $Y_i = min(X_i, M)$
- reosigurateljeve štete: $Z_i = max(0, X_i - M)$.

R je definiran kao jedinstveno pozitivno rješenje jednadžbe $\lambda M_X(R) = \lambda + cR$, a za c uzimamo premiju osiguratelja. Iznosi šteta kod ovog oblika reosiguranja su iz cenzuriranog uzorka, pa funkciju izvodnicu momenata računamo kao:

$$\begin{aligned} M_X(R) &= \int_0^M e^{Rx} f(x)dx + e^{RM}(1 - F(M)) \\ &= \frac{Re^{M(R-\rho)} - \rho}{R - \rho}. \end{aligned}$$

Tada imamo:

$$\lambda\left(\frac{Re^{M(R-\rho)} - \rho}{R-\rho}\right) = \lambda + (1 + \theta)\lambda\mu R - (1 + \varepsilon)\lambda E[Z]R.$$

Ponovimo isti postupak kojim smo sekao što smo koristili u slučaju kvotnog reosiguranja i dobijemo R.

Lundbergov koeficijent možemo promatrati kao funkciju nekih drugih parametara te preko njih djelovati na vjerojatnost propasti.

5. ZAKLJUČAK

Cramér-Lundbergov model je vrlo jednostavan model, ali koristan i može se primijeniti u brojnim situacijama. Razlog prilagodljivosti modela je u broju parametara i slobodi izbora distribucije šteta. U radu smo pretpostavili da iznosi šteta imaju eksponencijalnu distribuciju, ali često to nije prikladan izbor. Iznosi šteta bolje se modeliraju funkcijama distribucijama s teškim repovima, ali utvrditi da neki uzorak šteta dolazi iz distribucije s teškim repovima nije jednostavan statistički problem. Postoji niz statističkih metoda koje se koriste za utvrđivanje dolazi li uzorak iz distribucije s teškim repovima. Iznosi šteta najčešće se modeliraju Pareto distribucijom, Gama distribucijom i drugim distribucijama (vidjeti [3]).

Vidjeli smo kako pomoću Lundbergovog koeficijenta utjecati na vjerojatnost propasti, a taj postupak može se napraviti i za ostale parametre. Vjerojatnost propasti možemo promatrati i kao funkciju početnog viška, dodatka na premiju, Poissonovog parametra i drugih, (više o tome u [4] i [3]). Cramér-Lundbergov model bio je prvi takav model, nakon njega je proizašao cijeli niz modela koji na različite načine poopćavaju Cramér-Lundbergov model. Jedan takav model je Sparre Andersenov, više o tome vidjeti u [10].

Općenito, zaključujemo da pronalazak distribucije iznosa šteta pa time i vjerojatnosti propasti može biti vrlo složeno. Osigurateljima je u cilju što bolje poslovati i smanjiti rizike poslovanja, zbog toga su i dalje aktualna istraživanja ove teme i redovito dolazi do nekih novih rezultata. Osim vjerojatnosti propasti, proučavaju se i druge veličine, vrijeme propasti, višak u trenutku propasti, deficit u propasti i druge. Iako je u praksi situacija puno složenija i ovisi o mnoštvu čimbenika na koje osiguravajuće društvo ne može utjecati, ovakvi rezultati uvelike pridonose boljim poslovnim odlukama.

Summary: *In this paper we will introduce the way the insurance company operates. First of all, we will explain risks the insurance company is exposed to and classify these risks in categories. We will introduce Cramér-Lundberg's model, investigate how to calculate ruin probability and how to influence probability of ruin with Lundbergs coefficient. In second part of the paper, we will introduce reinsurance. Furthermore, we will explain how insurance company insures itself. We will see distribution of reinsurance treaties and explain each of them. At last, we will study how reinsurance affects the ruin probability.*

Key words: *insurance, claims, total claim amount, Cramér-Lundberg model, ruin probability, Lundberg coefficient/adjustment coefficient, reinsurance*

Navedeni izvori i korištena literatura

[1] M. Benšić M., N.Šuvak N., Uvod u vjerojatnost i statistiku, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] M. Bijelić M. , Osiguranje i reosiguranje, Tectus, Zagreb, 2002.

[3] C. Chappell C., I. Currie, D. Dickson, R. Gray, M. Hosking, G. Ivers, A. Korabinski,

J.Tindale, R.Verall, H.Waterset. al., Aktuarska matematika II, Faculty and Institute of Actuaries

[4] G. Deelstra G., G. Plantin G., Risk Theory and Reinsurance, Springer-Verlag, London, 2014.

[5] D.C.M. Dickson D.C.M., H.R. Waters, Reinsurance and ruin, Mathematics and Economics 19 (1996), 61-80.

[6] R. Durrett R., Essentials of Stochastic Processes , Springer Texts in Statistics, Springer, 1999.

[7] D. Grahovac D., A. Leko, Modeliranje rizika u osiguranju, Osječki matematički

list 15 (2015), 113-129.

[8] I. Lampaert I., J.F. Walhin J.F., On the optimality of proportional reinsurance, Scandina- vian Actuarial Journal, 2005 3, 225-239.

[9] Newton L. Bowers, JR.Hans Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbittet.al. Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries, 1997.

[10] T. Mikosch T., Non-Life Insurance Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

[11] J. Rafaj J., Tržište osiguranja, Hrvatska agencija za nadzor financijskih usluga, Zagreb, 2009.,

https://www.hanfa.hr/getfile.ashx/?fileId=39205

[12] N. Sarapa N., Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[13] R. Scitovski R., et. al., K. Sabo, D. Grahovac, Globalna optimizacija, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[14] Pravilnik o rasporedu vrsta rizika po skupinama i vrstama osiguranja odnosno reosiguranja, Hrvatska agencija za nadzor financijskih usluga, Zagreb, 2009. https://www.hanfa.hr/uploads/2013/07/17/