Osječki matematički list 19 (2019), 31–41

Vivianijev teorem

Zdenka Kolar-Begović*, Valentina Ždralović†

Sažetak

U ovom radu se razmatra tvrdnja poznata u literaturi kao Vivianijev teorem prema kojemu je suma udaljenosti bilo koje točke jednakostraničnog trokuta od stranica trokuta jednaka visini tog trokuta. Dano je nekoliko različitih dokaza teorema te navedena poopćenja i analogoni teorema.

Ključne riječi: *jednakostraničan trokut, Vivianijev teorem, pravilan poligon, pravilan tetraedar*

Viviani's theorem

Abstract

In this paper, we consider the statement known in the literature as Viviani's theorem, which states that the sum of the distances from any point of an equilateral triangle to the sides of a triangle is equal to the height of that triangle. A number of proofs of the theorem are given, as well as generalizations and analogues of Viviani's theorem.

Keywords: *equilateral triangle, Viviani's theorem, regular polygon, regular tetrahedron*

*Odjel za matematiku i Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti, Sveučilište u Osijeku, email: zkolar@mathos.hr

†Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: vzdralov@mathos.hr

1 Uvod

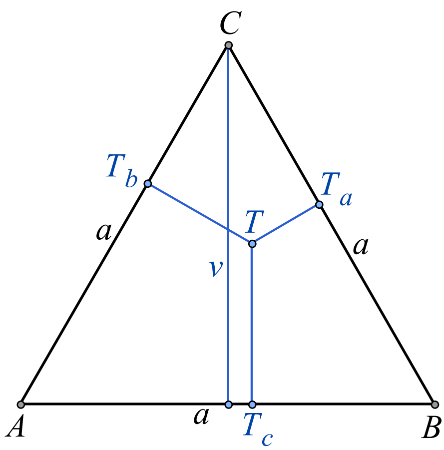
Vincenzo Viviani (1622.–1703.) talijanski matematičar i znanstvenik

Vivianijev teorem je otkriven prije nešto više od 300 godina. Otkrio ga je Vincenzo Viviani koji je rođen i odrastao u Firenci gdje je rano privlačio pažnju zbog svojih matematičkih sposobnosti. 1639. godine, u dobi od 17 godina, postao je učenik, tajnik i pomoćnik Galilea (koji je izgubio vid) u Arcetri. Viviani je pomogao Galileu u nastanku njegove knjige *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica*. Tijekom svoje duge karijere Viviani je objavio niz knjiga o matematičkim i znanstvenim temama. Uređivao je prvo izdanje Galileovih prikupljenih djela (1655.–1656.) [8].

2 Vivianijev teorem

U ovom dijelu ćemo iskazati Vivianijev teorem i dati nekoliko dokaza ove tvrdnje.

Teorem 2.1. (Vivianijev teorem) Neka je dan jednakostraničan trokut ABC. Tada je za bilo koju točku T trokuta ABC zbroj udaljenosti točke T od stranica trokuta ABC jednak visini tog trokuta.



Slika 1:

U literaturi postoji veliki broj dokaza ove tvrdnje. U radu ćemo navesti nekoliko dokaza.

1. Algebarski dokaz pomoću površina.

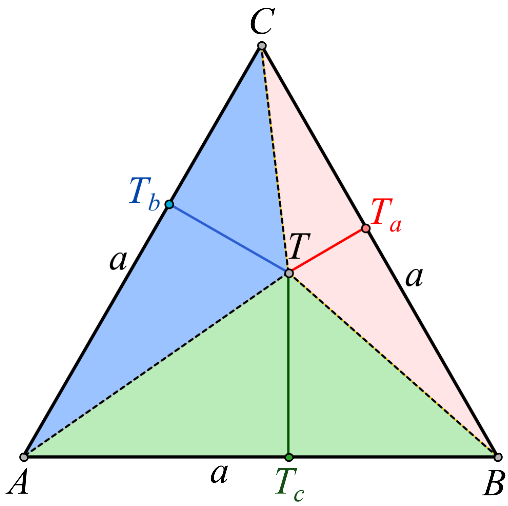
Neka su T_a, T_b i T_c nožišta okomica iz točke T na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, a v visina trokuta ABC (slika 1). Prikažimo površinu trokuta ABC pomoću zbroja površina tri trokuta kao na slici 2

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle TBC} + P_{\triangle TCA} + P_{\triangle TAB},$$

$$\frac{a \cdot v}{2} = \frac{a \cdot |TT_a|}{2} + \frac{a \cdot |TT_b|}{2} + \frac{a \cdot |TT_c|}{2}$$

odakle slijedi jednakost

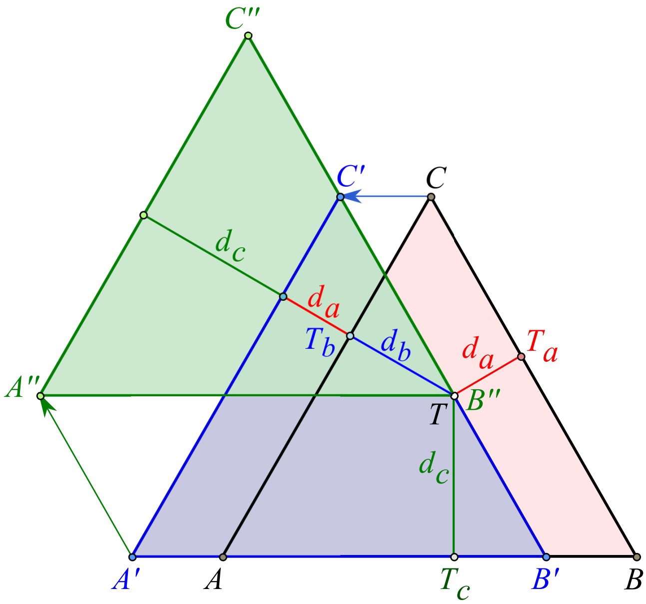
$$|TT_a| + |TT_b| + |TT_c| = v. \tag{1}$$



Slika 2: Dokaz Vivianijeva teorema pomoću površina

2. Dokaz bez riječi.

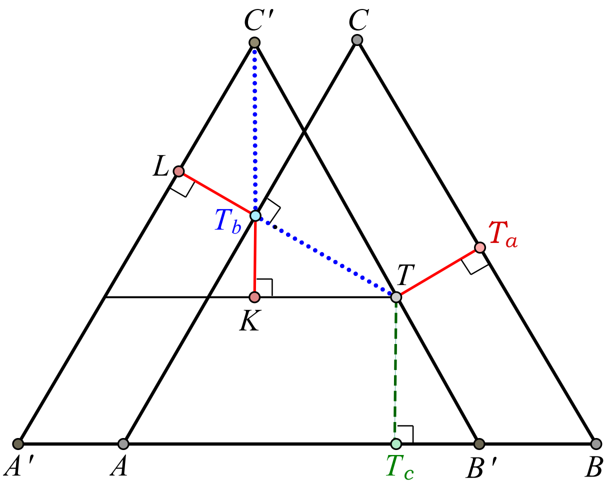
U [6] je dan dokaz bez riječi, pomoću translacije (slika 3).



Slika 3: Dokaz Vivianijeva teorema pomoću translacije

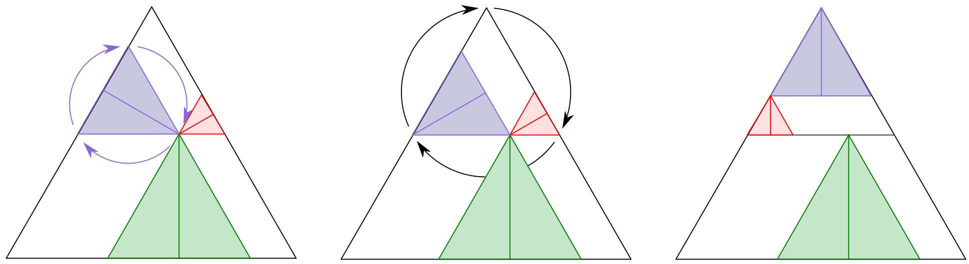
3. Dokaz bez riječi.

Wolf je u [7] dao dokaz bez riječi (slika 4).



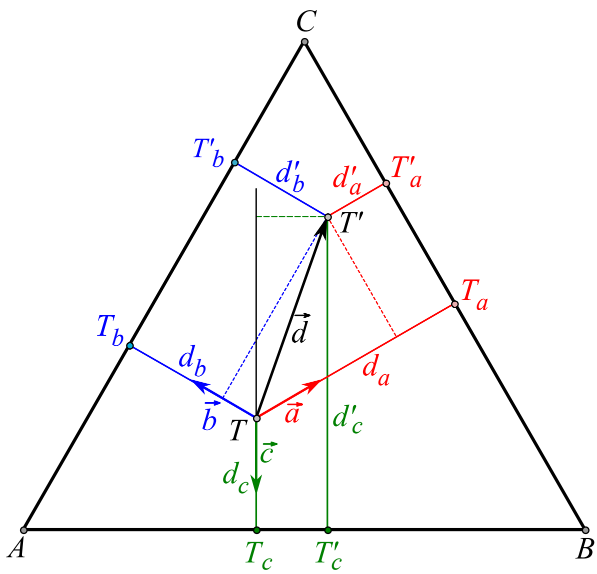
Slika 4: Dokaz Vivianijeva teorema

4. Dokaz bez riječi.
U [1] Kawasaki je dao dokaz bez riječi, pomoću rotacije (slika 5).



Slika 5: Dokaz Vivianijeva teorema pomoću rotacije

5. Dokaz bez riječi, pomoću vektora.
Samelson je u [4] dao dokaz bez riječi pomoću vektora.



Slika 6: Dokaz Vivianijeva teorema pomoću vektora

$$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}|$$
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0},$$

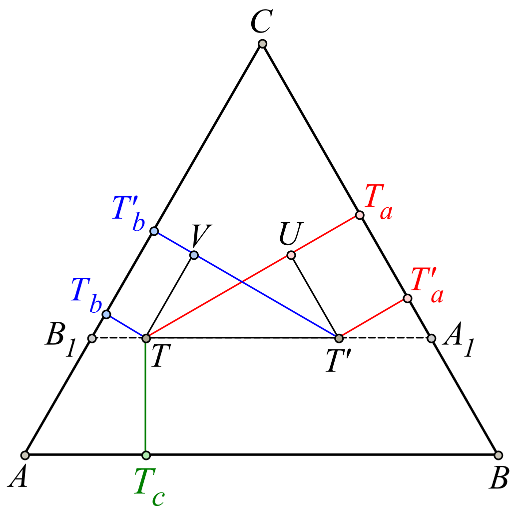
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=0,$$

$$d_a-d'_a+d_b-d'_b+d_c-d'_c=0,$$

$$d_a+d_b+d_c=d'_a+d'_b+d'_c.$$

6. Geometrijski dokaz.

Shirali je u [5] dao geometrijski dokaz Vivianijeva teorema.



Slika 7: Geometrijski dokaz Vivianijeva teorema

Neka je dana točka T jednakostraničnog trokuta ABC. Povucimo paralelu kroz T sa stranicom $\overline{AB}$. Neka ta paralela siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama B_1 i A_1 (slika 7). Očito da je za svaki položaj točke T na pravcu B_1A_1 udaljenost $d(T, AB)$ konstantna. Pokažimo sada da je suma udaljenosti točke T od stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC konstantna za svaki položaj točke T na dužini $\overline{B_1A_1}$. Neka je na dužini $\overline{B_1A_1}$ dana točka T' različita od T i neka su T'_a i T'_b nožišta okomica iz točke T' na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Moramo pokazati da vrijedi

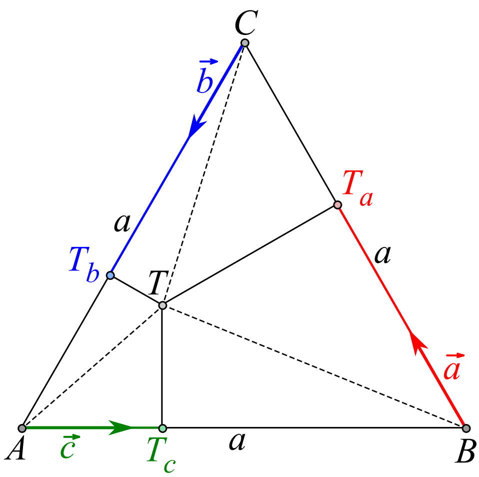
$$|TT_a|+|TT_b|=|T'T'_a|+|T'T'_b|.$$

Konstruirajmo okomice $TV\perp T'T'_b$ i $T'U\perp TT_a$. Pomičemo li T prema T' udaljenost od $\overline{AC}$ se povećava za $|T'V|$, a udaljenost od $\overline{BC}$ se smanjuje za $|TU|$. Treba dakle pokazati da je $|TU| = |T'V|$. Kako je $TV\perp T'T'_b$ i $T'U\perp TT_a$ to su točke T, T', U i V konckiličke. Nadalje, $\angle UT'T = \angle T'TV = 60^\circ$, odakle slijedi $|TU| = |T'V|$.

3 Neke posljedice Vivianijeva teorema

U [5] su navedene neke tvrdnje koje su posljedica Vivianijeva teorema. Dokaz pomoću vektora pokazuje da ako je T točka unutar jednakostraničnog trokuta ABC, a $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ bilo koja tri jedinična vektora čija je suma $\overrightarrow{0}$, tada je suma duljina projekcija $\overline{AT}$, $\overline{BT}$ i $\overline{CT}$ na $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ konstantna za svaku točku T (slika 8).

Moguće je dobiti beskonačno mnogo tvrdnji iz ove činjenice, jer je moguće izabrati takva tri jedinična vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ na beskonačno mnogo načina. Navedimo jednu mogućnost. Ako su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ jedinični vektori čiji se smjerovi podudaraju s $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ dobivamo sljedeću tvrdnju.



Slika 8: Posljedica Vivianijeva teorema

Teorem 3.1. *Neka je dan jednakostraničan trokut ABC i točka T unutar trokuta ABC. Neka su T_a, T_b i T_c nožišta okomica iz točke T na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Tada $|AT_c| + |BT_a| + |CT_b|$ ima istu vrijednost za bilo koju točku T.*

Nije teško izvesti vrijednost sume $|AT_c| + |BT_a| + |CT_b|$ za jednakostraničan trokut ABC duljine stranice a.

Ako je T središte trokutu ABC opisane kružnice tada je $|AT_c| = |BT_a| = |CT_a| = \dfrac{a}{2}$. Odavde dobivamo $|AT_c| + |BT_a| + |CT_b| = \dfrac{3a}{2}$ za bilo koju točku T unutar trokuta ABC.

Odavde također slijedi jednakost

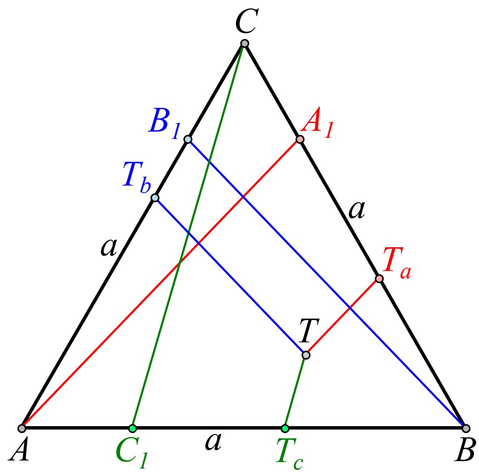
$$|AT_c| + |BT_a| + |CT_b| = |BT_c| + |CT_a| + |AT_b|.$$

4 Generalizacije Vivianijeva teorema

Sljedeći rezultati generaliziraju Vivianijev teorem o zbroju udaljenosti točke od stranica jednakostraničnog trokuta [3].

Teorem 4.1. *Ako točka T leži unutar trokuta ABC, s cevianama jednake duljine* $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$, (slika 9) *tada za zbroj duljina dužina koje su paralelne s odgovarajućim cevianama i prolaze kroz točku T vrijedi*

$$|TT_a| + |TT_b| + |TT_c| = |AA_1|. \tag{2}$$



Slika 9:

Dokaz. Iskoristimo poznatu formulu za ceviane prema kojoj vrijedi

$$\frac{|TT_a|}{|AA_1|} + \frac{|TT_b|}{|BB_1|} + \frac{|TT_c|}{|CC_1|} = 1,$$

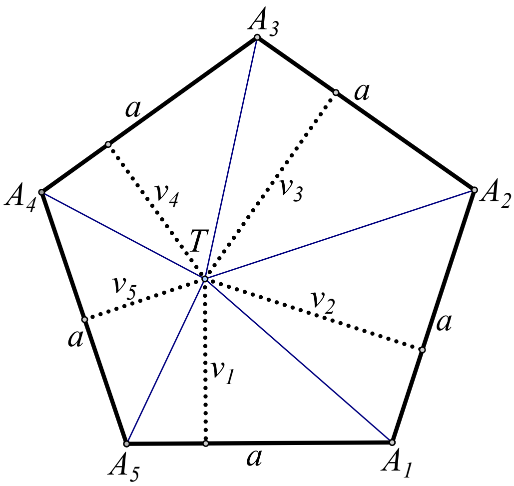
a koja slijedi direktno iz omjera površina

$$\frac{|TT_a|}{|AA_1|} = \frac{P_{\triangle TBC}}{P_{\triangle ABC}}, \quad \frac{|TT_b|}{|BB_1|} = \frac{P_{\triangle TCA}}{P_{\triangle ABC}}, \quad \frac{|TT_c|}{|CC_1|} = \frac{P_{\triangle TAB}}{P_{\triangle ABC}}.$$

□

Može se dokazati da se Vivianijev teorem može poopćiti za sve pravilne n-terokute.

Teorem 4.2. *Zbroj udaljenosti bilo koje točke T pravilnog n-terokuta do njegovih stranica neovisan je o položaju točke T.*



Slika 10: Pravilni peterokut

Dokaz. Ako su stranice pravilnog n-terokuta duljine a, a udaljenosti od točke T do stranica tog n-terokuta $v_1, v_2, \ldots, v_n$, tada je površina poligona jednaka

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} av_i,$$

dakle

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = \frac{2P}{a}.$$

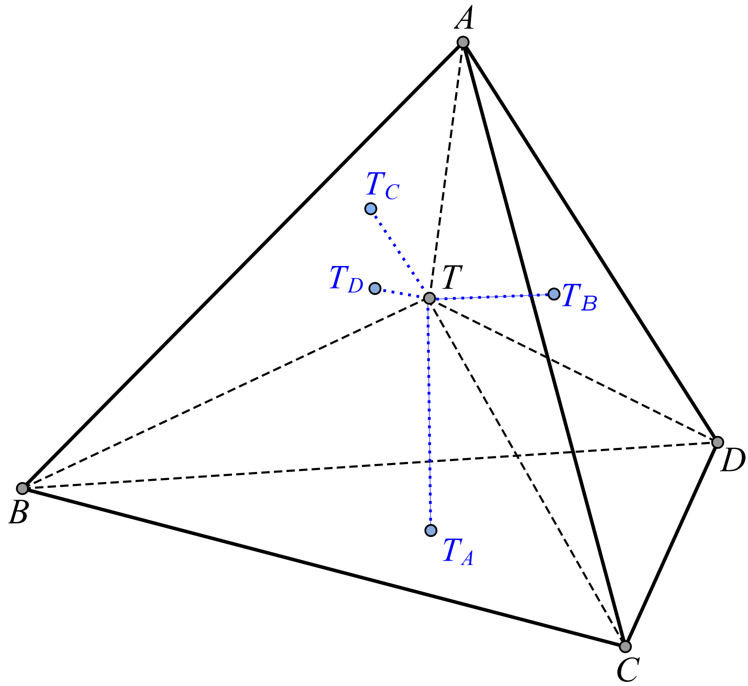
$\square$

Može se dokazati da generalizacija Vivianijeva teorema vrijedi i za poligone kojima su svi unutarnji kutovi sukladni tzv. ekviangularne poligone.

5 Analogon Vivianijeva teorema

U ovom poglavlju ćemo navesti i dokazati prostorni analogon Vivianijeva teorema korištenjem volumena.

Teorem 5.1. *Neka je T točka pravilnog tetraedra $ABCD$ i neka pravci kroz točku T okomiti na strane BCD, CDA, DAB i ABC sijeku te strane u točkama T_A, T_B, T_C i T_D. Tada je zbroj udaljenosti $|TT_A|$, $|TT_B|$, $|TT_C|$ i $|TT_D|$ jednak visini tetraedra $ABCD$.*



Slika 11: Prostorni analogon Vivianijeva teorema

Dokaz. Ako su strane pravilnog tetraedra $ABCD$ površine P, tada volumen tetraedra $ABCD$ možemo zapisati kao zbroj volumena tetraedara na sljedeći način

$$V_{ABCD} = V_{TBCD} + V_{TCDA} + V_{TDAB} + V_{TABC},$$

$$\frac{P \cdot v}{3} = \frac{P \cdot |TT_A|}{3} + \frac{P \cdot |TT_B|}{3} + \frac{P \cdot |TT_C|}{3} + \frac{P \cdot |TT_D|}{3}$$

odakle slijedi jednakost

$$|TT_A| + |TT_B| + |TT_c| + |TT_D| = v.$$

□

U [2] je dan dokaz prostornog analogona Vivianijeva teorema bez korištenja volumena.

Literatura

[1] K. Kawasaki, *Proof without Words: Viviani's Theorem*, The Mathematical Gazette, **78**(3) (2005), 213.

[2] K. Kawasaki, *On Viviani's Theorem in Three Dimensions*, The Mathematical Gazette, **89**(515) (2005), 283–287.

[3] G. Niccolier, *Proof Without Words: Viviani for Congruent Cevians*, Mathematics Magazine, **89** (2016), 216–217.

[4] H. Samelson, *Proof without Words: Viviani's Theorem with Vectors*, Mathematics Magazine, **76**(3) (2005), 225.

[5] S. Shirali, *Viviani's Theorem ... And A Cousin*, At Right Angles, **1**(2) (2012), 23–26.

[6] V. G. Tikekar, *A Proof Without Words for Viviani's Theorem*, At Right Angles, **4**(1) (2015), 5–6.

[7] S. Wolf, *Proof without Words*, Mathematics Magazine, **62**(3) (1989), 190.

[8] `http://galileo.rice.edu/sci/viviani.html`