O trisekciji kuta

Magdalena Živković[1]

Uvod

Euklidova geometrija se postavlja na pet glavnih aksioma, ali isto tako i na neka "pravila igre" poput dopuštanja uporabe samo neoznačenog ravnala i šestara. Geometrija je u vrijeme pisanja Euklidovih Elemenata, jednog od prvih tekstova koji pokušava udariti matematici neki zajednički temelj, još uvijek bila sastavni dio filozofije i tek se bila počela odvajati i formalizirati u nama prepoznatljiv oblik. Stoga nije iznenađujuće što su na nju utjecale druge filozofske ideje. Platonovski idealizam je tada vladao grčkim filozofskim svijetom. On tvrdi da sve apsolutne istine postoje samo u svijetu ideja, te da je stvarni svijet samo sjena tih istina. Na primjer, nijedna kružnica koju čovjek nacrta nije savršena već samo aproksimacija savršene kružnice koja postoji u našim mislima. Ni jedno drvo na svijetu ne obuhvaća cjelovito ideju drveta koja postoji u našim glavama, dok s druge strane naša ideja drveta adekvatno opisuje svako drvo. Prema tome, jedini ispravan način za otkrivanje istina je proučavanje savršenih ideja. To je u neku ruku bilo opravdanje starih Grka za izučavanje matematike. Zato je ograničenje na crtanje pravaca i kružnica u to vrijeme bilo vrlo logično; to su ipak najjednostavnije i najlakše razumljive konstrukcije te stoga predstavljaju neku vrstu savršenstva (savršeno ravno i savršeno zakrivljeno), odnosno aksiomatskog porijekla svih drugih oblika.

Tri velika problema starogrčke geometrije su bili: trisekcija kuta, udvostručenje kocke i kvadratura kruga. Iako je u 19. stoljeću Wantzel pokazao da su u Euklidovom okviru te konstrukcije nemoguće, proučavanje tih problema je dovelo do značajnog napretka matematike. Tako je, na primjer, Menehmo otkrio konike (znane i kao čunjosječnice) proučavajući udvostručenje kocke.

Kao što ćemo i pokazati, trisekcija kuta i udvostručenje kocke su problemi koji se mogu svesti na rješavanje kubne jednadžbe. Konstrukcija šestarom i neoznačenim ravnalom su zapravo konstrukcije kružnice (definirane jednostavnom jednadžbom 2. stupnja) i pravca (definiranog jednadžbom prvog stupnja), no kao takve su primjenjive za rješavanje kubnih jednadžbi samo u specijalnim slučajevima. Bitno je napomenuti da za točku kažemo da se može konstruirati ako se njezine koordinate mogu dobiti uzastopnim zbrajanjem, oduzimanjem, dijeljenjem, množenjem ili korjenovanjem (samo 2. korijena) racionalnog broja. To su tzv. euklidski brojevi, tj. oni koji se mogu dobiti rješavanjem kvadratnih jednadžbi.

Ako pretpostavimo da je vrh kuta u ishodištu te da jedan krak leži na osi apscisa, kut α možemo odrediti samo pomoću jedne točke $T(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Trećinu tog kuta tada možemo definirati točkom $T\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)$. Kako $\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)}$, problem se svodi na traženje $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$.

[1] Autorica je učenica XV. gimnazije u Zagrebu; e-pošta: `magdalena.m.zivkovic@gmail.com`

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta)\\ &= \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\ &= \left(2\cos^2(\theta) - 1\right)\cos(\theta) - 2\left(1 - \cos^2(\theta)\right)\cos(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\end{aligned}$$

odnosno, kada je $3\theta = \alpha$, $\cos\alpha = 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$.

To je u biti kubna jednadžba oblika $x^3 - \frac{3}{4}x - k = 0$. Da je trisekcija kuta moguća samo šestarom i neoznačenim ravnalom, tada bi svaki kut, pa i onaj od 60° bilo moguće trisektirati. Tada dobivamo jednadžbu $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$, odnosno $8x^3 - 6x - 1 = 0$ koja nema euklidski broj kao rješenje. Ovime smo pokazali da kut od 60° ne možemo trisektirati, što je u kontradikciji s uvjetom mogućnosti trisekcije kuta.

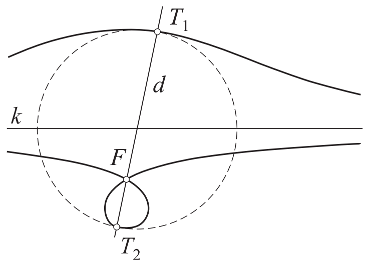
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da udvostručujemo jediničnu kocku stranice 1 i volumena 1. Udvostručena, imala bi volumen 2 i stranicu koja zadovoljava jednadžbu $x^3 = 2$. Može se pokazati da se realna kubna jednadžba može geometrijski riješiti pomoću šestara, neoznačenog ravnala i trisekcije kuta ako i samo ako ima bar jedan racionalan korijen. Kako gornja jednadžba ima samo jedan realni korijen $\sqrt[3]{2}$, čak i da proširimo naš "prostor manevra" uključivši mogućnost trisekcije kuta, udvostručenje kocke i dalje ne možemo riješiti. Postoje mnoge metode konstrukcije $\sqrt[3]{2}$ mehaničkim krivuljama, čunjosječnicama, origami metodama i slično, ali se njima ovdje nećemo baviti.

Konstrukciju kvadrata s istom površinom kao i krug možemo svesti na konstrukciju dužine $\sqrt{k\pi}$. Kako je π transcedentni broj, ni njega ni njegov korijen ne možemo konstruirati. Štoviše, ne može biti rješenje niti jednog konačnog polinoma s racionalnim koeficijentima te se stoga ovim problemom dalje nećemo baviti.

Malim iskorakom iz euklidskog okvira, tj. uvođenjem raznih novih pribora (tkz. neusis-konstrukcije), ili gledanjem iz drugih aksiomatskih okvira, rješenja ovih problema su moguća. Neka od rješenja problema trisekcije kuta su prezentirana dalje u tekstu.

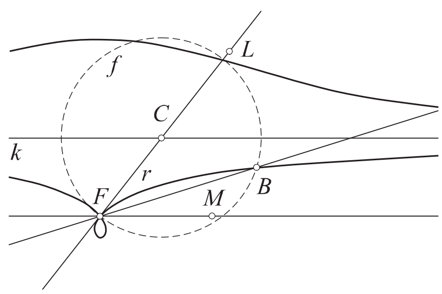
Mehanička rješenja trisekcije kuta

Euklidska geometrija ne poznaje koordinatni sustav. Prvenstveno zato što je direktno prenošenje dužine zabranjeno (svako korišteno ravnalo mora biti neoznačeno), a za šestar se pretpostavlja da se sklapa prilikom dizanja s papira. Kada ovo pravilo ne bi postojalo, trisekcija kuta bi kao praktički problem bila jednostavno rješiva smicanjem označenog ravnala i tako "napipkavanjem" rješenja kao traženje točke koja zadovoljava uvjet neke konstrukcije. To se, još u doba starih Grka, izvodilo raznim priborima koji su olakšavali takav posao, a zvali su ih neusis-konstrukcijama. Krivulje prezentirane ovdje su zapravo formalizam takvog 'napipkavanja' rješenja, većina ih je izmišljena za potrebe trisekcije kuta, kao npr. Nikomedova konhoida. Problem trisekcije kuta je od povijesne važnosti zato što su se prilikom traženja rješenja po prvi put počele proučavati krivulje koje nemaju geometrijsku osnovu (kao što su to npr. čunjosječnice koje su nastale presijecanjem stožaca s ravninom).



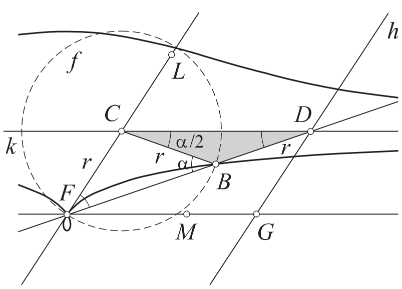
Općenito, konhoida je zadana nekom krivuljom k, žarištem F i konstantom d. Kada iz žarišta povućemo pravac tako da se siječe sa zadanom krivuljom, onda su točke T_1 i T_2 koje leže na tom pravcu, a za zadanu konstantu d su udaljene od sjecišta pravca i krivulje, točke konhoide. Ovdje će biti prezentirana trisekcija kuta pomoću Nikomedove konhoide, ali je trisekcija kuta moguća i brojnim drugim konhoidama. Nikomedova konhoida je bila prva krivulja korištena pri trisekciji kuta, a proizašla je iz formaliziranja korištenja označenog ravnala (to vidimo pri gledanju konstantne udaljenosti od sjecišta pravca i krivulje k). Ona je zadana pravcem k (pravac je ovdje krivulja k), žarištem F koje nije na pravcu i konstantom d. Jednadžba joj je $\left(x^2+y^2\right)(y-a)^2=d^2y^2$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu, s tim da je a udaljenost žarišta od pravca. To je krivulja četvrtog reda i ima dosta zanimljivih svojstava, npr. kada je žarište na pravcu, reducira se u kružnicu.

Metoda:

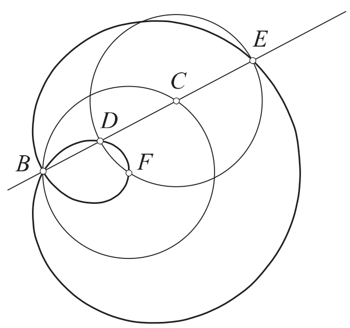


1. konstruiramo kut $\sphericalangle MFL$ koji ćemo trisektirati, pretpostavimo da je vrh kuta u ishodištu koordinatnog sustava te da krak $\overline{FM}$ leži na apscisi;
2. odaberemo točku $C(x_C, y_C)$ na kraku FL i povucimo paralelu k s krakom $\overline{FM}$ kroz točku C;
3. konstruiramo kružnicu f sa središtem u C koja prolazi kroz F;
4. potom konstruiramo Nikomedovu konhoidu $(x^2+y^2)(y-x_C)^2=r^2y^2$, gdje nam je F žarište, k pravac, x_C udaljenost, a radijus kružnice f je konstanta r;
5. neka je B točka presjeka kružnice i konhoide:
6. tada vrijedi $\sphericalangle MFB=\dfrac{\sphericalangle MFL}{3}$.

Dokaz. Dokažimo da smo zaista trisektirali zadani kut:



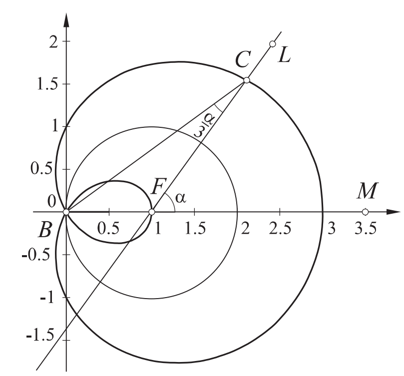
1. uočimo prvo jednakokračne $\triangle FBC$ (krakovi $\overline{FC}$ i $\overline{CB}$ su duljine radijusa x_C) i $\triangle BDC$ (krak $\overline{CB}$ mu je radijus, a i $\overline{BD}$ zbog definicije korištene konhoide);
2. neka je $\alpha=\sphericalangle BFC=\sphericalangle CBF$;
3. $\sphericalangle DBC=180^\circ-\alpha$, tada je $\sphericalangle BCD=\sphericalangle CDB=\dfrac{\alpha}{2}$;
4. konstruiramo li paralelogram $FGDC$, po poučku o kutovima uz presječnicu paralelnih pravaca vrijedi $\sphericalangle MFB=\sphericalangle CDB=\dfrac{\alpha}{2}$, odnosno $\sphericalangle MFB=\dfrac{\sphericalangle MFL}{3}$.



Znanu kao i Pascalov puž, ovu krivulju je prvi opisao njemački umjetnik Albrecht Dürer. Njezina jednadžba u polarnom koordinatnom sustavu je $r = k + 2a \cdot \cos\theta$. Za potrebe trisekcije se koristi poseban slučaj kada je $a = k$, odnosno $r = k + 2k \cdot \cos\theta$. Značajna nam je ova metoda konstrukcije.

Počnimo od kružnice sa središtem u F radijusa k i odaberimo točku B na kružnici kao žarište Paskalovog puža. Potom odaberimo varijabilnu točku C na kružnici i povucimo pravac kroz C i žarište. Tada su točke D i E točke na Paskalovom pužu ako zadovoljavaju uvjet $|DC| = |CE| = k$.

Paskalov puž se zapravo može gledati kao podvrsta konhoide u kojoj je zadana krivulja kružnica i kojoj je žarište na zadanoj kružnici.

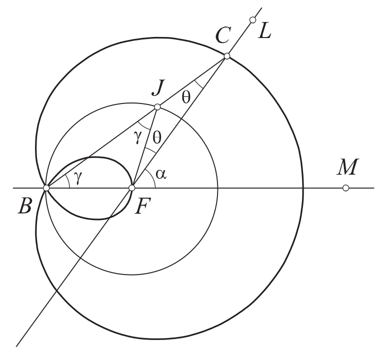


Metoda:

1. konstruirajmo kut $\alpha = \sphericalangle LFM$, tako da je M na apscisi i $F = (k, 0)$;
2. konstruirajmo potom Paskalov puž tako da je žarište u ishodištu te pomoćnu kružnicu središta u F, radijusa $r = k$;
3. neka je C sjecište Paskalovog puža i jednog kraka kuta, povucimo tada BC; konstruirali smo kut $\sphericalangle BCF = \dfrac{\alpha}{3}$.

Dokaz.

1. neka je J sjecište kružnice i dužine $\overline{CB}$;
2. uočimo da je zbog same konstrukcije Paskalovog puža $|JC| = |JF| = |FB| = k$;
3. trokuti FCJ i BFJ su jednakokračni;
4. iz trokuta FCJ, imamo $\sphericalangle JCF = \sphericalangle CFJ = \theta$ te $\sphericalangle FJC = 180^\circ - 2\theta$;
5. a iz trokuta BFJ, $\sphericalangle BJF = \sphericalangle FBJ = \gamma = 180^\circ - \sphericalangle FJC = 2\theta$, odakle je $\sphericalangle JFB = 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - 4\theta$;
6. kut $\sphericalangle MFL = 180^\circ - \sphericalangle JFB - \sphericalangle CFJ = 4\theta - \theta = 3\theta$, odnosno $\sphericalangle JCF = \dfrac{\sphericalangle MFL}{3}$.

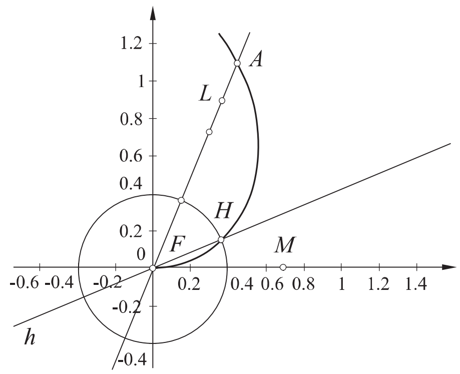


Arhimedova spirala

Arhimedovu spiralu možemo definirati kao putanju točke koja se konstantnom brzinom udaljava od neke fiksne točke klizeći po pravcu koji rotira konstantnom brzinom. U polarnom koordinatnom sustavu ima jednadžbu oblika $r = \theta + k$, gdje r označava udaljenost putujuće točke od fiksne, a θ ovisnost udaljenosti o nagibu, odnosno rotaciji pravca, dok je k neka konstanta. Za potrebe trisekcije koristit ćemo slučaj kada je spirala oblika $r = \theta$.

Metoda:

1. konstruiramo kut $\sphericalangle MFL$, koji ćemo trisektirati, tako da je M na apscisi, F u ishodištu i Arhimedovu spiralu $r = \theta$;
2. neka je A sjecište jednog kraka kuta i spirale, tada trisektiramo dužinu $\overline{FA}$;
3. konstruiramo kružnicu sa središtem u F i radijusa $r = \dfrac{|FA|}{3}$;
4. neka je H sjecište kružnice i spirale, tada je $\sphericalangle MFH = \dfrac{\sphericalangle MFL}{3}$.



Dokaz.

Gledajući definiciju Arhimedove spirale, kako je dužina $\overline{FH}$ tri puta manja od dužine $\overline{FA}$, tako je i kut što ga ta dužina tvori s osi apscisa tri puta manji. Arhimedova spirala se na isti način može koristiti za trisekciju kuta na bilo koji broj jednakih kutova.

Konike (čunjosječnice)

Čunjosječnice se još od vremena Al-Khwarizmija, čuvenog srednjovjekovnog arapskog matematičara po kojem je algebra dobila ime, ako ne i ranije, koriste pri geometrijskom rješavanju kubnih jednadžbi. Može se pokazati da su sve točke čunjosječnica euklidski brojevi ako i samo ako su koeficijenti algebarskih jednadžbi koje predstavljaju te krivulje isto euklidski brojevi. To ipak ne znači da u okviru euklidske geometrije možemo konstruirati čunjosječnice jer se korištenjem kružnica i pravca može konstruirati samo konačan broj točaka, dok su čunjosječnice neprekinute krivulje.

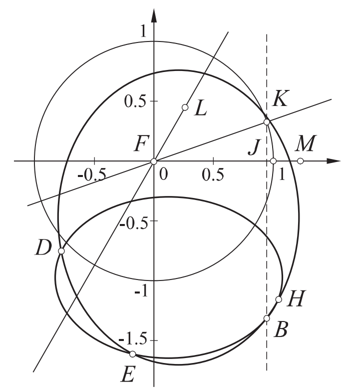
Elipsa (pakružnica)

Problem trisekcije kuta određenog apscisom, ishodištem i točkom $(\cos\theta, \sqrt{1-\cos^2\theta})$ može se svesti na traženje točke $\left(\cos\dfrac{\theta}{3}, \sqrt{1-\cos^2\dfrac{\theta}{3}}\right)$, odnosno vrijednosti $\cos\dfrac{\theta}{3}$.

Prilikom trisekcije kuta elipsama, koristimo dvije specifičnog oblika:

1. $2x^2 + 4y^2 - qx + 2py + 2 = 0$;
2. $6x^2 + 4y^2 - (2+q)x + (2p-4)y - p - 1 = 0$, s tim da je $q = \cos\theta$ i $p = \sqrt{17-4q}$.

Metoda:



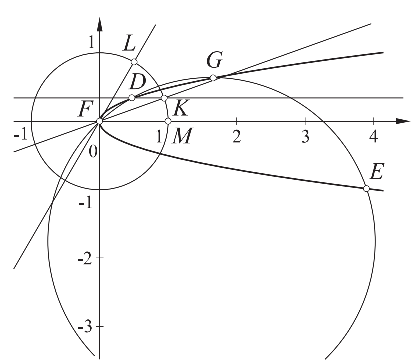
1. konstruiramo $\sphericalangle MFL$, koji ćemo trisektirati, tako da je M na apscisi, a F u ishodištu;
2. konstruiramo te dvije elipse
3. elipse su krivulje 4. reda pa postoje maksimalno 4 točke presjeka tih elipsa; rješenje koje tražimo, odnosno točka B, će biti u IV. kvadrantu, a razlikovat ćemo je od bliske točke presjeka H po tome što joj apscisa nije 1;
4. konstruiramo jediničnu kružnicu;
5. neka je presjek kružnice i okomice kroz rješenje B točka K, tada je kut $\sphericalangle MFK = \dfrac{\sphericalangle MFL}{3}$.

Dokaz.

1. $\cos\theta = 4\cos^3\dfrac{\theta}{3} - 3\cos\dfrac{\theta}{3}$, što možemo izraziti i kao $4x^3 - 3x - q = 0$, gdje je $x = \cos\dfrac{\theta}{3}$;
2. oduzimanjem jednadžbi 1. i 2. elipse, možemo izlučiti $y = \dfrac{4x^2 - 2x - p - 3}{4}$;
3. uvrstivši potom y u jednadžbu 1. pakružnice, dobivamo $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + x(3-q) + \dfrac{17-p^2}{4} = 0$;
4. uvrstivši $p = \sqrt{17-4q}$ dobivamo $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + x(3-q) + q = 0$;
5. taj polinom se može faktorizirati kao $(x-1)(4x^3 - 3x - q) = 0$ i jednadžba ima 4 rješenja (apscise točaka D, E, B, H) s tim da je jedno rješenje $\cos\dfrac{\theta}{3}$; točka B ima to traženo rješenje kao apscisu, zato smo i crtali jediničnu kružnicu kako bi izlučili $\cos\dfrac{\theta}{3}$.

Parabola (hitnica)

Metodu je prvi opisao Descartes. Koristi se kružnica oblika $x^2 + y^2 - \dfrac{13}{4}x + 4ay = 0$, s tim da je $a = \sin\theta$, a θ kut koji želimo trisektirati, i parabola $y^2 = \dfrac{1}{4}x$.



Metoda:

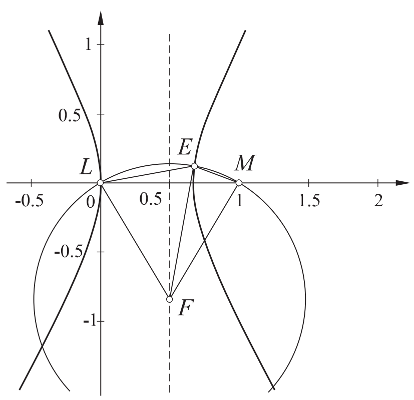
1. konstruiramo kut $\theta = \sphericalangle MFL$, koji ćemo trisektirati, tako da je M na apscisi, a F u ishodištu, neka je θ oštar kut;
2. konstruiramo kružnicu i parabolu;

3. postoje 4 točke presjeka kružnice i parabole, od toga 2 netrivijalna u I. kvadrantu, rješenje koje tražimo se skriva u točki D, a razlikovat ćemo je od bliske točke G po tome što njezina ordinata nikad ne prelazi 0.5, odnosno nikad ne daje vrijednost kuta većeg od 30°;
4. konstruirajmo jediničnu kružnicu i spustimo okomicu na ordinatu kroz točku D;
5. neka je K točka presjeka jedinične kružnice i okomice, tada je $\sphericalangle MFK = \frac{\sphericalangle MFL}{3} = \frac{\theta}{3}$.

Dokaz.

1. $\sin\theta = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3}$, što možemo izraziti kao jednadžbu $4x^3 - 3x + a = 0$, s tim da su $x = \sin\frac{\theta}{3}$ i $a = \sin\theta$;
2. uvrštavanjem jednadžbe parabole $x = 4y^2$ u jednadžbu kružnice, dobivamo polinom čija su rješenja ordinate svih točaka koje se nalaze u presjecima parabole i kružnice: $16y^4 - 12y^2 + 4ay = 0$;
3. faktorizirano kao $4y(4y^3 - 3y + a) = 0$, tada je $\sin\frac{\theta}{3}$ jedno od rješenja, što je u biti ordinata točke D te smo spuštanjem okomice na ordinatu kroz tu točku i presijecanjem te okomice s jediničnom kružnicom izlučili to rješenje i dobili točku K.

Hiperbola (kosatica)



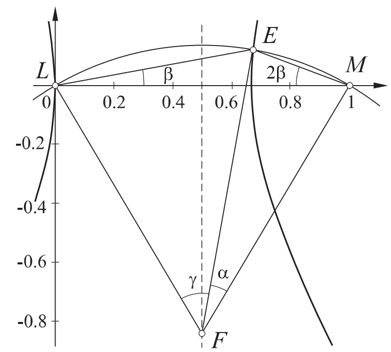
Hiperbola je bila prva čunjosječnica korištena u svrhu trisekcije kuta i koristila se još u doba starih Grka. Postoji više metoda, a prikazana se služi hiperbolom $\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$. Ako definiramo $L(0,0)$ kao lijevo realno tjeme, a $M(1,0)$ kao desno žarište i E kao proizvoljnu točku hiperbole na desnoj grani čija je ordinata različita od 0, tada se za ovu specifičnu hiperbolu može pokazati da vrijedi $2\sphericalangle MLE = \sphericalangle EML$.

Metoda:

1. konstruirajmo hiperbolu, desno žarište M, lijevo tjeme L, te potom simetralu dužine $\overline{LM}$;
2. konstruirajmo kut $\sphericalangle MFL$ koji ćemo trisektirati tako da jedan krak prolazi kroz žarište M, vrh leži na negativnom dijelu simetrale, a drugi krak prolazi kroz tjeme L, tada simetrala dužine $\overline{LM}$ dijeli kut $\sphericalangle MFL$ na dva jednaka kuta;
3. konstruirajmo kružnicu radijusa $|LF|$ sa središtem u F;
4. neka je E presjek hiperbole i kružnice u I. kvadrantu, tada je $\sphericalangle MFE = \frac{\sphericalangle MFL}{3}$.

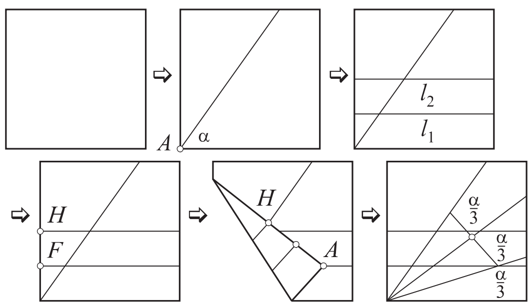
Dokaz.

1. $\sphericalangle MFL = \alpha + \gamma$;
2. svojstvo korištene hiperbole: $2\sphericalangle MLE = \sphericalangle EML$;
3. zbog poučka o središnjem i obodnom kutu: $\alpha = 2\beta$ i $\gamma = 4\beta$;
4. $\gamma = 2\alpha$ pa je $\sphericalangle MFL = 3\alpha$.



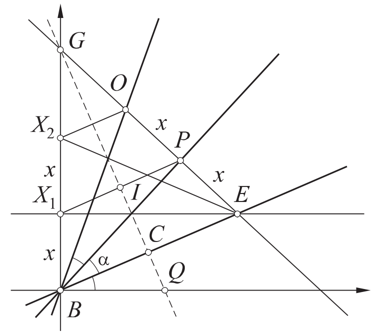
Drugi geometrijski sustavi

Drugi aksiomatski geometrijski sustavi nemaju ista ograničenja kao i Euklidov pa su u njima moguće neke konstrukcije koje u ovom nisu. Kao primjer uzet ćemo jednu origami metodu trisekcije trokuta. Origami geometrija je uređena Huzita-Hatori aksiomima.



Metoda:

1. savijanjem označimo kut;
2. na isti način označimo paralelu l_1 od donjeg kraka udaljenog za x i paralelu l_2 od paralele l_1 udaljene za x;
3. savinemo vrh s kutom tako da točka H padne na gornji krak kuta, a točka A na l_1 – tako smo prenijeli dužinu $2x$ te nam tako origami metoda služi poput označenog ravnala.



Dokaz.

1. pravac GQ nastao savijanjem papira je zapravo os preslikavanja točaka B u E, X_1 u P i X_2 u O;
2. $|BX_1| = |X_1X_2| = x$, uočimo isto i da je pravac X_1E paralelan s apscisom i tako okomit na ordinatu u točki X_1; to znači da je $\triangle BEX_2$ jednakokračan odnosno $\sphericalangle X_2EX_1 = \sphericalangle X_1EB$;
3. $\triangle OEB$ je nastao preslikavanjem $\triangle BEX_2$ preko osi pa je i on jednakokračan odnosno $\sphericalangle EBP = \sphericalangle PBO$;

4. po poučku o kutovima uz presječnicu usporednih pravaca, $\sphericalangle QBE = \sphericalangle X_1EB$;
5. zbog preslikavanja vrijedi i $\sphericalangle X_1EB = \sphericalangle EPB$;
6. $\sphericalangle QBE + \sphericalangle EBP + \sphericalangle PBO = \alpha$, pa zato $\sphericalangle QBE = \sphericalangle EBP = \sphericalangle PBO = \dfrac{\alpha}{3}$.

Zaključak

U ovom članku smo pokazali nekoliko metoda trisekcije kuta mehaničkim krivuljama, čunjosječnicama i jednom origami metodom koje sve proizlaze iz klasičnog euklidskog okvira.

Literatura

[1] `http://www.2dcurves.com/quartic/quarticco.html`

[2] `http://www.2dcurves.com/spiral/spiralaa.html`

[3] Aliska Gibbings, Lawrence Smolinsky, *Geometric Constructions With Ellipses*.

[4] Julie Fink, Nicholas Molbert, *Sectioning Angles Using Hyperbolic Curves*, Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, vol. 14, br. 1 str. 183–194.

[5] `http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=4872&view=html`

[6] `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Trisecting_an_angle.html`

[7] W. W. Rouse Ball, *Project Gutenberg's Mathematical Recreations and Essays*, 4. izdanje, str. 211.