4. po poučku o kutovima uz presječnicu usporednih pravaca, $\sphericalangle QBE = \sphericalangle X_1EB$;
5. zbog preslikavanja vrijedi i $\sphericalangle X_1EB = \sphericalangle EPB$;
6. $\sphericalangle QBE + \sphericalangle EBP + \sphericalangle PBO = \alpha$, pa zato $\sphericalangle QBE = \sphericalangle EBP = \sphericalangle PBO = \dfrac{\alpha}{3}$.

Zaključak

U ovom članku smo pokazali nekoliko metoda trisekcije kuta mehaničkim krivuljama, čunjosječnicama i jednom origami metodom koje sve proizlaze iz klasičnog euklidskog okvira.

Literatura

[1] http://www.2dcurves.com/quartic/quarticco.html

[2] http://www.2dcurves.com/spiral/spiralaa.html

[3] ALISKA GIBBINGS, LAWRENCE SMOLINSKY, *Geometric Constructions With Ellipses.*

[4] JULIE FINK, NICHOLAS MOLBERT, *Sectioning Angles Using Hyperbolic Curves*, Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, vol. 14, br. 1 str. 183–194.

[5] http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=4872&view=html

[6] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Trisecting_an_angle.html

[7] W. W. ROUSE BALL, *Project Gutenberg's Mathematical Recreations and Essays*, 4. izdanje, str. 211.

Eulerov pentagonalni teorem

Ivica Martinjak [1]

Particija broja $n \in \mathbf{N}_0$ je monotoni niz $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_l \geqslant 0$, $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l$, $l \in \mathbf{N}$. Uvodimo oznaku $\lambda \vdash n$. Broj n nazivamo težina particije, brojevi λ_i, $i = 1, \dots, l$ su dijelovi particije a $l(\lambda) = l$ je duljina particije. Skup svih particija $\lambda \vdash n$ označujemo s $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_n := \{\lambda \vdash n\}$. Istaknuti podskupovi skupa $\mathcal{P}_n$ su skup svih particija $\lambda \vdash n$ s neparnim dijelovima, u oznaci $\mathcal{O}_n$, i skup svih particija $\lambda \vdash n$ s različitim dijelovima $\mathcal{D}_n$. Podskup od $\mathcal{D}_n$ koji sadrži samo particije s parnom duljinom označujemo s $\mathcal{D}_n^{l(\lambda)^e}$. Slično, kada je duljina neparna koristimo oznaku $\mathcal{D}_n^{l(\lambda)^o}$. Uvodimo oznake za kardinalne brojeve ovih skupova, $p(n) := |\mathcal{P}_n|$, $p^o(n) := |\mathcal{O}_n|$, $p^d(n) := |\mathcal{D}_n|$. Nadalje $p^{d,l(\lambda)^e}(n) := |\mathcal{D}_n^{l(\lambda)^e}|$, $p^{d,l(\lambda)^o}(n) := \mathcal{D}_n^{l(\lambda)^o}$. Broj particija $\lambda \vdash n$ s k dijelova označujemo s $p_k(n)$. Definiramo $p(0) := 1$.

Sada ćemo uvedene oznake ilustrirati na primjeru. Skup $\mathcal{P}_5$ sadrži particije

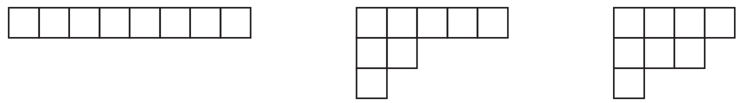
$$(5),\ (4,1),\ (3,2),\ (3,1,1),\ (2,2,1),\ (2,1,1,1),\ (1,1,1,1,1)$$

te vrijedi $p(5) = 7$, $p_3(5) = 2$, $p^d(5) = p^o(5) = 3$, $p^{d,l(\lambda)^o}(5) = 1$, $p^{d,l(\lambda)^e}(5) = 2$.

Particije često prikazujemo pomoću Youngovog dijagrama, kojeg definiramo kao skup parova $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant \lambda_i$. Youngov dijagram reprezentiramo geometrijski u ravnini $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, kao što ilustrira slika 1.

---

[1] Autor je docent na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu; e-pošta: imartinjak@phy.hr



Slika 1. Youngovi dijagrami za particije (8), $(5,2,1)$ *i* $(4,3,1)$, *s težinom* $n=8$.

Ovakva grafička reprezentacija često nam služi za dokazivanje identiteta za particije. Nekoliko tako dokazanih identiteta se može naći u radu [7]. Ovdje, u teoremu 1 vidjet ćemo jednu takvu bijekciju, poznatu pod nazivom Franklinova bijekcija (F. Franklin, 1881.). Zahvaljujući svojoj elementarnosti ta je bijekcija prisutna u mnogim udžbenicima i knjigama iz teorije brojeva, a neki autori navode i da se radi o prvom značajnijem postignuću američke matematike [1].

Prisjetimo se sada pojma pentagonalnih brojeva, prije nego pokažemo kako se oni pojavljuju u Franklinovoj bijekciji kao i kod jedne od funkcija koju je proučavao L. Euler. Brojevi

$$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ 51,\ 70,\ldots,\frac{n(3n-1)}{2},\ldots$$

čine niz pentagonalnih brojeva. Iz općeg člana niza je odmah vidljivo da se pentagonalni broj sastoji od kvadrata i trokutastog broja. Pentagonalni brojevi imaju i niz drugih zanimljivih svojstava. Spomenimo da se svaki prirodni broj može prikazati kao suma pet pentagonalnih brojeva. Neki identiteti za ovaj niz mogu se vidjeti u radu [6] dok se više o reprezentaciji prirodnog broja pomoću pentagonalnih brojeva može vidjeti u [5, 8]. Brojeve

$$2,\ 7,\ 15,\ 26,\ 40,\ 57,\ 77,\ldots,\frac{n(3n+1)}{2},\ldots$$

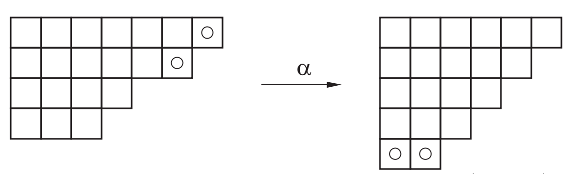
nazivamo refleksije pentagonalnih brojeva. Pentagonalne brojeve i njihove refleksije možemo poredati u jedinstveni niz brojeva koje nazivamo generalizirani pentagonalni brojevi. Neki autori i te brojeve nazivaju jednostavno pentagonalni brojevi (takvu je terminologiju koristio i L. Euler, u radu "De mirabilis proprietatibus numerorum pentagonalium" iz 1783.).

Teorem 1. *Za broj particija* $\lambda \vdash n$ *s različitim dijelovima i parnom duljinom te za broj particija* $\mu \vdash n$ *s različitim dijelovima i neparnom duljinom vrijedi*

$$p^{d,l(\lambda)^e}(n) - p^{d,l(\lambda)^o}(n) = \begin{cases} (-1)^j & \text{ako} \quad n = \dfrac{j(3j \pm 1)}{2} \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{1}$$

gdje je $j = 1, 2, \ldots$

Dokaz. Definiramo preslikavanje $\alpha : \mathcal{D}_n \to \mathcal{D}_n$ na način kako pokazuje slika 2. Dijagonalu Youngovog dijagrama premjestimo tako da je dodamo kao zadnji redak. Novonastala particija ima istu težinu dok joj se parnost broja dijelova promijenila. Analogno vrijedi kada zadnji redak premjestimo na dijagonalu.



Slika 2. Preslikavanje $\alpha : \mathcal{D}_n \to \mathcal{D}_n$ *je bijekcija za* $n \neq \dfrac{j(3j \pm 1)}{2}$, $j = 1, 2, \ldots$

No, ovo preslikavanje nije dobro definirano za svaki n već postoje izuzeci. Označimo broj elemenata na dijagonali sa s. Prvi izuzetak imamo za $s = l(\lambda)$ (što znači da dijagonala i zadnji redak imaju jedan zajednički element). U tom slučaju, ako premjestimo dijagonalu (uključujući zajednički element sa zadnjim retkom), zadnji redak će biti veći od predzadnjeg pa ne bismo poštivali uvjet monotonosti particije. Ova situacija će se dogoditi za dijagrame koji se sastoje od kvadrata i trokutastog broja tj. za pentagonalne brojeve. Dakle, za svaki pentagonalni broj postoji jedna particija za koju α nije dobro definirano. Posljedično, razlika $p^{d,l(\lambda)^e}(n) - p^{d,l(\lambda)^o}(n)$ za takve n će biti 1 ili -1.

Drugi je izuzetak slučaj $l(\lambda) = s + 1$. Naime, ukoliko tada premjestimo dijagonalu tako da je dodamo kao zadnji redak, imali bismo dva jednaka dijela particije (zadnji i predzadnji) pa uvjet međusobno različitih dijelova ne bi bio zadovoljen. Očigledno, ova se situacija događa kod refleksija pentagonalnih brojeva a razmatrana razlika će biti 1 ili -1. □

Kao što je vidljivo u početnom primjeru, za $n = 5$ postoje dvije particije s različitim dijelovima i parnom duljinom te jedna particija s različitim dijelovima i neparnom duljinom, $p^{l(\lambda)^e}(5) - p^{d,l(\lambda)^o}(5) = 2 - 1 = 1$. Za $n = 8$ sve tri particije s međusobno različitim dijelovima i neparnom duljinom prikazuje slika 1, dok s različitim dijelovima i parnom duljinom imamo također tri particije (prepuštamo čitatelju da ih nađe), $p^{d,l(\lambda)^e}(8) - p^{d,l(\lambda)^o}(8) = 0$.

Sada ćemo se, kroz sljedeće dvije propozicije upoznati s funkcijama izvodnicama, koje su važan matematički koncept, posebice u diskretnoj matematici i kombinatorici. L. Euler je istraživao particije pomoću funkcija izvodnica i bio je jedan od pionira u njihovom uvođenju. U propoziciji 1 upoznajemo funkciju izvodnicu $F(x)$ za particije s međusobno različitim dijelovima,

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i).$$

U propoziciji 2 predstavljamo funkciju izvodnicu $G(x)$ za particije iz skupa $\mathcal{P}$,

$$G(x) = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1 - x^i)}.$$

Propozicija 1.

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i) = \sum_{n=0}^{\infty} p^d(n)x^n. \tag{2}$$

Dokaz. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, m\}$. Tada su $(1), \ldots, (m), (1, 2), (1, 3), \ldots, (m - 1, m), (1, 2, 3), \ldots, (m-2, m-1, m), \ldots, (1, 2, \ldots, m)$ sve particije s različitim dijelovima pri čemu su dijelovi iz S. U drugu ruku, te particije očigledno reprezentira umnožak

$$(1 + x)(1 + x^2)\cdots(1 + x^m) = 1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^m + x^{1+2} + \cdots + x^{1+2+\cdots+m}$$

u eksponentima dobivenih članova. Time smo dokazali konačnu varijantu relacije (2) tj. da vrijedi

$$\prod_{i=1}^{m}(1 + x^i) = \sum_{n>0} p'^d(n)x^n,$$

gdje je $p'^d(n)$ broj particija od n s različitim dijelovima pri čemu su ti dijelovi iz skupa S. Kada je $S = \mathbf{N}_0$ eksponenti na desnoj strani relacije će reprezentirati sve moguće particije od n s međusobno različitim dijelovima. □

Propozicija 2.

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^i)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n. \tag{3}$$

Dokaz. Primjenjujemo poznato svojstvo geometrijskog reda $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \dfrac{1}{1-x}$.

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^i)} &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \\ &= (1 + x + x^{1+1} + \cdots)(1 + x^2 + x^{2+2} + \cdots) \cdots (1 + x^n + \cdots) \cdots\end{aligned}$$

Ovaj umnožak daje $p(1)$ kao koeficijent od x, što očigledno dobivamo množenjem x sa svim jedinicama. Koeficijent uz x^2 je $p(2)$, kojeg dobivamo množenjem x^{1+1} sa svim jedinicama kao i množenjem x^2 sa svim jedinicama. Nadalje, koeficijent uz x^3 je $p(3)$ a dobivamo ga množenjem x^{1+1+1} sa svim jedinicama, zatim množenjem x^2, x i svih jedinica kao i množenjem x^3 sa svim jedinicama. Općenito ovaj umnožak generira sve particije za dani n pa na desnoj strani gornje jednakosti dobivamo

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \cdots + p(n)x^n + \cdots \qquad \square$$

Uvodimo oznaku $P(x)$ za sumu na desnoj strani jednakosti (3). Sada ćemo pomoću prethodnih propozicija dokazati teorem 2, koji je jedan od osnovnih teorema u teoriji particija.

Teorem 2. *Broj particija $\lambda \vdash n$ s različitim dijelovima jednak je broju particija $\nu \vdash n$ s neparnim dijelovima,*

$$p^d(n) = p^o(n). \tag{4}$$

Dokaz. Prema propoziciji 1 funkcija izvodnica za particije s različitim dijelovima je $F(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)$. Na osnovi dokaza propozicije 2 zaključujemo da je funkcija izvodnica za particije s neparnim dijelovima $G(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1-x^{2i-1})}$. Naime, ako u dotičnom umnošku izostavimo faktore s neparnim eksponentom tada će dobiveni formalni red reprezentirati particije s neparnim dijelovima.

Sada imamo

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots} \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2i-1})}.\end{aligned}$$

$\square$

Iskažimo teorem 2 i pomoću funkcija izvodnica,

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2i-1})}. \tag{5}$$

Propozicija 3.

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+zx^i) = \sum_{n\geqslant 0} \sum_{m\geqslant 0} p_m^d(n) z^m x^n. \tag{6}$$

Propoziciju 3 navodimo bez formalnog dokaza budući da se radi o izravnoj posljedici propozicije 1. Naime, koristimo li funkciju izvodnicu s dvije varijable, eksponent varijable z će predstavljati broj množenja pripadnog člana. Drugim riječima, ti će eksponenti reprezentirati duljine particija pripadnih težina. Propoziciju 3 možemo iskazati i na način

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+zx^i)=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} z^{l(\lambda)}x^{|\lambda|}.$$

Razmotrimo sada jedan od polinoma koji je Euleru privukao pažnju, $\psi_n(x)$,

$$\psi_n(x):=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n).$$

Pogledamo li ovakve polinome za prvih nekoliko vrijednosti n,

$$\begin{aligned}
\psi_1(x)&=1-x\\
\psi_2(x)&=1-x-x^2+x^3\\
\psi_3(x)&=1-x-x^2+x^4+x^5-x^6\\
\psi_4(x)&=1-x-x^2+2x^5-x^8-x^9+x^{10}\\
\psi_5(x)&=1-x-x^2+x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}+x^{13}+x^{14}-x^{15}
\end{aligned}$$

možemo naslutiti neka vrlo lijepa svojstva. Kao prvo, mnogi članovi se pokrate. Također, kako n raste koeficijenti postaju "stabilni" tj. polinomi $\psi_{m+1}(x)$, $\psi_{m+2}(x),\ldots$ imaju iste koeficijente uz x^m. To je motivacija za definiranje funkcije $\psi(x)$ na način

$$\psi(x):=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n), \tag{7}$$

poznate i pod nazivom Eulerova funkcija. Pogledamo li prvih nekoliko članova u razvoju $\psi(x)$,

$$\begin{aligned}
\psi(x)=1&-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}\\
&+x^{57}-x^{70}-x^{77}+x^{92}+x^{100}\cdots
\end{aligned}$$

među eksponentima ćemo prepoznati pentagonalne brojeve i njihove refleksije.

Teorem 3. (Eulerov pentagonalni teorem)

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}(-1)^r x^{\frac{3r^2+r}{2}}. \tag{8}$$

Dokaz. Kada u identitet iskazan u propoziciji 3 uvrstimo $z=-1$ dobivamo

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m\geqslant 0} p_m^d(n)(-1)^m x^n.$$

Unutrašnju sumu sada možemo podijeliti na particije s parnim i one s neparnim brojem dijelova. Imajući k tome u vidu da sumiranje $p_m^d(n)$ po svim duljinama m daje broj particija s različitim dijelovima $p^d(n)$, dobivamo

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)=\sum_{n\geqslant 0}(p^{d,l(\lambda)^e}(n)-p^{d,l(\lambda)^o}(n))x^n.$$

Time je dobivena kombinatorna interpretacija lijeve strane Eulerovog identiteta (8). Dakle, $\psi(x)$ je funkcija izvodnica za particije s međusobno različitim dijelovima pri čemu je duljina particije parna odnosno neparna.

Sada koristimo činjenicu da je ta razlika 0 za sve brojeve osim za pentagonalne i njihove refleksije (teorem 1) te time zaključujemo dokaz. $\square$

Pogledajmo neke posljedice Eulerovog pentagonalnog teorema kao i Franklinove bijekcije. Promotrimo li pažljivije preslikavanje α, zapažamo da ono dokazuje još jednu tvrdnju o parnosti dijelova particija iz skupa $\mathcal{D}_n$. Ta je tvrdnja poznata pod nazivom Fineov teorem (N. J. Fine, 1948), a dajemo je u korolaru 1.

Za najveći dio particije $\lambda \vdash n$ uvodimo oznaku $g(\lambda)$. Podskup od $\mathcal{D}_n$ koji sadrži particije kod kojih je $g(\lambda)$ paran označujemo s $\mathcal{D}_n^{g(\lambda)^e}$. Slično, kada je $g(\lambda)$ neparan koristimo oznaku $\mathcal{D}_n^{g(\lambda)^o}$. Oznake za kardinalne brojeve tih skupova jesu $p^{d,g(\lambda)^e}(n)$ i $p^{d,g(\lambda)^o}(n)$.

Korolar 1. *Za broj particija $p^{d,g(\lambda)^e}(n)$ s međusobno različitim dijelovima pri čemu je najveći dio paran i broj particija $p^{d,g(\lambda)^o}(n)$ s međusobno različitim dijelovima pri čemu je najveći dio neparan vrijedi*

$$p^{d,g(\lambda)^e}(n) - p^{d,g(\lambda)^o}(n) = \begin{cases} (-1)^j & \text{ako} \quad n = \dfrac{j(3j \pm 1)}{2} \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{9}$$

gdje je $j = 1, 2, \ldots$

Korolar 1 očigledno vrijedi budući da α mijenja parnost najvećem dijelu particije.

Ilustrirajmo sada iskazane tvrdnje na primjeru kojeg prikazuje sljedeća tablica.

$\mathcal{D}_{12}^{l(\lambda)^e}$	$\mathcal{D}_{12}^{l(\lambda)^o}$	$\mathcal{D}_{12}^{g(\lambda)^e}$	$\mathcal{D}_{12}^{g(\lambda)^e}$
$(11,1)$	(12)	(12)	$(11,1)$
$(10,2)$	$(9,2,1)$	$(10,2)$	$(9,3)$
$(9,3)$	$(8,3,1)$	$(8,4)$	$(9,2,1)$
$(8,4)$	$(7,4,1)$	$(8,3,1)$	$(7,5)$
$(7,5)$	$(7,3,2)$	$(6,5,1)$	$(7,4,1)$
$(6,3,2,1)$	$(6,5,1)$	$(6,4,2)$	$(7,3,2)$
$(5,4,2,1)$	$(6,4,2)$	$(6,3,2,1)$	$(5,4,3)$
	$(5,4,3)$		$(5,4,2,1)$

Dakle, $p^{d,l(\lambda)^e}(12) - p^{d,l(\lambda)^o}(12) = 7 - 8 = -1$ kako i proizlazi iz teorema 3. Dalje imamo $p^{d,g(\lambda)^e}(12) - p^{d,g(\lambda)^o}(12) = 7 - 8 = -1$ kao što i slijedi prema Fineovom teoremu (korolar 1).

Korolar 2. $P(x)\psi(x) = 1$.

Korolar 2 slijedi izravno iz propozicije 2 i definicije (7). Možemo ga pisati i u formi

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^i) = 1. \tag{10}$$

Iz izraza (10) odmah dobivamo lijepu rekurziju

$$\begin{aligned} &p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) \\ &+ \cdots + (-1)^j p\Big(n - \frac{3j^2 - j}{2}\Big) + (-1)^j p\Big(n - \frac{3j^2 + j}{2}\Big) \cdots = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$j = 1, 2, \ldots$, koja nam omogućuje računanje vrijednosti za particijsku funkciju. Za primjer, sada možemo ponovo odrediti $p(5)$, ovaj puta pomoću rekurzije (11),

$$p(5) = p(4) + p(3) - p(0) = 5 + 3 - 1 = 7.$$

Na kraju, spomenimo da je Eulerova funkcija $\psi(x)$ važna ne samo u teoriji particija nego se javlja i u drugim područjima matematike uključujući kompleksnu analizu. Eulerov pentagonalni teorem se može dokazati i na druge načine. Kako ga je dokazo sam L. Euler prikazan je u radovima [1, 3]. Kratak dokaz ovog teorema daje nam Jacobijev identitet trostrukog produkta [2]. Zanimljive su i posljedice Eulerovog pentagonalnog teorema. Njegovom primjenom se mogu dokazati neke od Ramanujanovih kongruencija [9]. U radu [8] se pomoću Eulerovog pentagonalnog teorema dokazuju daljnje tvrdnje vezane uz činjenicu da se svaki prirodni broj može izraziti kao suma tri broja koji su pentagonalni brojevi ili njihove refleksije.

Zahvale

Autor se zahvaljuje profesorima Tomislavu Došliću i Dragutinu Svrtanu sa Sveučilišta u Zagrebu, na vrijednim savjetima u vezi ove teme.

Literatura

[1] G. E. Andrews, *Euler's Pentagonal Number Theorem*, Math. Mag., 56/ 5, 279–284, 1983.

[2] G. E. Andrews, K. Eriksson, *Integer partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

[3] J. Bell, *A summary of Euler's work on the pentagonal number theorem*, Arch. Hist. Exact Sci., 64/ 3, 301–373, 2010.

[4] D. Fuchs and S. Tabachnikov, *Mathematical Omnibus. Thirty Lectures on Classic Mathematics*, AMS, 2007.

[5] R. Guy, *Every Number Is Expressible as the Sum of How Many Polygonal Numbers?*, American Mathematical Monthly, 101, 169–172, 1994.

[6] R. T. Hansen, *Arithmetic of pentagonal numbers*, Fibonacci Quart., 8/ 1, 83–87, 1970.

[7] I. Martinjak, *O Eulerovom teoremu o particijama*, Osječki matematički list, 15 (2), 2015.

[8] X. J. Sun, *On Sums of Three Pentagonal Numbers*, American Mathematical Monthly, 123 (2), 189–191, 2016.

[9] B. C. Berndt, C. Gugg, S. Kim, *Ramanujan's Elementary Method in Partition Congruences, Partitions, q-Series, and Modular Forms*, Springer, 13–21, 2012.