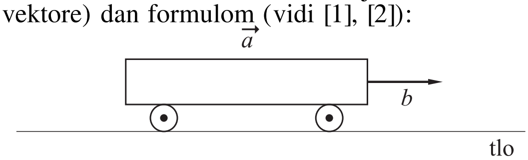
Što je geometrijsko značenje relativističkog zbrajanja brzina?

Darko Veljan[1]

Brzina kojom Ana trči kroz vagone vlaka (u smjeru kretanja vlaka) s obzirom na vlak je a; brzina vlaka s obzirom na tlo je jednaka b (slika 1). Kojom brzinom se Ana giba s obzirom na tlo? Do 1905. odgovor bi, prema Galileju, bio $a+b$. Ali nakon Einsteina i Poincaréa znamo da je relativistički zbroj u jednoj dimenziji (za paralelne vektore) dan formulom (vidi [1], [2]):

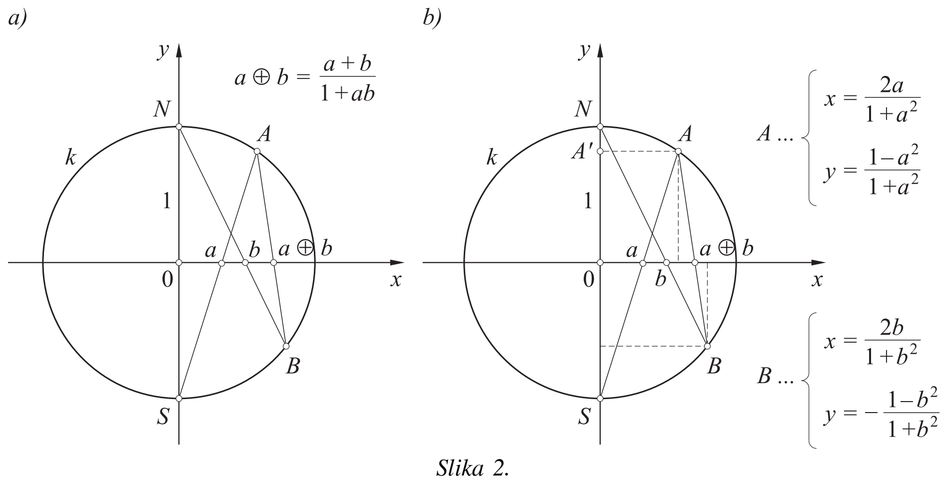


Slika 1.

$$a \oplus b = \frac{a+b}{1+ab}. \qquad (1)$$

Što je jednostavno geometrijsko značenje od $a \oplus b$? U člacima [2] i [3] su dana objašnjenja, dokazi, poopćenja i literatura. Na slici 2a je jednostavni (Kocikov) dijagram kojim se objašnjava geometrijska konstrukcija formule (1), a na slici 2b uz par formula i dokaz.

Geometrijska konstrukcija (slika 2a) od $a \oplus b$ je sljedeća. Nanesimo od ishodišta O na pozitivni dio x-osi duljine a i b koje predstavljaju brzine a i b. Povucimo pravac kroz "sjeverni pol" $N(0,1)$ jedinične kružnice k i točku $(b,0)$ i pravac kroz "južni pol" $S(0,-1)$ i točku $(a,0)$ te njihova sjecišta s kružnicom k ... $x^2+y^2=1$ označimo s B i A. Pravac AB siječe x-os u točki $(a \oplus b, 0)$.



Slika 2.

Zaista, na slici 2b ćemo izračunati koordinate točke $A(x,y)$. Naime, iz sličnosti slijedi

$$\frac{a}{1} = \frac{x}{1+y}$$

pa kvadriranjem dobivamo

[1] Autor je redoviti profesor u miru s Matematičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu;
e-pošta: `darko.veljan@gmail.com`

$$a^2 = \frac{x^2}{(1+y)^2} = \frac{1-y^2}{(1+y)^2} = \frac{1-y}{1+y},$$

a odavde $y = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$ i $x = \dfrac{2a}{1+a^2}$, tj. $A\left(\dfrac{2a}{1+a^2}, \dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$.

Simetrijom se slično dobije za točku B, tj. $B\left(\dfrac{2b}{1+b^2}, -\dfrac{1-b^2}{1+b^2}\right)$.

Jednadžba pravca kroz točke A i B je

$$y = \frac{1+ab}{a-b}x - \frac{a+b}{a-b}.$$

Uvrstimo li $y=0$, dobijemo njegov presjek s x-osi $\left(\dfrac{a+b}{1+ab}, 0\right)$, čime smo potvrdili formulu (1).

Ustvari, Poincaréova formula (1) podsjeća na formulu za tangens zbroja:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

To je koristio i L. Carnot 1803. kad je rješavao stari Papusov problem da se u zadanu kružnicu upiše trokut čije stranice (u produžetku) prolaze kroz zadane tri točke. O tome možete više naći u [3].

Za vježbu se uvjerite:

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{4} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2} \oplus \frac{2}{3} = \frac{7}{8}, \quad \frac{4}{5} \oplus \frac{5}{6} = \frac{49}{50},$$

$$a \oplus 1 = 1, \quad a \oplus (-1) = -1, \quad a \oplus b = b \oplus a, \quad a \oplus 0 = a, \quad 3 \oplus \frac{1}{2} = \frac{7}{5}, \ldots$$

Razmišljajte o slaganju brzina raznih smjerova!

Hrvatski matematičar i teorijski fizičar Vladimir Varićak (1865.–1942.) je uz H. Minkowskog, nakon fundamentalnog Einsteinovog rada iz 1905. među prvima dokazao vezu između specijalne teorije relativnosti i neeuklidske geometrije. Uveo je pojam "pseudobrzine", kasnije "rapidnost" u formuli $v = c\,\mathrm{th}(u)$, gdje je v brzina kretanja ("velocity"), a c konstantna brzina svjetlosti. Formula (1) tada postaje naprosto zakon za zbrajanje funkcija tangens hiperbolni th (uz konvenciju $c=1$). Sada možemo reći da je specijalna (posebna) teorija relativnosti, odnosno teorija invarijantnosti kako ju je Einstein prvotno htio zvati, u dimenziji 1, tj. u 1D, zapravo geometrija Lobačevskog na pravcu, a u 2D i 3D redom geometrija ravnine, odnosno, prostora Lobačeskog. Dakle, da bismo bolje razumjeli teoriju relativnosti treba učiti geometriju! Više o tome vidi u [4]. Inače, akademik V. Varićak je bio profesor Mudroslovnog (od 1926. Filozofskog) fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Njegovi se glavni radovi citiraju i danas.

Literatura

[1] D. Blanuša, *Teorija relativnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2003. (pretisak iz 1955.).

[2] J. Kocik, *Geometric diagram for relativistic addition of velocities*, Amer. J. Physics 80 (2012), 737–739.

[3] G. Wanner, *From Papus to Kocik's diagram for relativistic velocity addition*, Elemente der Math. 72 (2017), 35–38.

[4] V. V. Prasolov, V. M. Tikhomirov, *Geometry*, AMS, Providence, R. I., 2001.