doc. dr. sc. Margareta Gardijan Kedžo
Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Republika Hrvatska
mgardijan@efzg.hr

doc. dr. sc. Vedran Kojić
Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Republika Hrvatska
vkojic@efzg.hr

Marina Slišković, mag. math.
Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Republika Hrvatska
msliskovic@efzg.hr

FARKASEVA LEMA: ELEMENTARNI DOKAZ I EKONOMSKE PRIMJENE

Primljeno: 11. veljače 2019.
Prihvaćeno: 15. srpnja 2019.

Stručni rad

Sažetak

U ovom radu dajemo elementarni dokaz Farkaseve leme. U matematici je Farkaseva lema vrlo bitna činjenica koja se koristi u teoriji optimizacije, primjerice u izvođenju Karush-Khun-Tuckerovih uvjeta optimalnosti u slučaju ograničenja u obliku nejednakosti kod nelinearnog programiranja, te u dokazivanju dualnih teorema za linearno programiranje. Iako je Farkasevu lemu vrlo jednostavno iskazati, njezin dokaz nije trivijalan (većina postojećih dokaza se temelji na netrivijalnim rezultatima iz područja optimizacije i (linearne) algebre), o čemu govori i podatak da su ju mnogi na različite načine dokazivali još prije 1972. pa sve do danas, nadmećući se pritom tko će ponuditi jednostavniji dokaz. U ovom radu Farkasevu lemu dokazujemo na elementaran način koristeći matematičku indukciju. Dokaz ove leme matematičkom indukcijom je poznat u stranoj, ali ne i u domaćoj literaturi. Stoga je cilj ovog rada revidirati taj dokaz, ispraviti postojeće nedostatke i pogreške, te detaljno objasniti svaku stavku dokaza, ne koristeći pritom složene termine i činjenice iz područja optimizacije i algebre. Osim samog dokaza Farkaseve leme, navodimo i njezine dvije primjene u ekonomiji, čime želimo, s jedne strane, približiti i objasniti Farkasevu lemu na razumljiv način čitateljima koji po svom obrazovanju nisu matematičari, ali ju koriste u svom *radu, te s druge strane doprinijeti razumijevanju samog iskaza Farkaseve leme kroz konkretne primjere.*

Ključne riječi: *Farkaseva lema, matematički dokaz, matematička indukcija, financijsko modeliranje, teorija igara*

JEL: C690, C700, G10

1. UVOD

Gyula Farkas je rođen 28. ožujka 1847. godine u mjestu Pusztasárosd (danas Sárosd) pokraj jezera Balaton u Mađarskoj. Njegov znanstveni doprinos ogleda se u području iz fizike, ali i iz matematike. Osim prema znanstvenoj karijeri, Farkas je pokazivao ljubav i prema glazbi, kojoj se posvetio kasnije u životu. Napisao je nekoliko članaka o glazbi, svirao je klavir te je čak i nastupao izvan granica Mađarske (Gurka 2011). Ipak, najveći dio života posvetio je izučavanju fizikalnih problema, te njihovim matematičkim uporištima. Bio je ugledni profesor na katedrama za fiziku i matematiku Sveučilišta u Kolozsváru, a 1898. godine je imenovan članom Mađarske akademije znanosti.

Osnovno načelo o homogenim linearnim nejednakostima postalo je dio povijesti matematike pod nazivom Farkasev teorem. Albert W. Tucker je to načelo ponovno otkrio u pedesetim godinama 20. stoljeća te ga iskoristio u svojim dokazima (Prékopa 1999). Kasnije je Farkas prepoznat kao preteča nekoliko područja moderne znanosti (poput linearnog programiranja, optimizacije u matematici, optimizacije u ekonomiji). Jedna od novijih sinteza povijesti matematike navodi kako je Farkasev teorem jedan od najvažnijih rezultata koji su prethodili linearnom programiranju (Brentjes 1994). Posljednjih petnaest godina života Farkas je proveo u Budimpešti, gdje je i umro 27. prosinca 1930. godine.

Farkasev teorem, ili Farkaseva lema, kao matematička činjenica koja ima svoje fizikalno uporište, ima i svoje primjene u ekonomiji. Osim ekonomskih primjena, u ovom radu donosimo i detaljno objašnjen dokaz same Farkaseve leme. Struktura rada je sljedeća. Nakon uvoda, u drugom poglavlju navodimo iskaz Farkaseve leme te njezine ekvivalentne varijante. U trećem poglavlju govorimo o matematičkoj indukciji kao metodi za dokazivanje raznih matematičkih tvrdnji, pomoću koje, potom, na elementaran način dokazujemo Farkasevu lemu. U četvrtom i petom poglavlju su iznijete primjene Farkaseve leme u području financijskog modeliranja i teoriji igara. Konačno, u zadnjem, šestom poglavlju, su dana zaključna razmatranja.

2. ISKAZ FARKASEVE LEME I GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

Farkaseva lema se može iskazati na više načina koji su međusobno ekvivalentni (vidjeti, primjerice, Jaćimović 2011 ili Jukić 2015). Ovdje ćemo navesti dva iskaza i dati odgovarajuću geometrijsku interpretaciju Farkaseve leme.

Tvrdnja 2.1. Neka je A matrica reda $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ vektor. Tada od dvaju sustava nejednadžbi

$$A\lambda=\boldsymbol{b},\ \lambda\geq 0,\ \lambda\in\mathbb{R}^r \tag{1}$$

i

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{s}\geq 0,\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{s}<0,\ \boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^n \tag{2}$$

samo jedan ima rješenje.

Ovaj iskaz je preuzet iz Neralić (2008). Drugi iskaz navodimo prema Jaćimović (2011).

Tvrdnja 2.2. Neka je $A\in\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ i neka je $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$. Tada ili

$$\textbf{postoji } \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x}\geq 0 \textbf{ t.d. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \tag{3}$$

ili

$$\textbf{postoji } \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m \textbf{ t.d. } \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{z}\leq 0 \textbf{ i } \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{z}>0\,. \tag{4}$$

Uočimo da je (4) ekvivalentno s

$$\textbf{postoji } \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m \textbf{ t.d. } \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{z}\geq 0 \textbf{ i } \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{z}<0\,.^{1} \tag{4'}$$

Očito je da (3) i (4) ne mogu istovremeno vrijediti. Naime, kada bi (3) i (4) istovremeno vrijedili, onda bismo imali

$$0<\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{z}=(A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{z}=\underbrace{\boldsymbol{x}^T}_{\geq 0}\underbrace{\left(A^T\boldsymbol{z}\right)}_{\leq 0}\leq 0\Rightarrow 0<0\,, \tag{5}$$

[1] Primijetimo da su x iz (3) i A^Tz iz (4') n-komponentni vektori, ili matrice-stupci čiji su elementi nenegativni realni brojevi, dok je b^Tz iz (4') skalarni umnožak vektora b i z, odnosno broj čija je vrijednost negativna.

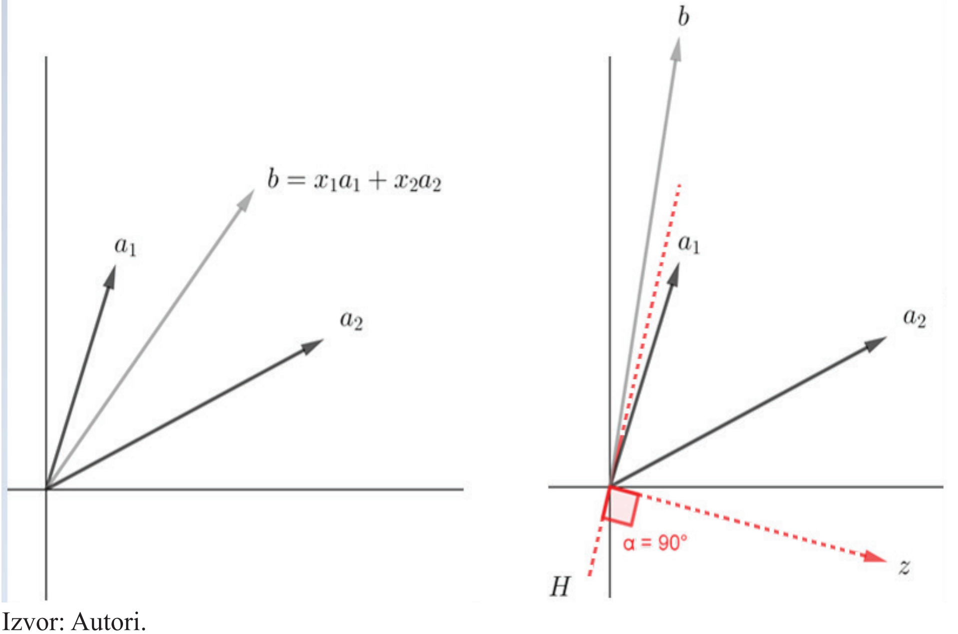
što je očito kontradikcija. Ako Farkasevu lemu iskažemo u varijanti „ili (3) ili (4')“, imamo sljedeću geometrijsku interpretaciju (Jukić 2015):

Neka je $\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\right) \subseteq \mathbb{R}^m$ konus generiran vektor stupcima matrice A, to jest vektorima $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$, te $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Tada je ili

(a) $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\right)$, to jest b se može prikazati kao linearna kombinacija stupaca matrice A s nenegativnim koeficijentima, ili je

(b) $\boldsymbol{b} \notin \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\right)$, to jest postoji hiperravnina H s vektorom normale z koja razdvaja konus $\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\right)$ i vektor b (vidjeti sliku 1).

Slika 1: Geometrijska interpretacija tvrdnje 2.2. u slučaju n=2.



Izvor: Autori.

Uočimo da su tvrdnje 2.1. i 2.2. ekvivalentne (dokaz o ekvivalentnosti je trivijalan i prepuštamo ga čitatelju). Napomenimo da se Farkaseva lema može iskazati i na sljedeći način:

Tvrdnja 2.3. Neka je $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ i neka je $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Tada ili

$$\textbf{postoji } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{x} \geq 0 \textbf{ t.d. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \tag{5'}$$

ili

$$\textbf{postoji } \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{z} \geq 0 \textbf{ t.d. } \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{z} \geq 0 \textbf{ i } \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{z} < 0 . \tag{5''}$$

Napomenimo da Tvrdnja 2.3. slijedi direktno primjenom tvrdnje 2.2. za matricu $\boldsymbol{A}' = \left[\boldsymbol{A} \middle| \boldsymbol{I}\right] \in \boldsymbol{M}_{m\times(n+m)}$ i neki nenegativan vektor $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$ s $n+m$ koordinata.

3. ELEMENTARNI DOKAZ FARKASEVE LEME PRIMJENOM MATEMATIČKE INDUKCIJE

U ovom radu Farkasevu lemu, iskazanu u prethodnom poglavlju kao Tvrdnja 2.1., Tvrdnja 2.2. i Tvrdnja 2.3. (koje su sve međusobno ekvivalentne), dokazujemo matematičkom indukcijom. Najprije ćemo na nekoliko primjera objasniti princip matematičke indukcije.

3.1. O matematičkoj indukciji

Matematička indukcija je iznimno moćan alat kojim se mogu dokazivati mnoge tvrdnje iz područja diskretne matematike, ali i iz drugih područja kako teorijske matematike, tako i primijenjene matematike. U ovom odjeljku ćemo posebno istaknuti i ilustrirati kako se matematička indukcija koristi u dokazivanju nekih važnih formula i činjenica u financijskoj matematici. Zna se da su neke verzije principa matematičke indukcije poznate još iz vremena prije Krista (Acerbi 2000), no zasigurno možemo reći da se princip matematičke indukcije kakvog znamo danas počeo primjenjivati još u 18. stoljeću, o čemu govori i podatak kako je primjenom matematičke indukcije Goldbach[2] dokazao da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva (to su brojevi koji su djeljivi samo s jedinicom i samim sobom) (Acerbi 2000).

Postoji nekoliko verzija matematičke indukcije. Ovdje ćemo navesti dvije verzije principa matematičke indukcije, koje ćemo potom ilustrirati na zanimljivim primjerima.

Princip *osnovne matematičke indukcije* je najlakši za objasniti i shvatiti. Tri su osnovna elementa ovog principa: *baza indukcije*, *pretpostavka indukcije* i *korak indukcije*. Pretpostavimo da želimo dokazati da neka tvrdnja $T(n)$, koja ovisi o n,

[2] Christian Goldbach (1690.–1764.), Njemačka – Rusija

vrijedi za sve brojeve *n* iz skupa $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$, to jest da vrijedi za sve prirodne brojeve *n*. Pomoću matematičke indukcije to radimo na način da

> (*i*) prvo provjerimo bazu indukcije, to jest pokažemo da tvrdnja *T* vrijedi za prvi prirodni broj, odnosno dokažemo *T*(1),
>
> (*ii*) zatim pretpostavimo da tvrdnja *T* vrijedi za neki *k*=*n* prirodan broj, to jest da vrijedi *T*(*n*), što se naziva pretpostavka indukcije,
>
> (*iii*) a potom pokažemo da tvrdnja *T* vrijedi i za sljedeći prirodan broj *k*=*n*+1, to jest da vrijedi *T*(*n*+1). Drugim riječima, dokazujemo korak indukcije.

Na kraju, nakon što smo dokazali korak indukcije (*iii*), možemo zaključiti da po principu matematičke indukcije, tvrdnja *T* vrijedi za svaki prirodan broj.

U svrhu boljeg razumijevanja, ilustrirajmo princip (osnovne) matematičke indukcije na primjeru niza padajućih domina. Naime, zamislimo da imamo niz od $n\in\mathbb{N}$ domina koje su poredane jedna do druge, te da želimo dokazati tvrdnju koja glasi: „Ako prvom dominom srušimo drugu dominu, tada će svih *n* domina u nizu pasti." Dakle, u ovom slučaju, tvrdnja pod navodnim znacima je naša tvrdnja *T*. Baza indukcije bi u ovom slučaju glasila da ako prvom dominom srušim drugu, tada će sve domine u nizu pasti, što je u ovom slučaju točno jer je *n*=2, odnosno imamo samo dvije domine u nizu i obje domine padaju. Sada je lako vidjeti da, ako prvom dominom srušimo drugu, druga će treću, treća će četvrtu i tako dalje (uočimo da ovaj proces predstavlja korak indukcije), na kraju će se sve domine srušiti, što predstavlja istinitost naše tvrdnje *T*.

Drugi vid dokazivanja matematičkom indukcijom se naziva princip *jake matematičke indukcije*. Isto kao i osnovna, i jaka matematička indukcija ima bazu, pretpostavku te korak indukcije. Razlika je u pretpostavci, koja kod jake matematičke indukcije glasi (usporediti s (*ii*)):

(*ii'*) zatim pretpostavimo da tvrdnja *T* vrijedi za sve prirodne brojeve $k<n$, to jest za brojeve 1, 2, 3, …, *n*–1, odnosno da vrijedi *T*(1), *T*(2), *T*(3), …, *T*(*n*–1).

Sada ćemo na nekoliko primjera ilustrirati primjenu principa matematičke indukcije.

Primjer 3.1. Dokažimo da je zbroj prvih *n* prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)}{2}$.

***Rješenje*:** Ovaj problem se vrlo elegantno može riješiti primjenom Gaussove[3] dosjetke (Dakić n.a.), no ovdje ćemo dati dokaz primjenom (osnovne) matematičke indukcije po *n*.

(*i*) Za *k*=1 tvrdnja vrijedi jer je $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$, čime smo provjerili bazu indukcije.

(*ii*) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj *k*=*n*, to jest da vrijedi

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

(*iii*) i dokažimo da tvrdnja vrijedi i za sljedeći prirodan broj *k*=*n*+1, to jest da vrijedi

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Naime, zbog pretpostavke indukcije (*ii*) imamo

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}_{(ii)}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$
$$=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

što smo i trebali dokazati. Dakle, po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj. **Q.E.D.**

Primjer 3.2. Dokažimo da je poštanskim markama vrijednosti 3 kune i 5 kuna moguće platiti svaku poštarinu čija je vrijednost cjelobrojna i koja nije manja od 8 kuna.

***Rješenje*:** Uočimo da se problem zapravo svodi na to da pokažemo kako se svaki prirodan broj koji nije manji od 8 može rastaviti na zbroj *trojki* i *petica*. Primjerice, 8=5+3, 9=3+3+3, 10=5+5, 11=3+3+5, 12=3+3+3+3, 13=3+5+5 i tako dalje. Kako bismo pokazali ovu tvrdnju za sve prirodne brojeve $n\geq 8$, poslužit ćemo se matematičkom indukcijom.

(*i*) Bazu indukcije smo već provjerili za brojeve 8, 9, 10, 11, 12 i 13.

(*ii*) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki broj *k*=*n*,

(*iii*) i dokažimo da tvrdnja vrijedi i za sljedeći broj *k*=*n*+1. Naime, razlikujemo dva slučaja:

[3] Carl Friedrich Gauss (1777.–1855.), Njemačka

broj n u svom rastavu na trojke i petice ima barem jednu peticu, i

broj n u svom rastavu ima samo trojke.

Ako vrijedi prvi slučaj, onda u broju n+1 obrišemo jednu peticu i broj 1 i zamijenimo ih s dvije trojke (recimo 14=3+3+3+5, pa je 15=14+1=3+3+3+($\cancel{5}+\cancel{1}$)=3+3+3+3+3). Ako vrijedi drugi slučaj, onda u rastavu broja n+1 mora biti minimalno tri trojke u zapisu broja n (jer je n+1 veći od 9), pa obrišemo tri trojke i broj 1 i zamijenimo ih s dvije petice (recimo 14=3+3+3+5, pa je 15=14+1=$\cancel{3}+\cancel{3}+\cancel{3}$+5+$\cancel{1}$=5+5+5). Ovim smo dokazali korak indukcije. Po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj $n \geq 8$. **Q.E.D.**

Primjer 3.3. Dokažimo da vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja, uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po složenom kamatnom računu, uz fiksnu kamatnu stopu p u svakom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi

$$C_n = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = C_0 r^n,$$

gdje je r dekurzivni kamatni faktor (vidjeti Neralić i Šego 2009).

Rješenje: Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

(i) Za k=1 tvrdnja vrijedi jer su kamate za prvo (jedinično) razdoblje $I_1 = \frac{C_0 p}{100}$, pa je

$$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + \frac{C_0 p}{100} = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right) = C_0 r. \tag{11}$$

(ii) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj k=n, to jest da vrijedi $C_n = C_0 r^n$,

(iii) te dokažimo tvrdnju za sljedeći prirodan broj k=n+1, to jest pokažimo da vrijedi $C_{n+1} = C_0 r^{n+1}$. Naime,

$$C_{n+1} = C_n + I_{n+1} = C_n + \frac{C_n p}{100} = C_n\left(1+\frac{p}{100}\right) = C_n r \overset{(ii)}{=} C_0 r^n r = C_0 r^{n+1}, \tag{12}$$

što smo i trebali dokazati. Po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n. **Q.E.D.**

3.2. Dokaz Farkaseve leme

Farkaseva lema se može iskazati na više načina, kako smo već vidjeli u prethodnom poglavlju (vidjeti tvrdnje 2.1., 2.2. i 2.3.). Shodno tome, treba naglasiti kako je Farkaseva lema kroz povijest dokazana na različite načine, pri čemu se težilo prezentiranju što jednostavnijeg i elegantnijeg dokaza (vidjeti primjerice Bartl 2008, Bartl 2012a, Bartl 2012b, Brentjes 1994, Jaćimović 2011, Jukić 2015, Mangasarian 1969, Marjanović 1972, Simonnard 1966, Svanberg 2008). Međutim, većina tih dokaza su temeljena na netrivijalnim činjenicama iz teorije optimizacije, nelinearnog programiranja, topologije ili (linearne) algebre. Posebice je u nekoliko radova naglašeno kako se Farkaseva lema može elegantno i jednostavno dokazati u okviru (linearne) algebre (vidjeti Bartl 2008, Bartl 2012a, Bartl 2012b), no to nije u potpunosti točno jer dani dokazi podrazumijevaju poznavanje pojmova poput linearnih operatora nad određenim vektorskim prostorima, matrično prikazivanje linearnih preslikavanja i slično, što svakako nije pogodno za čitatelja koji linearnu algebru poznaje u terminima matričnog računa. Upravo zbog toga ćemo sada dokazati Farkasevu lemu u terminima matričnog računa, te primjenom matematičke indukcije, nadajući se pritom da će ovaj dokaz biti razumljiv svim čitateljima koji koriste Farkasevu lemu u svom radu, a po osnovnom obrazovanju nisu matematičari. Posebno ističemo da bi ovaj dokaz mogao biti od velike koristi studentima ekonomije ili drugih primijenjenih znanosti, kako bi lakše razumjeli ispitno gradivo raznih kolegija poput Linearno i nelinearno programiranje, Operacijska istraživanja, Teorija igara, Financijsko modeliranje i drugih. Također, napominjemo da dokaz koji slijedi je preuzet iz (Jaćimović 2011). Ipak, naša prezentacija dokaza je popraćena detaljnim objašnjenjima te ispravcima grešaka koje Jaćimović ima u svom radu. Kako su tvrdnje 2.1., 2.2. i 2.3. međusobno ekvivalentne, slijedi dokaz Farkaseve leme koja je iskazana kao tvrdnja 2.2.

***Dokaz tvrdnje 2.2.*:** Dokaz provodimo po $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, odnosno po broju stupaca matrice $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(*i*) Za *n*=1 je $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \in \mathrm{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$, pa sustavi (3) i (4) prelaze u sljedeći oblik:

ili

$$\textbf{postoji } \boldsymbol{x} \geq 0 \textbf{ t.d. } \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m\right)$$

ili

$$\textbf{postoji } \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m \textbf{ t.d. } \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{z} \rangle \leq 0 \textbf{ i } \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{z} \rangle > 0,^4$$

4 Oznaka $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ predstavlja skalarni umnožak vektora x i y. Istovjetan zapis je $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$, to jest $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$.

što je, prema Jaćimović (2011) očigledno. Ipak, detaljniji dokaz ove tvrdnje dajemo u Dodatku 1.

(*ii*) Pretpostavimo da tvrdnja 2.2. vrijedi za neki $n>1$,

(*iii*) i dokažimo da za m-komponentne vektore $a^1, a^2, \ldots, a^{n+1}$ ili

(I) postoje nenegativni realni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ takvi da je $b=x_1a^1+\ldots+x_na^n+x_{n+1}a^{n+1}$

ili

(II) postoji $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m$ tako da vrijedi $\langle \boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{z}\rangle\le 0$, …, $\langle \boldsymbol{a}^n,\boldsymbol{z}\rangle\le 0$, $\langle \boldsymbol{a}^{n+1},\boldsymbol{z}\rangle\le 0$, $\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{z}\rangle> 0$.

Prema pretpostavci indukcije, imamo da ili (i) postoje nenegativni realni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takvi da je $b=x_1a^1+\ldots+x_na^n$ ili (ii) postoji $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m$ takav da je $\langle \boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{z}\rangle\le 0$, …, $\langle \boldsymbol{a}^n,\boldsymbol{z}\rangle\le 0$, $\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{z}\rangle> 0$. U slučaju (i) dovoljno je staviti $x_{n+1}=0$ i dobit ćemo da je **(I)** točno. U slučaju (ii), imamo dvije mogućnosti: ako je $\langle \boldsymbol{a}^{n+1},\boldsymbol{z}\rangle\le 0$ odmah imamo da je **(II)** točno. S druge strane, ostaje nam razmotriti mogućnost da postoji $\overline{\boldsymbol{z}}\in\mathbb{R}^m$ tako da je $\langle \boldsymbol{a}^1,\overline{\boldsymbol{z}}\rangle\le 0$, …, $\langle \boldsymbol{a}^n,\overline{\boldsymbol{z}}\rangle\le 0$, $\langle \boldsymbol{b},\overline{\boldsymbol{z}}\rangle> 0$, ali $\langle \boldsymbol{a}^{n+1},\overline{\boldsymbol{z}}\rangle> 0$.

Promotrimo sada dva sustava

(A) $\langle \boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{z}\rangle\le 0$, …, $\langle \boldsymbol{a}^n,\boldsymbol{z}\rangle\le 0$, $\langle \boldsymbol{a}^{n+1},\boldsymbol{z}\rangle\le 0$, $\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{z}\rangle> 0$, i

(B) $\langle \boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{z}\rangle\le 0$, …, $\langle \boldsymbol{a}^n,\boldsymbol{z}\rangle\le 0$, $\langle \boldsymbol{a}^{n+1},\boldsymbol{z}\rangle= 0$, $\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{z}\rangle> 0$.

Jasno je da je svako rješenje sustava (B) ujedno i rješenje sustava (A). Nadalje, ako je z rješenje sustava (A), tada je $\boldsymbol{z}-\dfrac{\langle \boldsymbol{a}^{n+1},\boldsymbol{z}\rangle}{\underbrace{\langle \boldsymbol{a}^{n+1},\overline{\boldsymbol{z}}\rangle}_{>0,\text{tj.}\neq 0}}\cdot\overline{\boldsymbol{z}}$ rješenje sustava (B)[5]. Dakle, (A) ima rješenje (u tom slučaju je **(II)** točno) ako i samo ako (B) ima rješenje.

Promotrimo, sada, vektore $\boldsymbol{c}^i=\boldsymbol{a}^i-\lambda_i\boldsymbol{a}^{n+1}, \boldsymbol{i}=1,2,\ldots,\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}^{n+1}$, gdje je $\lambda_i=\dfrac{\langle \boldsymbol{a}^i,\overline{\boldsymbol{z}}\rangle}{\langle \boldsymbol{a}^{n+1},\overline{\boldsymbol{z}}\rangle}\le 0$ i $\mu=\dfrac{\langle \boldsymbol{b},\overline{\boldsymbol{z}}\rangle}{\langle \boldsymbol{a}^{n+1},\overline{\boldsymbol{z}}\rangle}>0$. Lako je za provjeriti da sustav (B) ima rješenje ako i samo ako sustav

[5] U Jaćimović (2011) je greškom napisano da je $\boldsymbol{z}+\overline{\boldsymbol{z}}$ rješenje sustava (B).

(C) $\left\langle \boldsymbol{c}^1, \boldsymbol{z} \right\rangle \le 0$, …, $\left\langle \boldsymbol{c}^n, \boldsymbol{z} \right\rangle \le 0$, $\left\langle \boldsymbol{a}^{n+1}, \boldsymbol{z} \right\rangle = 0$, $\left\langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{z} \right\rangle > 0$,

ima rješenje.

Korištenjem pretpostavke indukcije imamo da: ili (*j*) postoje nenegativni realni brojevi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ takvi da je $b' = y_1c^1 + y_2c^2 + \ldots + y_nc^n$ ili (*jj*) postoji $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ takav da $\left\langle \boldsymbol{c}^1, \boldsymbol{u} \right\rangle \le 0, \ldots, \left\langle \boldsymbol{c}^n, \boldsymbol{u} \right\rangle \le 0$, $\left\langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{u} \right\rangle > 0$. U slučaju (*jj*), imamo da je vektor $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} - \gamma \overline{\boldsymbol{z}}$, gdje je[6] $\gamma = \dfrac{\left\langle \boldsymbol{a}^{n+1}, \boldsymbol{u} \right\rangle}{\left\langle \boldsymbol{a}^{n+1}, \overline{\boldsymbol{z}} \right\rangle}$, rješenje sustava (C), iz čega slijedi **(II)**.

Ako postoje nenegativni realni brojevi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ takvi da je $b' = y_1c^1 + y_2c^2 + \ldots + y_nc^n$ (slučaj (j)), tada je

$$\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \mu \boldsymbol{a}^{n+1} = y_1\boldsymbol{c}^1 + \cdots + y_n\boldsymbol{c}^n = y_1\boldsymbol{a}^1 - \lambda_1 y_1 \boldsymbol{a}^{n+1} + \cdots + y_n\boldsymbol{a}^n - \lambda_n y_n \boldsymbol{a}^{n+1}.$$

Dakle,

$$\boldsymbol{b} = y_1\boldsymbol{a}^1 + \cdots y_n\boldsymbol{a}^n + y_{n+1}\boldsymbol{a}^{n+1},$$

gdje je $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i $y_{n+1} = \mu - \lambda_1 y_1 - \cdots - \lambda_n y_n \ge 0$. To znači da je **(I)** točno. Po principu matematičke indukcije, tvrdnja 2.2. vrijedi za svaki prirodan broj *n*. Na ovaj način smo dokazali Farkasevu lemu. **Q.E.D.**

4. PRIMJENA FARKASEVE LEME U MODELIMA VREDNOVANJA FINANCIJSKE IMOVINE

U ovom poglavlju iznosimo jednu ekonomsku primjenu Farkaseve leme u području teorije vrednovanja financijske imovine. Naime, teorija vrednovanja imovine usmjerena je na objašnjavanje cijena financijske imovine u uvjetima neizvjesnosti (Qian 2011:1) pri čemu koristi različite financijske modele. Polazeći od niza pretpostavki, veze između slučajnih varijabli nastoje se opisati skupom matematičkih izraza, na temelju kojeg se formira financijski model. Takav model je u pravilu simplificirana i apstraktna slika stvarnosti koja nastaje formaliziranim zapisom pretpostavki o funkcioniranju tržišta, odnosno tržišnih sudionika i financijskih instrumenata. Prema Fabozzi (2013:xviii), cilj modela za vrednovanje

[6] U Jaćimović (2011) je greškom napisano da je $\gamma = \dfrac{\left\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u} \right\rangle}{\left\langle \boldsymbol{a}^{n+1}, \overline{\boldsymbol{z}} \right\rangle}$.

financijske imovine je općenito formaliziranje odnosa između prinosa i rizika koji bi trebao postojati ako se investitori ponašaju na pretpostavljeni način. Takav formalni zapis često omogućuje analizu modela, odnosno ispitivanje veza između varijabli modela uvažavajući ograničenja modela. Modeli za vrednovanje financijske imovine razlikuju se po različitim pristupima i/ili broju pretpostavki koje koriste za objašnjavanje određenih tržišnih fenomena. Jedan od važnijih koncepata u teoriji vrednovanja je pojam arbitraže. Pod pojmom arbitraža se u ekonomiji najčešće misli na aktivnost (strategiju) kojom se može ostvariti nerizični profit, i to na temelju uočavanja nepravilnosti u vrednovanju imovine od strane tržišta. Na primjer, prilika za nerizičnu arbitražu postoji kada postoji razlika u cijenama iste vrste imovine na različitim tržištima. U slučaju da se uoče takve nepravilnosti, tržišni sudionici će na tržištu s manjom cijenom kupovati, a na tržištu s većom cijenom prodavati tu imovinu. Povećana potražnja na jednom, odnosno povećana ponuda tog dobra na drugom tržištu bi trebala dovesti do izjednačavanja cijena na oba tržištima. No, nerizičnu arbitražu je moguće izvesti i kada se uoči da postoje različite imovine (portfelji) koje imaju jednake novčane tokove (isplate, engl. *payoffs*), ali čije su trenutne cijene različite. Drugim riječima, prilika za nerizičnu arbitražu postoji ako i samo ako je moguće sastaviti portfelj koji ima jednake isplate kao i referentni portfelj, ali tako da su im cijene različite. Takav portfelj nazivamo replicirajućim portfeljem. Ukoliko se ukaže prilika za nerizičnu arbitražu, pretpostavlja se da je ona kratkotrajna jer aktivnosti tržišnih arbitražera dovode do toga da se imovine s jednakim isplatama prodaju po jednakim cijenama (Fabozzi, 2013: 55).

Iako je poznato da se cijene imovina na tržištu formiraju pod utjecajem mehanizama ponude i potražnje, kako bi se odredila (teorijska) cijena neke imovine, u ekonomiji se često primjenjuju modeli vrednovanja različite imovine. Potreba za određivanjem teorijske cijene postoji, na primjer, kada nije poznata tržišna cijena imovine, kada se neka imovina tek uvodi na tržište, odnosno kada se želi procijeniti je li tržište korektno vrednovalo određenu imovinu (mogućnost arbitraže). Jedan pristup vrednovanju financijske imovine polazi od pretpostavke da nerizična arbitraža nije moguća. Takva pretpostavka implicira da nije moguće ostvariti nerizični profit na temelju uočavanja nepravilnosti u vrednovanju imovine, odnosno da sva imovina koja ima jednake isplate, ima i jednake cijene. Tada kažemo da vrijedi zakon jedne cijene (Fabozzi 2012:52). Ako vrijedi zakon jedne cijene, tada je neke kompleksne vrste imovina (kao što su izvedenice) moguće vrednovati korištenjem koncepta replicirajućeg portfelja čija je cijena poznata.

Kako bismo mogli analizirati arbitražu, uvesti ćemo jednostavni dvoperiodični model ekonomije. Potom ćemo pokazati primjenu Farkaseve leme, pri čemu se opredjeljujemo za prezentaciju modela koja je pogodna za studente ekonomije sa osnovnim znanjem o linearnoj algebri. Kao izvor za osnovne definicije koristimo Fabozzi (2013).

Pretpostavimo da razmatramo tržište na kojem postoji n imovina, te da ekonomija u sljedećem razdoblju može poprimiti m stanja (na primjer: recesija, ekspanzija, nepromijenjeno stanje i slično). Također, neka su x_{ij} isplate i-te imovine u j-tom stanju, prikazane u matrici $\boldsymbol{X}=[x_{ij}]$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$. Pritom je jedina nesigurnost u modelu dana s nesigurnosti koje će stanje nastupiti, a isplate imovina u različitim stanjima su deterministički određene. Cijene imovina su dane vektorom cijena $\boldsymbol{p}=\left(p_1,p_2,\ldots,p_n\right)$, $\boldsymbol{w}=\left(w_1,w_2,\ldots,w_n\right)$ je *vektor portfelja* čiji elementi predstavljaju *novčane iznose* pojedine imovine u portfelju, a transakcijski troškovi su zanemarivi. Isplata portfelja w u sljedećem razdoblju dana je vektorom

$$\underset{(m,1)}{\boldsymbol{X}^{w}} = \underset{(m,n)}{\boldsymbol{X}^{T}} \underset{(n,1)}{\boldsymbol{w}} . \tag{13}$$

Ujedno, ako postoji vektor portfelja $\boldsymbol{v}=\left(v_1,v_2,\ldots,v_n\right)$, takav da je

$$\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\neq \boldsymbol{w}, \tag{14}$$

kažemo da je portfelj w moguće *replicirati*. Ukoliko je u portfelju v moguće zauzeti suprotnu poziciju u odnosu na portfelj w, tada se očito portfelj w može savršeno pokriti (moguć je *savršeni hedging*). Dakle, ukoliko je poznata matrica isplata imovina u sljedećem razdoblju, te portfelj w, izraz (14) koristimo za definiranje portfelja w za savršeni hedging. Za portfelje w i v za koje vrijedi (14), treba vrijediti i zakon jedne cijene:

$$\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{w}\right), \boldsymbol{v}\neq \boldsymbol{w}. \tag{15}$$

Ako neki tržišni sudionik želi ostvariti točno određenu isplatu portfelja u svakom od m stanja, njegove mogućnosti ovise o tržištu, odnosno o broju i karakteristikama imovine koju može kombinirati u portfelju. Tada se problem izbora portfelja s željenim isplatama može svesti na rješavanje sustava (13), gdje je vektor portfelja w vektor nepoznanica. Općenito, bilo koji portfelj $\boldsymbol{X}^{w}$ možemo smatrati jednom imovinom, pa ćemo u nastavku te riječi koristiti kao sinonime.

Nadalje, uvesti ćemo vektor $\boldsymbol{q}=\left(q_1,q_2,\ldots,q_n\right)$ čiji elementi q_j označavaju (trenutnu) cijenu novčane jedinice koja se isplaćuje ako u ekonomiji u sljedećem razdoblju nastupi stanje j, $j=1,\ldots,m$.[7] Ako je poznat vektor q, tada je cijena i-te imovine:

$$\boldsymbol{p}_i^0=\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{x}_{i1}+\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{x}_{i2}+\ldots+\boldsymbol{q}_m\boldsymbol{x}_{im}=\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{x}_{ij}\ , \ \boldsymbol{i}\in\{1,2,\ldots,\boldsymbol{n}\}\ , \tag{16}$$

[7] Ovaj vektor nazivamo još i vektorom cijena Arrow-Debeuovih vrijednosnica ili vektorom cijena stanja (vidjeti Arrow, (1951), Debreu (1951), Arrow i Debreu (1954).

a cijene svih imovina prikazujemo vektorom cijena $\boldsymbol{p}^0$:

$$\boldsymbol{p}^0 = \left[p_i^0 \right] = \boldsymbol{Xq} . \tag{17}$$

Trenutnu cijenu portfelja w računamo formulom:

$$p_w^0 = \boldsymbol{p}^{0T} \boldsymbol{w} = \left(\boldsymbol{Xq} \right)^T \boldsymbol{w} = \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{w} . \tag{18}$$

Nerizična arbitraža bi bila moguća kada bi vrijedilo da imovine w i v imaju jednake isplate u svim stanjima, ali da je $p(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{w}) > p(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{v})$. Tada bi arbitražeri kupovali imovinu v (duga pozicija) i kratko prodavali imovinu w (kratka pozicija), ostvarili bi zaradu na temelju trenutne razlike u cijenama, a kratke i duge pozicije zatvorili u sljedećem razdoblju bez troškova. Također, nerizična arbitraža bi bila moguća kada bi portfelji w i v imali jednake cijene, pri čemu je, na primjer, $\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{v}$. Tada bi arbitražeri kupovali imovinu v (duga pozicija) i kratko prodavali imovinu w (kratka pozicija), ne bi imali nikakav trošak u trenutku sastavljanja pozicije, a u sljedećem razdoblju bi prilikom zatvaranja pozicija ostvarili zaradu. Na temelju prethodnog, definirajmo općenito dva oblika arbitraže, arbitražu tipa A i arbitražu tipa B.

Arbitraža tipa A je strategija koja ima zaradu u trenutku sastavljanja a u svim mogućim budućim stanjima nema nikakvih troškova. Drugim riječima, arbitraža tipa A ima negativnu cijenu u trenutku t_0 i nenegativne isplate u svim mogućim stanjima u trenutku t_1, to jest, ako i samo ako postoji portfelj $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0} \text{ i } \boldsymbol{p}^{OT} \boldsymbol{w} < \boldsymbol{0} . \tag{19}$$

Arbitraža tipa B je strategija koja ne košta ništa u trenutku sastavljanja i u sljedećem razdoblju ostvaruje zaradu. Drugim riječima, strategija ima nepozitivnu cijenu u trenutku t_0 i sve nenegativne isplate u svim mogućim stanjima u trenutku t_1, pri čemu je barem jedna isplata strogo pozitivna, odnosno ako i samo ako postoji vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$\boldsymbol{X}' \boldsymbol{w} > \boldsymbol{0} \text{ i } \boldsymbol{p}^{0\prime} \boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{0} . \tag{20}$$

Primijetimo da ćemo slabi oblik arbitraže tipa *B* dobiti ako postoji vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$\boldsymbol{p}^{0\prime} \boldsymbol{w} = 0 \text{ i } \boldsymbol{X}' \boldsymbol{w} > \boldsymbol{0} , \tag{21}$$

dok ćemo slabi oblik arbitraže tipa *A* moći napraviti ako postoji vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$\boldsymbol{p}^{0\prime}\boldsymbol{w} < 0 \text{ i } \boldsymbol{X}'\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}\,. \tag{22}$$

Sada ćemo istaknuti važnost Farkaseve leme, te prodiskutirati posljedice primjene. Dakle, ako i samo ako postoji prilika za arbitražu, tada sustav (19) ima rješenje. Prema Farkasevoj lemi, to bi značilo da sustav $\boldsymbol{X}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q} \geq 0, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$, nema rješenje. S obzirom da smo u (18) zapisali da je $\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{X}\boldsymbol{q}$, sada ćemo slijediti uvedenu notaciju, te dalje sustav razmatramo u obliku $\boldsymbol{X}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q} \geq 0, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$. Zaključujemo da je arbitraža moguća kada sustav $\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{X}\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$ nije rješiv. Naime, ako vrijedi $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{p}^{0T}\boldsymbol{w} < 0$, slijedi: $\boldsymbol{p}^{0T}\boldsymbol{w} = \left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{q}\right)^T \boldsymbol{w} = \boldsymbol{q}^T \underbrace{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w}}_{\geq 0} < 0$, pa nejednakost vrijedi ako i samo postoji vektor $\boldsymbol{q} < 0, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$. U ekonomskoj interpretaciji, iz prethodnog zaključujemo da je arbitraža moguća ako novčana jedinica u nekom sljedećem stanju danas ne košta ništa, odnosno ako je njezina cijena danas negativna.

S druge strane, pretpostavimo da postoji vektor $\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$ koji je rješenje sustava $\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{X}\boldsymbol{q}$. Tada arbitraža nije moguća jer je $\boldsymbol{p}^{0T}\boldsymbol{w} = \left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{q}\right)^T \boldsymbol{w} = \underbrace{\boldsymbol{q}^T}_{\geq 0}\underbrace{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{w}}_{\geq 0} \geq 0$. Dakle, u ekonomskoj interpretaciji, postojanje vektora q znači da je cijena svake imovine određena s cijenom novčane jedinice u stanju j (Varian 1987). Drugim riječima, arbitraža nije moguća ako je novčana jedinica u nekom stanju jednako vrednovana neovisno o tome od koje imovine dolazi ako rizik ostvarivanja novčane jedinice ovisan o stanju koje nastupi, ne o konkretnoj imovini. Podijelimo li sve elemente vektora u jednakosti (17) sa sumom elemenata vektora q, u oznaci $\left|q\right|_1 = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 + .. + \boldsymbol{q}_m$, dobijemo

$$\hat{p}^0 = p^0 \frac{1}{\left|q\right|_1} = Xq \frac{1}{\left|q\right|_1} = X\hat{q}\,. \tag{23}$$

Očito je zbroj svih elemenata vektora $\hat{q}$ jednak 1 pa se vrijednosti elemenata tog vektora mogu interpretirati kao vjerojatnosti. Ove vrijednosti nisu „prave" vjerojatnosti nastupa određenog stanja, i nazivaju se *vjerojatnostima neutralnim na rizik* (engl. *risk neutral probabilities*). Ako E^Q predstavlja očekivanje uz vjerojatnosti neutralne na rizik, slijedi:

$$\hat{p}_i^0 = p_i^0 \frac{1}{\left|q\right|_1} = \left[x_{i\bullet}\right] q \frac{1}{\left|q\right|_1} = \left[x_{i\bullet}\right]\hat{q} = E^Q\left[x_i\right],\ \boldsymbol{i} \in \{1, 2, ..., \boldsymbol{n}\}. \tag{24}$$

Zaključujemo da, ako i samo ako postoji q koji je rješenje sustava (17), postoje i vjerojatnosti uz koje je normalizirana cijena imovine jednaka njezinoj očekivanoj vrijednosti.

Korištenjem Farkaseve leme, došli smo do zaključka da arbitraža nije moguća ako su sve buduće jedinične isplate (koje imaju jednaku razinu rizika) jednako vrednovane od strane tržišta. Također, iz Farkaseve leme proizlazi da je egzistencija vjerojatnosti neutralnih na rizik (i samog koncepta vrednovanja s rizik-neutralnim vjerojatnostima) uvjetovana odsutnosti prilike za arbitražu (Jaćimović 2011). Koncept replicirajućeg portfelja i vrednovanja s vjerojatnostima neutralnih na rizik koristi se, na primjer, prilikom vrednovanja kompleksnih vrsta imovine, kao što su opcije (vidjeti binomni model (Cox, Ross i Rubenstein (1979)), ili Black – Scholes model (1973), i druge). Zato u nastavku najprije dajemo primjer modela tržišta s mogućnosti arbitraže, a zatim ga proširujemo na općeniti pojednostavljeni model za vrednovanje opcija.

Primjer 4.1

Razmatramo dva portfelja, portfelj 1 (P1) i portfelj 2 (P2). Njihove trenutne cijene su redom p_1=6 i p_2=10. Pretpostavlja se da ekonomija u sljedećem razdoblju može poprimiti dva stanja: nepromijenjeno stanje ili ekspanziju. Očekivane isplate portfelja su prikazane u tablici 1. Ispitajmo postoji li mogućnost za arbitražu.

Tablica 1: Isplate portfelja.

	P1	P2
nepromijenjeno stanje I	4	4
ekspanzija	10	12

Izvor: Autori.

Dane podatke zapisat ćemo matrično: $\boldsymbol{p}^{0T}=\begin{bmatrix}6 & 10\end{bmatrix}', X=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 10 & 12\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q}^T=\begin{bmatrix}q_1 & q_2\end{bmatrix}$'. Provjeravamo postoji li $\boldsymbol{q}^T=\begin{bmatrix}q_1 & q_2\end{bmatrix}\geq \boldsymbol{0}$ za koji sustav:

$$\begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 10 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \boldsymbol{q}_2\end{bmatrix}$$

ima rješenje:

$$\left[\begin{array}{cc|c}4 & 4 & 6\\ 10 & 12 & 10\end{array}\right] č \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3/2\\ 1 & 6/5 & 1\end{array}\right] č \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3/2\\ 0 & 1/5 & -1/2\end{array}\right] č \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 3/2\\ 0 & 1 & -5/2\end{array}\right] č \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -5/2\end{array}\right].$$

S obzirom da je rješenje $\boldsymbol{q}^T=\begin{bmatrix}4 & -5/2\end{bmatrix}\ngeq 0$, postoji prilika za arbitražu.

Primjer 4.2 – Vrednovanje opcija[8]

Razmatramo tržište na kojem imamo dionicu, te nerizičnu imovinu i europsku call opciju sastavljenu na razmatranu dionicu. Trenutna cijena dionice je S_0, cijena obveznice B, a izvršna cijena call opcije je E. Cijena dionice u sljedećem mjesecu može se s prethodne razine povećati za U% s vjerojatnošću p ili smanjiti za D% s vjerojatnošću 1-p. Također, pretpostavljamo da je tržište efikasno (i nema transakcijskih troškova), nerizična kamatna stopa i za sljedeći period je fiksna, $\boldsymbol{i} > 0$, r=1+i je nerizični dekurzivni kamatni faktor, nema isplate dividendi na dionicu kroz promatrano razdoblje do dospijeća opcije.

Neka je $\boldsymbol{u} = (1 + \boldsymbol{U}\%)$ faktor povećanja cijene dionice, odnosno $\boldsymbol{d} = (1 + \boldsymbol{D}\%)$ faktor smanjenja cijene dionice i $\boldsymbol{u} > \boldsymbol{d}$. Ako se cijena u sljedećem razdoblju poveća za U%, tada cijena iznosi $S_u = \boldsymbol{u}S_0$, odnosno $S_d = \boldsymbol{d}S_0$ ako se smanji. Nadalje, ako call opcija na dospijeće vlasniku donosi zaradu, tada će je vlasnik izvršiti, u suprotnom će je ostaviti da istekne. S obzirom da call opcija daje mogućnost kupnje vezane imovine po izvršnoj cijeni, vlasnik će je izvršiti ako je $S_T - \boldsymbol{E} > 0$, gdje je S_T cijena dionice na dospijeće. Prema tome, isplata call opcije na dospijeće se može zapisati kao $\mathbf{max}\{0, S_T - \boldsymbol{E}\}$. Vrijednost nerizične imovine u sljedećem periodu uz nerizičnu kamatnu stopu i je rB.

Matrica isplata imovina u sljedećem periodu je:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} S_d & S_u \\ \boldsymbol{rB} & \boldsymbol{rB} \\ \mathbf{max}\{0, S_d - \boldsymbol{E}\} & \mathbf{max}\{0, S_u - \boldsymbol{E}\} \end{bmatrix},$$

pri čemu je $\boldsymbol{p}^{0T} = \begin{bmatrix} S_0 & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{c}_0 \end{bmatrix}$. Koristeći Farakaševu lemu, utvrdili smo da arbitraža nije moguća ako postoji rješenje sustav $\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{Xq}$, $\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}$. Kada uvrstimo vrijednost, slijedi:

$$\begin{bmatrix} S_d & S_u \\ \boldsymbol{rB} & \boldsymbol{rB} \\ \mathbf{max}\{0, S_d - \boldsymbol{E}\} & \mathbf{max}\{0, S_u - \boldsymbol{E}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{c}_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix} \geq \boldsymbol{0}.$$

Izdvojit ćemo prve dvije jednadžbe, te tražimo rješenje sustava

$$\begin{bmatrix} S_d & S_u \\ \boldsymbol{rB} & \boldsymbol{rB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

[8] Primjer formiran prema Vanderbei (online [12.12.2017]), te Cox, Ross i Rubenstein (1979).

Lako se pokaže da je matrica X regularna (tržište je potpuno), te slijedi

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_d & S_u \\ rB & rB \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_0 \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{S_d rB - S_u rB} \begin{bmatrix} rB & -S_u \\ -rB & S_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ B \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{rB\left(S_d - S_u\right)} \begin{bmatrix} rBS_0 - S_u B \\ -rBS_0 + S_d B \end{bmatrix} = \frac{1}{rBS_0\left(d-u\right)} \begin{bmatrix} rBS_0 - uS_0 B \\ -rBS_0 + dS_0 B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{r\left(d-u\right)} \begin{bmatrix} r-u \\ d-r \end{bmatrix}.$$

Pritom mora vrijediti da je $q \geq 0$, pa zbog $d-u<0$ mora vrijediti $d \leq r \leq u$. Iz treće jednadžbe slijedi

$$q_1 \max\left\{0, S_d - E\right\} + q_2 \max\left\{0, S_u - E\right\} = c_0 ,$$

te uvrštavanjem dobivenih rješenja za q_1 i q_2 iz prve dvije jednadžbe dobivamo:

$$\frac{r-u}{r\left(d-u\right)} \max\left\{0, S_d - E\right\} + \frac{d-r}{r\left(d-u\right)} \max\left\{0, S_u - E\right\} = c_0 . \tag{25}$$

S obzirom da je $\frac{r-u}{r\left(d-u\right)} + \frac{d-r}{r\left(d-u\right)} = \frac{d-u}{r\left(d-u\right)} = \frac{1}{r}$, dijeljenjem jednadžbe (25) s $\frac{1}{r}$, slijedi

$$\frac{r-u}{d-u} \max\left\{0, S_d - E\right\} + \frac{d-r}{d-u} \max\left\{0, S_u - E\right\} = rc_0 .$$

Također, $\frac{r-u}{d-u} + \frac{d-r}{d-u} = 1$, pa se $\frac{r-u}{d-u}$ i $\frac{d-r}{d-u}$ mogu interpretirati kao vjerojatnosti. U skladu sa zaključkom koji slijedi iz izraza (23), uočavamo da te „vjerojatnosti“ ne ovise o „pravim“ vjerojatnostima p, odnosno 1-p, odnosno to su vjerojatnosti neutralne na rizik. Dalje, pišemo:

$$c_0 = \frac{\frac{r-u}{d-u} \max\left\{0, S_d - E\right\} + \frac{d-r}{d-u} \max\left\{0, S_u - E\right\}}{r} = \frac{1}{r} E^Q\left[c_T\right],$$

Sukladno izrazu (24), uočavamo da cijena call opcije mora biti jednaka diskontiranoj očekivanoj vrijednosti call opcije uz vjerojatnosti neutralne na rizik.

U prethodnom izvodu smo pokazali kako iz Farkaseve leme možemo izvesti formulu za vrednovanje opcija. Iako simplificiran, ovaj pristup je osnova izgradnje dinamičkih višeperiodičnih modela (Černy, 2009:1).

5. PRIMJENA FARKASEVE LEME U TEORIJI IGARA

U ovom poglavlju pokazujemo primjenu Farkasove leme u teoriji igara (prema Di Tillio (2008)). Prije svega uvedimo potrebne pojmove. Neka je zadan skup igrača $N=\{1,2,3,\ldots,I\}$ gdje je I kardinalitet skupa N i neka je za svaki $\boldsymbol{i}\in N$ zadan konačan skup S_i čistih strategija igrača $\boldsymbol{i}\in N$. Dakle, svaki igrač može izabrati jednu od strategija iz skupa stanja koji predstavlja sve njemu dostupne strategije. Te strategije $\boldsymbol{s}_i\in S_i$ zovemo *čiste* (eng. *pure*) kako bismo ih razlikovali od tzv. mješovitih (eng. *mixed*) strategija koje ćemo kasnije uvesti. Nadalje, neka je za svakog igrača zadana funkcija isplata (korisnosti) $\boldsymbol{u}_i : S\to\mathbb{R}$, gdje je $S=S_1\times S_2\times\ldots\times S_I$ Kartezijev produkt strategija svih igrača. Igra u normalnom obliku je niz $\Gamma=\langle N,(\mathrm{S}_i,\boldsymbol{u}_i)_{i\in N}\rangle$. Dakle, igru definiraju skup igrača N i svakom igraču pridružen par njegovih čistih strategija S_i i funkcije korisnosti $\boldsymbol{u}_i$ koje kvantificiraju korisnost koju ima promatrani igrač za proizvoljan odabir $\boldsymbol{I}-$ torke čistih strategija svih igrača.

Igre dvaju igrača od kojih svaki ima konačno mnogo strategija se uobičajeno prikazuju tablično pri čemu se obično strategijama prvog igrača dodjeljuju retci tablice (pa se taj igrač često naziva i *igrač redak*), a strategijama drugog igrača u stupci (*igrač stupac*). Na presjeku odabranog retka i stupca možemo iščitati korisnosti obaju igrača za taj par čistih strategija.

Primjer 5.1.: Pretpostavimo da je zadana igra dvaju igrača, tj. $N=\{1,2\}$, $\mathbf{I}=2$. Neka prvi igrač ima na raspolaganju tri strategije $S_1=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$, a drugi igrač također tri strategije $S_2=\{\boldsymbol{I},\boldsymbol{II},\boldsymbol{III}\}$. Neka je njegova korisnost, u slučaju da prvi igrač izabere strategiju A, a drugi strategiju $\boldsymbol{I}$, jednaka $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})=3$. Slično, neka je za isti odabir strategija korisnost drugog igrača $\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})=\mathbf{0}$. Taj podatak vidimo u tabličnom prikazu ove igre u retku koji odgovara strategiji $\boldsymbol{A}$ prvog igrača i stupcu $\boldsymbol{I}$ koji odgovara strategiji drugog igrača. Tablicom su dane i sve ostale korisnosti koje igrači imaju za sve moguće kombinacije njihovih čistih strategija.

Tablica 2: Primjer igre dvaju igrača.

	I	II	III
A	3, 0	3, 2	2, 1
B	4, 3	4, 4	3, 2
C	5, 5	7, 6	2, 6

Izvor: Autori.

U ovom radu ograničit ćemo se samo na konačne igre u normalnom obliku, što podrazumijeva da je skup igrača konačan (kao što je već navedeno), ali i da je skup mogućih strategija svakog pojedinog igrača također konačan.

Za zadani konačan skup X, neka je $\Delta(X)$ oznaka za skup svih vjerojatnosnih distribucija nad skupom X, tj. $\Delta(X)$ je skup svih funkcija $p: \mathrm{X} \to [0,1]$ takvih da je $\sum_{x \in X} p(x) = 1.$

Neka je zadana konačna igra u normalnom obliku $\Gamma = \langle N, (\mathrm{S}_i, u_i)_{i \in N} \rangle$ i neka je $\sum_i = \Delta(\mathrm{S}_i)$ za svakog igrača $i \in N$. Svaku vjerojatnosnu distribuciju $\sigma_i \in \sum_i$ nad skupom strategija S_i igrača i zovemo **mješovita strategija** igrača i.

Dakle, mješovita strategija igrača je vjerojatnosna distribucija nad skupom njemu dostupnih strategija, tj. ona govori koliko je vjerojatno da će pojedini igrač odabrati neku čistu strategiju. Svaka se čista strategija također može smatrati mješovitom strategijom takvom da je vjerojatnost odabira te čiste strategije jednaka 1, a vjerojatnost odabira svih ostalih čistih strategija jednaka 0. U tom smislu mješovite strategije smatramo poopćenjem čistih strategija.

Primjer 5.2.: Za gore prikazanu igru jedna moguća mješovita strategija prvog igrača je $\sigma_1 = (0, 0.5, 0.5)$ što znači da je vjerojatnost da igrač igra svoju strategiju A jednaka 0, a strategije B i C igra s jednakim vjerojatnostima 0.5.

Označimo sa $\sum = \sum_1 \times \sum_2 \times \ldots \sum_I$. Tada svaki element $\sigma \in \sum$ predstavlja uređenu $I-$torku mješovitih strategija svih igrača $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_I)$, gdje je $\sigma_i \in \sum_i$ mješovita strategija igrača i.

Nadalje, zbog jednostavnosti uvodimo i oznake $S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_I$ za skup svih uređenih $(I-1)-$torki čistih strategija za svakog igrača, osim igrača i, i slično $\sum_{-i} = \sum_1 \times \ldots \times \sum_{i-1} \times \sum_{i+1} \times \ldots \times \sum_I$ za skup svih uređenih $(I-1)-$torki mješovitih strategija za svakog igrača, osim igrača i. Stav igrača i o vjerojatnosti da će njegovi suparnici odabrati određenu kombinaciju svojih čistih strategija (element skupa S_{-i}) možemo opisati vjerojatnosnom distribucijom $\mu_i \in \Delta(S_{-i})$, tj. on svakoj mogućoj kombinaciji čistih strategija pripisuje vjerojatnost da se ta kombinacija strategija zaista i ostvari. Zato $\mu_i \in \Delta(S_{-i})$ zovemo **vjerovanje** igrača i. Ovdje je bitno napomenuti kako je $\sum_{-i} \neq \Delta(S_{-i})$. Kao što smo već rekli, element skupa $\Delta(S_{-i})$ predstavlja jednu *vjerojatnosnu distribuciju nad uređenim* $(I-1)-$torkama čistih strategija, dok element skupa Σ_{-i} predstavlja uređenu $(I-1)-$torku mješovitih strategija svih igrača, odnosno *uređenu* $(I-1)-$*torku vjerojatnosnih distribucija*. Kada svaki igrač donese odluku o mješovitoj strategiji koju će koristiti, sve njihove odluke zajednički čine jedan element skupa Σ_{-i}. Međutim, u svakom ponavljanju igre igrač u konačnici mora odabrati jednu konkretnu čistu strategiju i rezultat odluka o tim čistim strategijama je element skupa S_{-i}, a uvjerenje igrača $\boldsymbol{i}$ o vjerojatnostima da se svaka pojedina kombinacija čistih strategija dogodi je element skupa $\Delta(S_{-i})$ i označavamo ga sa μ_i. Elemente skupa Σ_{-i} ćemo standardno označavati sa σ_{-i}.

Za svaku čistu strategiju $s_i \in S_i$ i za svaku uređenu $(\boldsymbol{I}-\mathbf{1})-$ torku $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_I) \in S_{-i}$ čistih strategija preostalih igrača, oznakom (s_i, s_{-i})ćemo označavati $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_I) \in S_i$.

Polazeći od korisnosti igrača koja je definirana nad skupom $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_I$ potrebno je dodefinirati korisnosti igrača za mješovite strategije te za vjerovanja. Prirodno je korisnosti dodefinirati na način da one predstavljaju **očekivane dobitke** koje će ostvarit igrač igrajući tu mješovituustrategiju.

Neka su zadani proizvoljni igrači $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{N}$ i neka je $\sigma_i \in \sum_i$ mješovita strategija igrača $\boldsymbol{i}$ te $s_{-i} \in S_{-i}$ čiste strategije preostalih igrača. Definiramo

$$\boldsymbol{u}_j(\sigma_i, s_{-i}) := \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \cdot \boldsymbol{u}_j(s_i, s_{-i}). \tag{26}$$

Primijetimo da ovako definirana korisnost upravo predstavlja očekivane dobitke igrača $\boldsymbol{j}$ ukoliko $\boldsymbol{i}$-ti igrač koristi svoju mješovitu strategiju σ_i, a ostali igrači svoje čiste strategije s_{-i}.

Slično, neka su $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{N}$ i $\sigma_i \in \sum_i$ mješovita strategija igrača $\boldsymbol{i}$ te $\mu_i \in \Delta(S_{-i})$ vjerovanje igrača $\boldsymbol{i}$ o strategijama preostalih igrača. Definiramo korisnost $\boldsymbol{j}-$ tog igrača $\boldsymbol{u}_j$ u ovisnosti o mješovitoj strategiji σ_i igrača $\boldsymbol{i}$ te vjerovanju tog igrača o strategijama preostalih igrača μ_i kao očekivane dobitke $\boldsymbol{u}_j$ u odnosu na vjerojatnost μ_i uz dano σ_i:

$$\boldsymbol{u}_j(\sigma_i, \mu_i) := \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu_i(s_{-i}) \cdot \boldsymbol{u}_j(\sigma_i, s_{-i})$$

Zato je:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_j(\sigma_i, \mu_i) &:= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu_i(s_{-i}) \cdot \boldsymbol{u}_j(\sigma_i, s_{-i}) \\
&= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \mu_i(s_{-i}) \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \cdot \boldsymbol{u}_j(s_i, s_{-i}) \\
&= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \cdot \mu_i(s_{-i}) \cdot \boldsymbol{u}_j(s_i, s_{-i}) \\
&= \sum_{(s_i, s_{-i})} \sigma_i(s_i) \cdot \mu_i(s_{-i}) \cdot \boldsymbol{u}_j(s_i, s_{-i})
\end{aligned}$$

Specijalno, za čistu strategiju $s_i \in S_i$ stavljajući $\sigma_i(s_i)=1$ te $\sigma_i(s_k)=0$ za $k \neq i$ dobijemo

$$u_j(s_i,\mu_i)=\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu_i(s_{-i})\cdot u_j(s_i,s_{-i}).$$

Osnovno pitanje na koje teorija igara želi odgovoriti je koju od svih njemu dostupnih (mješovitih) strategija treba igrati igrač i. Razumno je da će igrač birati onu strategiju koja maksimizira njegov očekivani dobitak, u skladu s njegovim vjerovanjima. Ranije smo naveli da bilo kakva vjerojatnosna distribucija nad mogućim kombinacijama čistih strategija njegovih suparnika predstavlja jedno moguće vjerovanje igrača. Međutim, iako su sva ta vjerovanja moguća, za neke od njih nije izgledno da bi igrač zaista imao takvo vjerovanje. Ukoliko igrač zna da njegov suparnik ima na raspolaganju neke strategije koje njima samima nisu prihvatljive, on bi takva razmatranja trebao ugraditi u svoja vjerovanja. Primjerice, ako suparnik ima na raspolaganju dvije strategije od kojih je jedna uvijek bolja od druge, onda igrač, znajući da mu je suparnik racionalan, mora vjerovati da on nikada neće odabrati takvu za njega nepovoljniju strategiju.

U igri prikazanoj u tablici 2, strategija A igrača 1 je uvijek lošija od strategije B u smislu da, bez obzira na odabranu strategiju igrača 2, igrač 1 uvijek ima veću korisnost igrajući strategiju B nego strategiju A. Zato ćemo A zvati *dominiranom strategijom*, a strategiju B *dominantnom*.

Kažemo da je čista strategija $s_i \in S_i$ igrača i **strogo dominirana** ako postoji mješovita strategija tog igrača $\sigma_i \in \Sigma_i$ takva da je $u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ za svaku kombinaciju čistih strategija $s_{-i} \in S_{-i}$ ostalih igrača. Za odgovarajuću strategiju σ_i kažemo da **strogo dominira** strategiju s_i.

Primijetimo da se u definiciji ne traži da je strategija s_i dominirana čistom, nego bilo kojom mješovitom strategijom σ_i tog igrača.

Primjer 5.3. :

Tablica 3: Eliminacija dominiranih strategija.

	I	II	III
A	3, 3	3, 2	2, 1
B	2, 3	6, 4	3, 2
C	6, 5	2, 6	3, 5

Izvor: Autori.

Primijetimo da igrač 1 nema niti jednu čistu strategiju koja je dominirana nekom njegovom čistom strategijom. Pokažimo da je strategija A igrača 1 dominirana mješovitom strategijom $\sigma_1 = (0, 0.5, 0.5)$.

Vrijedi: $u_1(\sigma_1, s_2 = I) = \sigma_1(A) \cdot u_1(A, I) + \sigma_1(B) \cdot u_1(B, I) + \sigma_1(C) \cdot u_1(C, I)$:

$$= 0 \cdot 3 + 0.5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 6 = 4.$$

te slično $u_1(\sigma_1, s_2 = II) = 0 \cdot 3 + 0.5 \cdot 6 + 0.5 \cdot 2 = 4$ i
$u_1(\sigma_1, s_2 = III) = 0 \cdot 2 + 0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot 3 = 3$.

Dakle, $u_1(\sigma_1, s_2 = I) = 4 > u_1(s_1 = A, s_2 = I) = 3$,
$u_1(\sigma_1, s_2 = II) = 4 > u_1(s_1 = A, s_2 = II) = 3$ te
$u_1(\sigma_1, s_2 = III) = 3 > u_1(s_1 = A, s_2 = III) = 2$ te je stoga strategija A (iako nije dominirana niti čistom strategijom B niti čistom strategijom C) dominirana mješovitom strategijom koja kombinira strategije B i C .

Kako je igrač 2 racionalan, i zna da je igrač 1 racionalan, on prilikom donošenja odluke mora uzeti u obzir da igrač 1 neće odabrati svoju strategiju A jer umjesto nje ima na raspolaganju *bolju* strategiju σ_1. Zato igrač 2 može pri donošenju odluke promatrati manji skup strategija, tj. novu igru koja je predočena tablicom 4:

Tablica 4: Nastavak eliminacije dominiranih strategija iz Tablice 3.

	I	II	III
B	2, 3	6, 4	3, 2
C	6, 5	2, 6	3, 5

Izvor: Autori.

Slično kao maloprije, primijetimo da čista strategija II strogo dominira strategiju I, ali i strategiju III igrača 2. Stoga igrač 2 nikada neće odabrati te strategije pa se igra dodatno reducira na

Tablica 5: Nastavak eliminacije dominiranih strategija iz Tablice 4.

	II
B	6, 4
C	2, 6

Izvor: Autori.

Međutim, i igrač 1 zna da je igrač 2 racionalan i on zna da će igrač 2 doći do ovog zaključka. Stoga on također može donositi odluke na temelju ovako reducirane igre. Kako igrač 1 zna da će igrač 2 doći do zaključka da mora koristit svoju strategiju $\boldsymbol{II}$, igrač 1 će se odlučiti na strategiju $\boldsymbol{B}$ koja njemu, uz odabir $\boldsymbol{II}$ igrača 2, donosi maksimalnu korisnost:

Tablica 6: Rješenje eliminacija dominiranih strategija iz Tablice 5.

	II
B	6, 4

Izvor: Autori.

Formalno se eliminacija dominiranih strategija može prikazati kao niz igara takvih da novu igru definiramo iz prethodne tako da ona ima **isti skup igrača** te **iste funkcije korisnosti**, ali moguće **manji skup čistih strategija** koji dobijemo tako da za svakog igrača **eliminiramo sve one strategije koje su dominirane barem jednom mješovitom strategijom**, tj. za svakog igrača zadržimo samo one strategije koje nisu dominirane.

Budući da promatramo samo konačne igre, očigledno je da ovakve eliminacije možemo raditi samo konačan broj koraka, tj. da postoji dovoljno velik $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ za kojeg je igra iz koraka $\boldsymbol{n}$ jednaka igri iz koraka $\boldsymbol{n}+1$, tj. takva da je $\Gamma_D^n = \Gamma_D^{n+1} = \Gamma_D$, gdje smo sa Γ_D označili krajnju igru u koju ovako definiran niz igara konvergira. Ukoliko za svakog igrača u igri Γ_D postoji točno jedna preostala strategija, kažemo da se igra može riješiti eliminacijom dominiranih strategija.

Postavlja se pitanje je li to jedini način na koji možemo eliminacijom doći do jedinstvenog rješenja igre. Jedna moguća alternativa je, umjesto da se eliminiraju dominirane strategije (tj. one strategije od kojih postoji barem jedna *bolja*), eliminirati sve one strategije koje nisu *najbolje moguće*.

Neka je $\mu_i \in \Delta(S_{-i})$ vjerovanje igrača $\boldsymbol{i}$. Čista strategija $\boldsymbol{s}_i \in S_i$ igrača $\boldsymbol{i}$ je **najbolji odgovor** (BR prema engl. *best response*) na vjerovanje μ_i ako je $\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{s}_i, \mu_i) \geq \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{s}_i^{'}, \mu_i)$ za sve $\boldsymbol{s}_i^{'} \in S_i$.

Čista strategija $\boldsymbol{s}_i \in S_i$ igrača $\boldsymbol{i}$ je **nikad najbolji odgovor** (NBR prema engl. *never best response*) ako ne postoji vjerovanje μ_i takvo da je $\boldsymbol{s}_i$ najbolji odgovor na μ_i .

Slično kao kod eliminacije svih dominiranih strategija, razumno je pokušati razriješiti igru iterativnim eliminacijama tako da se u svakom koraku eliminiraju sve strategije svih igrača koje su nikad najbolji odgovor. Na taj se način dobiva niz igara od kojih svaka ima jednak skup igrača s istim funkcijama korisnosti, ali na manjem skupu raspoloživih strategija. Postoji dovoljno velik $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ za kojeg je $\Gamma_R^n = \Gamma_R^{n+1} = \Gamma_R$, gdje je sa Γ_R označena krajnja igra u koju ovako definiran niz igara konvergira. Ukoliko za svakog igrača u igri Γ_R postoji točno jedna preostala strategija, kažemo da se igra može riješiti eliminacijom nikad najboljih odgovora. Formalni postupak se može vidjeti u Dodatku 2.

Osnovna razlika u pretpostavkama prilikom eliminacija dominiranih strategija u odnosu na eliminaciju NBR-ova je da kod eliminacije dominiranih strategija igrači ne moraju imati definirana vjerovanja, samo moraju smatrati neke (dominirane) strategije svojih suparnika nemogućim. Kod eliminacije NBR-ova, igrači imaju definirana vjerovanja i u svakom koraku eliminiraju neka vjerovanja. Zato se strategije koje prežive iterativni proces eliminacije NBR-ova nazivaju engl. ***correlated-rationalizable strategies***.

Unatoč velikoj idejnoj razlici između ovih koncepata, uporabom Farkasove leme moguće je pokazati da oba procesa eliminacija daju isti rezultat. Konkretno, može se pokazati da svaki korak iteracije koji eliminira sve strogo dominirane strategije ili sve NBR-ove eliminira isti skup strategija pa u svakom koraku, bez obzira na korištenu metodu, dobivamo jednaku novu igru u nizu. Budući je rezultat svakog koraka iteracije jednak, i konačni rezultat ovakvih iteracija je jednak. Ostaje samo pokazati da je to zaista tako.

Propozicija 5.4.: U konačnoj igri u normalnoj formi, čista strategija je strogo dominirana ako i samo ako je nikad najbolji odgovor.

Za potrebe ovog dokaza fiksirajmo nekog igrača te neku njegovu čistu strategiju $\bar{s}$. Pretpostavimo da taj igrač ima n čistih strategija te da kombinacija strategija njegovih suparnika ima m. Definirajmo matricu $A = A(\bar{s}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ kao matricu kojoj stupci odgovaraju strategijama odabranog igrača, a retci kombinaciji strategija svih ostalih igrača i to na način da se u stupcu i, koji ogovara strategiji s_i tog igrača, te u retku $-i$, koji odgovara kombinaciji strategija s_{-i} ostalih igrača, nalazi element

$$a_{-i,i} = u(\bar{s}, s_{-i}) - u(s_i, s_{-i}), \qquad (27)$$

gdje je zbog jednostavnosti, sa u označena korisnost odabranog igrača. Nadalje, definirajmo vektor $b = \left[-1 -1 \ldots -1\right]^T \in \mathbb{R}^m$. Dokaz gornje tvrdnje ćemo provesti u dva koraka i to tako da pokažemo da je i svojstvo stroge dominiranosti i svojstvo nikad najboljeg odgovora ekvivalentno tome da, za ovako definirane definiranu matricu A i vektor b, vrijedi (5'). U prvom koraku ćemo pokazati kako je odabrana strategija strogo dominirana ako i samo ne vrijedi (5'') (pa stoga nužno vrijedi (5')), dok ćemo u drugom koraku pokazati kao je odabrana strategija NBR ako i samo ako vrijedi (5').

Tvrdnja 5.5.: Strategija $\overline{s}$ je NBR ako i samo ako za $A = A(\overline{s}\ )$ i $b = \left[-1-1\ldots-1\right]^T$ ne vrijedi (5'').

Dokaz se može naći u Dodatku 3.

Tvrdnja 5.6.: Za matricu $A = A(\overline{s})$ i vektor $b = \left[-1-1\ldots-1\right]^T$ vrijedi (5') ako i samo ako je $\overline{s}$ strogo dominirana strategija.

Dokaz se može naći u Dodatku 4.

Dokaz propozicije 5.4.: Strategija $\overline{s}$ igrača i je NBR ako i samo ako za $A = A(\overline{s})$ i $b = \left[-1-1\ldots-1\right]^T$ ne vrijedi (5''), tj. ako i samo ako vrijedi (5') (Tvrdnja 5.5.), a to vrijedi ako i samo ako je $\overline{s}$ strogo dominirana strategija (Tvrdnja 5.6.).

Teorem 5.7.: Konačna igra u normalnom obliku je rješiva eliminacijom strogo dominiranih strategija ako i samo ako je rješiva eliminacijom NBR-ova te su na taj način dobivena rješenja jednaka.

Slijedi direktno iz Propozicije 5.4. jer se u svakom koraku eliminacije dobije ista igra pomoću obe metode.

Pokažimo na konkretnom primjeru kako smo Farkasevu lemu iskoristili u dokazu ovog teorema.

Primjer 5.8.: Neka je zadana igra triju igrača pri čemu prvi igrač ima strategije $S_1 = \{U, M, D\}$, igrač 2 strategije $S_2 = \{L, \mathrm{R}\}$ te igrač 3 strategije $S_3 = \{\mathrm{S}, \mathrm{N}\}$. Odabrani igrač i iz dokaza će biti prvi igrač. Kako on ima na raspolaganju 3 strategije, matrica A će imati $m = 3$ stupca. Također, kako njegovi suparnici na raspolaganju imaju po 2 strategije, kombinacija suparničkih strategija ima $2 \cdot 2 = 4$ pa će matrica A imati $n = 4$ retka. Neka su isplate prvog igrača, u ovisnosti o kombinacijama strategija njegovih suparnika, dane Tablicom 7:

Tablica 7 : Primjer upotrebe Farkaseve leme.

	LS	LN	RS	RN
U	1	1	-2	0
M	-2	3	-1	-1
D	3	0	-2	1

Izvor: Autori.

Odabrana strategija $\overline{s}$ koju koristimo u ovom primjeru će biti strategija $\overline{s} = U$. Dokazat ćemo da, ako je ona NBR strategija, onda je i strogo dominirana, ali i obrnuto.

Kako bismo mogli provesti postupak sličan kao u dokazu, pokažimo prvo da je strategija $\boldsymbol{U}$ zaista NBR prvog igrača. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neko vjerovanje $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)$ tako da je $\boldsymbol{U}$ najbolji odgovor na to vjerovanje. Tada je

$$\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{U},\mu)\geq \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{M},\mu)$$

$$\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{U},\mu)\geq \boldsymbol{u}_1(\mathbf{D},\mu)$$

tj

$$\mu_1+\mu_2-2\mu_3\geq -2\mu_1+3\mu_2-\mu_3-\mu_4$$

$$\mu_1+\mu_2-2\mu_3\geq 3\mu_1-2\mu_3+\mu_4$$

odnosno ekvivalentno

$$\begin{aligned} 3\mu_1-2\mu_2-\mu_3+\mu_4&\geq 0\\ -2\mu_1+\mu_2-\mu_4&\geq 0 \end{aligned}\qquad (28)$$

Množenjem prve nejednadžbe sa 3, a druge sa 5 te zbrajanjem tako dobivenih nejednadžbi dobijemo novu nejednadžbu

$$-\mu_1-\mu_2-3\mu_3-2\mu_4\geq 0$$

iz čega, zbog nenegativnosti komponenti vjerovanja μ slijedi da je $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=0$. Međutim, to znači da μ nije vjerojatnosna distribucija, tj. to je u kontradikciji s našom pretpostavkom da je μ vjerovanje. Time smo dokazali da naša pretpostavka nije točna, tj. da je strategija $\boldsymbol{U}$ NBR.

Provedimo sada postupak sličan kao u dokazu Tvrdnje 5.5 i Tvrdnje 5.6. kako bismo pokazali da, budući da je $\boldsymbol{U}$ NBR, iz Farkasove leme slijedi da je $\boldsymbol{U}$ i strogo dominirana strategija.

Izračunajmo matricu $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ koristeći definiciju (27). Ona je jednaka

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix} 1-1 & 1-(-2) & 1-3\\ 1-1 & 1-3 & 1-0\\ -2-(-2) & -2-(-1) & -2-(-2)\\ 0-0 & 0-(-1) & 0-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Kako ne postoji vjerovanje μ tako da za njega vrijedi (28), to znači da za matricu $\boldsymbol{A}$ nije zadovoljena (5’’). Naime, kada bi bila zadovoljeno (5’’), vektor $\boldsymbol{z}\geq \mathbf{0}$ bi se mogao normalizirati tako da suma njegovih komponenti iznos 1 (konkretno množenjem skalarom $\lambda=\dfrac{1}{\sum \boldsymbol{z}_{-i}}>0$), te za vjerojatnosnu distribuciju $\mu=\lambda\cdot\boldsymbol{z}$

vrijedi $A^T\mu = A^T\lambda z = \lambda A^T z \geq 0$, tj vrijedi tvrdnja (28), a ranije smo dokazali da to nije moguće. Prema tome, nije zadovoljena (5'') pa je stoga nužno zadovoljena (5'). Dakle, postoji vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \geq 0$ takav da je

$$Ax \leq b = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T < \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

odnosno takav da vrijedi

$$\begin{array}{l} 3x_2 - 2x_3 < 0 \\ -2x_2 + x_3 < 0 \\ -x_2 < 0 \\ x_2 - x_3 < 0 \end{array}, \text{ tj. takav da je } \begin{array}{l} (1-1)x_1 + (1-(-2))x_2 + (1-3)x_3 < 0 \\ (1-1)x_1 + (1-3)x_2 + (1-0)x_3 < 0 \\ (-2-(-2))x_1 + (-2-(-1))x_2 + (-2-(-2))x_3 < 0 \\ (0-0)x_1 + (0-(-1))x_2 + (0-1)x_3 < 0 \end{array}$$

ili ekvivalentno takav da je

$$\begin{array}{l} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 < 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 < 1x_1 + 3x_2 + 0x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 < -2x_1 - 1x_2 - 2x_3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 < 0x_1 - 1x_2 + 1x_3 \end{array}$$

Primijetimo da x ne može biti nul-vektor jer je u tom slučaju $Ax = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ ' b. Zato je $x_1 + x_2 + x_3 > 0$. Uvedimo oznake oznaka $\sigma_i = \dfrac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3}$ za $i = 1,2,3$. Budući je $\sigma_i \geq 0$ te je

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3} = 1, \tag{28}$$

vektor $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}$ je vjerojatnostna distribucija nad skupom strategija prvog igrača.

Stoga dijeljenjem gornjih nejednakosti sa $x_1 + x_2 + x_3 > 0$ dobijemo

$$\begin{array}{l} 1 < 1\sigma_1 - 2\sigma_2 + 3\sigma_3 = u_1(\sigma, LS) \\ 1 < 1\sigma_1 + 3\sigma_2 + 0\sigma_3 = u_1(\sigma, LN) \\ -2 < -2\sigma_1 - 1\sigma_2 - 2\sigma_3 = u_1(\sigma, RS) \\ 0 < 0\sigma_1 - 1\sigma_2 + 1\sigma_3 = u_1(\sigma, \mathrm{RN}) \end{array},$$

te je stoga čista strategija U strogo dominirana mješovitom strategijom σ tog igrača.

Primijetimo da ovim postupkom nismo uspjeli konstruirati mješovitu strategiju σ koja dominira strategiju U nego smo samo pokazali da postoji neka takva strategija.

Slično, uporabom Farkaseve leme možemo pokazati i obrnut smjer, tj. da, ako je *U* strogo dominirana strategija igrača, onda je ta strategija NBR. Pretpostavimo sada da smo za našu igru uspjeli pokazati kako je *U* strogo dominirana strategija.

Primjerice, *U* je strogo dominirana strategijom $\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}$:

$$1 < 1 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{5}{8} = u_1(\sigma, LS)$$

$$1 < 1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{5}{8} = u_1(\sigma, LN)$$

$$-2 < -2 \cdot 0 - 1 \cdot \frac{3}{8} - 2 \cdot \frac{5}{8} = u_1(\sigma, RS)$$

$$0 < 0 \cdot 0 - 1 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{5}{8} = u_1(\sigma, \mathrm{RN})$$

Pokažimo da je *U* i NBR. Obzirom da je σ vjerojatnosna distribucija, vrijedi $1 = 1 \cdot \sigma_1 + 1 \cdot \sigma_2 + 1 \cdot \sigma_3$ pa nejednakost $1 < 1 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{5}{8}$ možemo ekvivalentno pisati i $1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{5}{8} < 1 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{5}{8}$ te je stoga $\underbrace{0 \cdot (1-1) + \frac{3}{8} \cdot (1-(-2)) + \frac{5}{8} \cdot (1-3)}_{\lambda_1 = -1/8} < 0$. Slično možemo raspisati i ostale nejednakosti pa zato vrijedi

$$\lambda_1 = -\frac{1}{8} = \sigma_1 \cdot (1-1) + \sigma_2 \cdot (1-(-2)) + \sigma_3 \cdot (1-3) < 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{8} = \sigma_1 \cdot (1-1) + \sigma_2 \cdot (1-3) + \sigma_3 \cdot (1-0) < 0$$

$$\lambda_3 = -\frac{3}{8} = \sigma_1 \cdot (-2-(-2)) + \sigma_2 \cdot (-2-(-1)) + \sigma_3 \cdot (-2-(-2)) < 0$$

$$\lambda_4 = -\frac{2}{8} = \sigma_1 \cdot (0-0) + \sigma_2 \cdot (0-(-1)) + \sigma_3 \cdot (0-1) < 0$$

Neka je $\lambda = -\max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} = \frac{1}{8}$. Dijeljenjem gornjih nejednakosti sa $\lambda > 0$ te uvođenjem oznaka $x_i = \frac{\sigma_i}{\lambda} > 0$ dobijem

$$-1 = x_1 \cdot (1-1) + x_2 \cdot (1-(-2)) + x_3 \cdot (1-3) \le -1$$
$$-1 = x_1 \cdot (1-1) + x_2 \cdot (1-3) + x_3 \cdot (1-0) \le -1$$
$$-3 = x_1 \cdot (-2-(-2)) + x_2 \cdot (-2-(-1)) + x_3 \cdot (-2-(-2)) \le -1$$
$$-2 = x_1 \cdot (0-0) + x_2 \cdot (0-(-1)) + x_3 \cdot (0-1) \le -1$$

pa smo dokazali da postoji $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \ge 0$ takav da je $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$, odnosno da je zadovoljeno (5'), pa zato ne može biti zadovoljeno (5'').

Kada bi postojalo vjerovanje $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ tako da je $\boldsymbol{U}$ najbolji odgovor BR na to vjerovanje, onda bi vrijedilo

$$\begin{matrix} u_1(U, \mu) \ge u_1(M, \mu) \\ u_1(U, \mu) \ge u_1(\mathrm{D}, \mu) \end{matrix}$$ što je ekvivalentno sa $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{z} \ge 0$ (analogno (28)),

gdje je $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{bmatrix}^T \ge 0$. Nadalje, za vektor $\boldsymbol{z}$ je $\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{z} = -\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = -1 < 0$ jer je μ vjerovanje, tj. vjerojatnosna distribucija. Zato vektor $\boldsymbol{z}$ zadovoljava (5'') što smo ranije pokazali da nije moguće. Zato ne može postojati vjerovanje tako da je $\boldsymbol{U}$ najbolji odgovor BR na to vjerovanje. Time smo dokazali da je $\boldsymbol{U}$ NBR.

6. ZAKLJUČAK

U radu je predočen dokaz Farkaseve leme matematičkom indukcijom s detaljnim objašnjenjima. Dokaz je intuitivan i, nadamo se, prikladan za sve čitatelje koji u svom radu koriste ovu lemu a pritom nisu po osnovnom obrazovanju matematičari. Također, smatramo da je ovakav dokaz posebno prikladan za studente ekonomije, ali i za studente drugih fakulteta, koji tek uče o osnovama optimizacije. U radu se prezentira i jednostavni dvoperiodični model ekonomije na temelju kojeg se želi pokazati zašto je matematičko modeliranje tržišnih uvjeta pogodno za analizu modela te kako primjenom teorije iz linearne algebre možemo analizirati ekonomske modele ovog oblika. Pokazano je zašto je nemogućnost arbitraže važna pretpostavka za modele za vrednovanje financije imovine, te na koji način iz Farkaseve leme izvodimo rizik-neutralno vrednovanje. Koncept rizik-neutralnog vrednovanja jedan je od važnijih dostignuća u teoriji vrednovanja i vjerujemo da je u danim primjerima približen studentima ekonomije. Također, primjenom Farkaseve leme, na detaljan način je pokazano da eliminacija dominiranih strategija i eliminacija nikad najboljih odgovora daju isti rezultat, što je vrijedan rezultat iz područja teorije igara.

LITERATURA

1. Acerbi, F. (2000) Plato: Parmenides 149a-c3. A Proof by Complete induction?, Arch Hist Exact Sc, 55, str. 57–76. doi.org/10.1007/s004070000020
2. Arrow, K. J. (1951). An extension of the basic theorems in classical welfare economics. In: J. Neyman (ed.), Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematival Statistics and Probability (str. 507–532), California: University of California Press.
3. Arrow, K. J., Debreu G. (1954) Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica,1954, str. 265–290.
4. Bartl, D. (2008) A short algebraic proof of the Farkas' lemma, SIAM Journal on Optimization, 19(1), str. 234–239.
5. Bartl, D. (2012a) A note on the short algebraic proof of Farkas' Lemma, Linear and Multilinear Algebra, 60(8), str. 897–901.
6. Bartl, D. (2012b) A very short algebraic proof of the Farkas Lemma, Mathematical Methods of Operations Research, 75, str. 101–104.
7. Brentjes, S. (1994) Linear optimalisation. U Grattan-Guinness, I. (ed.): Companion Encyclopediae of the Mathemathical Sciences II. London, str. 828–833.
8. Černy, A. (2009) Mathematical Techniques in Finance, 2nd Edition. Princeton: Princeton University Press.
9. Dakić, B. (n.a.) Gaussova dosjetka. www.element.hr [13.11.2017.]
10. Debreu, G. (1951). The coefficient of resource utilization. Econometrica, 19, str. 273–292.
11. Di Tillio, A. (2008) Lecture Notes on Game Theory. http://didattica.unibocconi.it/mypage/dwload.php?nomefile=NOTES20090213132249.PDF [4.2.2019.]
12. Fabozzi, F. J. (ed.) (2013) Encyclopedia of financial models. Hoboken: John Wiley and Sons.
13. Gurka, D. (2011) The Gyula Farkas Memorial Competition in the Context of the Hungarian Scientific Competitions, Interdisciplinary Description of Complex Systems, 9(1), str. 81-86.
14. Jaćimović, M. (2011) Farkas' Lemma of Alternative, The Teaching of Mathematics, 14(2), str. 77-86.
15. Jukić, D. (2015) Konveksni skupovi. Osijek. Dostupno online [8.11.2017.]: http://www.mathos.unios.hr/~jukicd/Konv_Skupovi_skripta.pdf
16. Mangasarian, O. L. (1969) Nonlinear Programming. New York: McGraw-Hill.

17. Marjanović, M. M. (1972) An iterative method for solving polynomial equations, Topology and its applications, Budva, str. 170–172.
18. Neralić, L. (2008) Uvod u matematičko programiranje 1. Zagreb: Element.
19. Neralić, L., Šego, B. (2009) Matematika. Zagreb: Element.
20. Prékopa, A. (1999) Gyula Farkas' life and the importance of his work in the theory of optimalization. In Komlósi, S. and Szántai, T. (eds.): Alternative Ways in Hungarian Operation Research. Dialóg Campus, Budapest–Pécs, str. 15–31.
21. Qian, J. (2015) An Introduction to Asset Pricing Theory. http://jhqian.org/apt/apbook.pdf [16.2.2016]
22. Relić, B. (2002) Gospodarska matematika. Zagreb: Računovodstvo i financije.
23. Simonnard, M. (1966) Linear Programming. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
24. Svanberg, K. (2008) Farkas' Lemma Derived by Elementary Linear Algebra. Dostupno online [26.6.2016.]: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.146.5464&rep=rep1&type=pdf
25. Varian, H. R. (1987) The Arbitrage Principle in Financial Economics. The Journal of Economic Perspectives, 1 (2), str. 55–72.

DODATAK 1.

Ovdje pokazujemo da za dva *m*-komponentna vektora *a* i *b* ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$) vrijedi

ili

$$\textbf{postoji skalar } x\geq 0 \textbf{ t.d. } \boldsymbol{a}x=\boldsymbol{b}\ \left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m\right)$$

ili

$$\textbf{postoji } \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m \textbf{ t.d. } \left\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{z}\right\rangle \leq 0 \textbf{ i } \left\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{z}\right\rangle > 0\,.$$

Naime, ako za vektore $\boldsymbol{a}=\left(a_1,a_2,...,a_m\right)$ i $\boldsymbol{b}=\left(b_1,b_2,...,b_m\right)$ postoji pozitivan broj *k* tako da je $\boldsymbol{k}=\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_m}{a_m}$, tada je očito *ak* = *b* (u prostoru $\mathbb{R}^3$ bismo rekli da su vektori *a* i *b* kolinearni i iste orijentacije). Pretpostavimo sada da ne postoji $k>0$ takav da je $ak = b$. Tada ili postoji $k_1>0$ takav da je $-k_1a = b$ ili za svaki $k_2>0$ vrijedi $k_2a \neq b$. U slučaju $-k_1a = b$ imamo da su vektori *a* i *b* kolinearni ali suprotne orijentacije. Neka je *c* vektor okomit[1] na vektore *a* i *b*. Neka je $z = b+c$. Sada je sigurno $\left\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right\rangle=\left\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right\rangle+\left\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\right\rangle=\left\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right\rangle+0<\left\|\boldsymbol{a}\right\|\left\|\boldsymbol{b}\right\|\cos\pi<0$, pri čemu je $\left\|\boldsymbol{a}\right\|$ norma vektora *a*, i također je $\left\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right\rangle=\left\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\right\rangle+\left\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right\rangle=\left\|\boldsymbol{b}\right\|^2+0>0$. U slučaju da za svaki $k_2>0$ vrijedi $k_2a \neq b$, tada postoji vektor *c* tako da je i *c* i $-c$ okomito na *a*, ali ne i na *b*. Stoga je ili $\left\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\right\rangle=0\leq 0$ i $\left\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right\rangle>0$, ili je $\left\langle \boldsymbol{a},-\boldsymbol{c}\right\rangle=0\leq 0$ i $\left\langle \boldsymbol{b},-\boldsymbol{c}\right\rangle>0$, pa stavimo $z = c$ ili $z = -c$.

DODATAK 2.

Formalno, **eliminacija strogo dominiranih strategija se provodi na sljedeći način**. Neka je zadana igra u normalnom obliku $\Gamma=\langle N,(S_i,\boldsymbol{u}_i)_{i\in N}\rangle$. Konstruirajmo niz igara na sljedeći način: neka je $\Gamma_D^1=\Gamma$ i označimo $\tilde{S}_i^1=S_i^1$ za svakog igrača $\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{N}$. Pretpostavimo da je definirana igra $\Gamma_D^n=\langle N,(\tilde{S}_i^n,\boldsymbol{u}_i)_{i\in N}\rangle$.

[1] Prisjetimo se da okomitost dva vektora znači da je njihov skalarni umnožak jednak nuli.

Dodefinirajmo $\tilde{\Sigma}_i^n = \Delta(\tilde{S}_i^n)$ te $\tilde{S}_{-i}^n := \tilde{S}_1^n \times \ldots \times \tilde{S}_{i-1}^n \times \tilde{S}_{i+1}^n \times \ldots \times \tilde{S}_I^n$. Tada možemo definirati igru $\Gamma_D^{n+1} = \langle \boldsymbol{N}, (\tilde{S}_i^{n+1}, \boldsymbol{u}_i)_{i \in N} \rangle$, gdje je skup strategija pojedinog igrača u idućem koraku jednak

$$\tilde{S}_i^{n+1} = \left\{ s_i \in \tilde{S}_i^n : \ s_i \textit{ nije strogo dominirana niti jednom mješovitom strategijom igrača } i \right\}$$

$$= \left\{ s_i \in \tilde{S}_i^n : \nexists \sigma_i \in \tilde{\Sigma}_i^n \textit{ takav da } u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \textit{ za svaki } s_{-i} \in \tilde{S}_{-i}^n \right\}$$

$$= \left\{ s_i \in \tilde{S}_i^n : (\forall \sigma_i \in \tilde{\Sigma}_i^n)(\exists s_{-i} \in S_{-i}^n) \textit{ takav da } u_i(\sigma_i, s_{-i}) \le u_i(s_i, s_{-i}) \right\} \subseteq \tilde{S}_i^n$$

Postoji dovoljno velik $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ za kojeg je $\Gamma_D^n = \Gamma_D^{n+1} = \Gamma_D$, gdje je sa Γ_D označena krajnja igra u koju ovako definiran niz igara konvergira i time je ovaj postupak završen.

Slično, **eliminacija nikad najboljih odgovora (NBR-ova) se formalno provodi po sljedećem postupku**: Krećemo od početne igre u normalnom obliku $\Gamma = \langle \boldsymbol{N}, (S_i, \boldsymbol{u}_i)_{i \in N} \rangle$ i konstruirajmo niz igara u skladu s vjerovanjem $\mu_i \in \Delta(S_{-i})$ igrača $\boldsymbol{i}$ odbacujući one strategije koje, u skladu s tim vjerovanjem, nisu izgledne, u smislu da su nikad najbolji odgovor. Definirajmo niz igara $\Gamma_R^n = \langle \boldsymbol{N}, (\overline{S}_i^n, \boldsymbol{u}_i)_{i \in N} \rangle$. Neka je prva igra ovog niza jednaka početnoj, tj. $\Gamma_R^1 = \Gamma$ pa je i skup dostupnih strategija jednak ($\overline{S}_i^1 = S_i$). Slično kao i ranije, uvodimo oznaku $\overline{S}_{-i}^n := \overline{S}_1^n \times \ldots \times \overline{S}_{i-1}^n \times \overline{S}_{i+1}^n \times \ldots \times \overline{S}_I^n$ za uređene strategije svih igrača osim igrača $\boldsymbol{i}$. Iz igre Γ_R^n definiramo iduću igru u nizu $\Gamma_R^{n+1} = \langle \boldsymbol{N}, (\overline{S}_i^{n+1}, \boldsymbol{u}_i)_{i \in N} \rangle$ tako da su nove igračima dostupne strategije podskup starih, tj. $\overline{S}_i^{n+1} \subseteq \overline{S}_i^n$ i to dobivene tako da iz skupa $\overline{S}_i^n$ uklonimo sve strategija koje su NBR, tj. tako da se u skupu $\overline{S}_i^{n+1}$ nalaze samo one strategije iz $\overline{S}_i^n$ za koje postoji vjerovanje $\mu_i \in \Delta(\overline{S}_{-i}^n)$ takvo da je s_i najbolji odgovor za μ_i i to za svaki $s_i^{'} \in \overline{S}_i^n$. Dakle

$$\overline{S}_i^{n+1} := \left\{ s_i \in \overline{S}_i^n : \ s_i \textit{ je BR za neku } \mu_i \in \Delta(\overline{S}_{-i}^n) \right\} =$$

$$= \left\{ s_i \in \overline{S}_i^n : \textit{ postoji } \mu_i \in \Delta(\overline{S}_{-i}^n) \textit{ td. je } u_i(s_i, \mu_i) \ge u_i(s_i^{'}, \mu_i) \textit{ za svaku } s_i^{'} \in \overline{S}_i^n \right\}$$

Slično kao i u slučaju eliminacije dominiranih strategija, postoji dovoljno velik $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ za kojeg je $\Gamma_R^n = \Gamma_R^{n+1} = \Gamma_R$, gdje je sa Γ_R označena krajnja igra u koju ovako definiran niz igara konvergira.

Napomenimo da bi, strogo tehnički gledano, u oba postupka eliminacija, trebalo definirati i nove funkcije korisnosti kao restrikcije starih na novi skup strategija, tj. $\tilde{\ }$ je jednaka u_i ali je definirana samo na skupu strategija koje su zadržane u $n-$ toj iteraciji $\tilde{S}_i^n$. Zbog jednostavnosti zapisa, i dalje ćemo koristit oznaku u_i.

DODATAK 3.

Dokaz tvrdnje 5.5.: Pretpostavimo da je strategija $\overline{s} \in S_i$ nikad najbolji odgovor igrača i. Zato ne postoji vjerovanje igrača i takvo da je $\overline{s}$ najbolji odgovor igrača na to vjerovanje, pa za svako vjerovanje μ_i o strategijama suparničkih igrača postoji strategija igrača $s_i^{'}$ koji narušava svojstvo najboljeg odgovora, tj. za koju vrijedi $u_i(\overline{s},\mu_i) < u_i(s_i^{'},\mu_i)$, tj. za koju je $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu_i(s_{-i})\cdot u_i(\overline{s},s_{-i}) < \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu_i(s_{-i})\cdot u_i(s_i^{'},s_{-i})$, a to vrijedi ako i samo ako je $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu_i(s_{-i})\cdot \left[u_i(\overline{s},s_{-i}) - u_i(s_i^{'},s_{-i})\right] < 0$. Dokažimo da ne vrijedi (5''). Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neki vektor z kojem su sve komponente nenegativne i da je za njega $A^T z \geq 0$ te $b^T z < 0$. Iz druge pretpostavke vrijedi da je $\sum_{-i}(-1)\cdot z_{-i} < 0$ pa, zbog nenegativnosti svih komponenti vektora z, zaključujemo da je barem jedna od komponenti tog vektora strogo pozitivna. Stoga postoji skalar $\lambda > 0$ takav da je vektor $\mu = \lambda \cdot z$ vjerojatnostna distribucija nad S_{-i} (konkretno, $\lambda = \frac{1}{\sum z_{-i}}$). Osim toga, vrijedi $A^T\mu = A^T\lambda z = \lambda A^T z \geq 0$ te $b^T\mu = b^T(\lambda z) = \lambda b^T z < 0$. Međutim, budući je μ vjerojatnosna distribucija nad S_{-i}, predstavlja jedno vjerovanje igrača i pa, zbog ranije pokazanog, za nju postoji strategija $s_i^{'}$ takva da je $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu(s_{-i})\cdot \left[u_i(\overline{s},s_{-i}) - u_i(s_i^{'},s_{-i})\right] < 0$, što upravo predstavlja redak $s_i^{'}$ u produktu $A^T\mu$ za koji bi po gore pokazanom trebalo vrijediti da je veći ili jednak 0. To znači da naša pretpostavka ne vrijedi, tj. da ne vrijedi (5''). Pokažimo i suprotan smjer. Pretpostavimo da je $\overline{s}$ neka strategija i da za iz nje generiranu matricu A ne vrijedi (5''). Želimo pokazati da je $\overline{s}$ NBR, tj. da ne postoji vjerovanje μ za koje je ta strategija najbolji odgovor. Neka je $\mu \in \Delta(S_{-i})$ neko vjerovanje igrača i. Budući je μ vjerojatnosna distribucija nad S_{-i} za nju je $\mu_{-i} \geq 0$ (tj. svaka komponenta tog vektora je nenegativna) i $\sum \mu_{-i} = 1$ pa je zato $\sum(-1)\cdot\mu_{-i} = -1 < 0$, tj. $b^T\mu < 0$. Kako ne vrijedi (5''), za vektor μ ne vrijedi

$A^T\mu \geq 0$, tj. postoji redak i' matrice A (koji odgovara nekoj strategiji s_i') za koji je $\sum_{-i} a_{i',-i}\cdot\mu_{-i} < 0$, tj. za koju je $\sum_{-i}[u_i(\bar{s}_i,s_{-i}) - u_i(s_i',s_{-i})]\mu_{-i} < 0$, odnosno $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \mu_{-i}\cdot[u_i(\bar{s}_i,s_{-i}) - u_i(s_i',s_{-i})] < 0$. Dakle, za svako proizvoljno odabrano vjerovanje μ igrača i postoji strategija s_i' koja je, za to vjerovanje, bolji odgovor nego strategija $\bar{s}$ čime smo dokazali da je $\bar{s}$ NBR.

DODATAK 4.

Dokaz tvrdnje 5.6.: Pretpostavimo da za matricu A koja odgovara strategiji $\bar{s}$ vrijedi (5'). Tada postoji vektor x čije su sve komponente nenegativne i za koji je $Ax \leq b$, tj. za koju je svaki redak $-i$ produkta Ax strogo manji od -1 pa je nužno i manji od 0, tj. za svaki $-i$ vrijedi

$$\sum_{s_i} a_{-i,i}x_i = \sum_{s_i}[u_i(\bar{s}, \mathrm{s}_{-i}) - u_i(s_i,s_{-i})]x_i \leq 1 < 0,$$

pa je zato

$$u_i(\bar{s}, \mathrm{s}_{-i})\cdot\sum_{s_i} x_i = \sum_{s_i} x_i\cdot u_i(\bar{s}, \mathrm{s}_{-i}) < \sum_{s_i} x_i\cdot u_i(s_i,s_{-i}) .$$

Neka je $\lambda = \frac{1}{\sum x_i} > 0$. Množenjem posljednje nejednakosti s λ dobijemo $u_i(\bar{s}, s_{-i}) < \sum_{s_i} x_i\cdot\lambda\cdot u_i(s_i,s_{-i})$. Definiramo vjerojatnosnu distribuciju nad skupom strategija igrača i (tj. njegovu mješovitu strategiju) sa $\sigma = \lambda\cdot x$, tj. $\sigma\ (s_i) = \frac{x_i}{\sum x_i}$. Tada vrijedi: $u_i(\bar{s}, s_{-i}) < \sum_{s_i}\sigma(s_i)\cdot u_i(s_i,s_{-i}) = u_i(\sigma,s_{-i})$, tj. $\bar{s}$ je strogo dominirana mješovitom strategijom σ. Obrnuto, pretpostavimo da je $\bar{s}$ je strogo dominirana strategija. Tada postoji mješovita strategija σ za koju vrijedi $u_i(\bar{s}_i,s_{-i}) < \sum_{s_i}\sigma(s_i)\cdot u_i(s_i,s_{-i})$ za svaki $s_{-i}\in S_{-i}$, odnosno ekvivalentno $\sum_{s_i}\sigma(\mathrm{s}_i)[u_i(\bar{s}, \mathrm{s}_{-i}) - u_i(s_i,s_{-i})] =: \lambda_i < 0$ za svaki $s_{-i}\in S_{-i}$. Neka je $\lambda = -\max\lambda_i > 0$. Dijeljenjem sa λ dobijemo da za svaki $s_{-i}\in S_{-i}$ vrijedi $\sum_{s_i}\frac{\sigma(\mathrm{s}_i)}{\lambda}[u_i(\bar{s}, \mathrm{s}_{-i}) - u_i(s_i,s_{-i})] = \frac{\lambda_i}{\lambda} \leq -1$ odnosno $\sum_{s_i} x_i\cdot a_{-i,i} \leq -1$ pa stoga vrijedi (5') za vektor $x = \frac{1}{\lambda}\cdot\sigma \geq 0$. Time je tvrdnja dokazana.

Margareta Gardijan Kedžo, PhD
Faculty of Economic & Business, University of Zagreb, Zagreb, Croatia
mgardijan@efzg.hr

Vedran Kojić, PhD
Faculty of Economic & Business, University of Zagreb, Zagreb, Croatia
vkojic@efzg.hr

Marina Slišković, mag. math.
Faculty of Economic & Business, University of Zagreb, Zagreb, Croatia
msliskovic@efzg.hr

FARKAS' LEMMA: ELEMENTARY PROOF AND ECONOMIC APPLICATIONS

Received: February 11, 2019
Accepted: May 15, 2019

Professional paper

Abstract

In this paper, we provide elementary mathematical proof of Farkas' lemma. In mathematics, Farkas' lemma is a very important fact used in the theory of optimization, for example in derivation Karush-Khun-Tucker's optimum conditions in the case of inequality constraints in nonlinear programming, and in proving dual theorems for linear programming. Although the statement of the Farkas' lemma is easy, its proof is not trivial (most of the existing proofs are based on non-trivial results in the field of optimization and (linear) algebra), which is said to have been proven by many in many ways before 1972 to date, by overcoming who will offer simpler proof. In this paper, we prove the Farkas' lemma in an elementary way by using mathematical induction. The proof of this lemma by mathematical induction is known in foreign, but not in domestic literature. Therefore, the purpose of this paper is to revise this proof, correct the existing deficiencies and errors, and explain in detail each and every step of the proof, not using complicated terms and facts from the area of optimization and algebra. Apart from the evidence of Farkas' lemma, we also give its two applications in the economics. On the one hand, we want to explain Farkas' lemma in a comprehensible way to the readers who are not mathematicians but they use it in their work, and on the *other hand, to contribute to understanding of Farkas' lemma statement through particular examples.*

Keywords: *Farkas' lemma, mathematical proof, mathematical induction, financial modelling, game theory*

JEL: C690, C700, G10