Osječki matematički list 19 (2019), 85–107

Jordanov teorem i primjene u digitalnoj obradi slika

Rebeka Gašparić[*], Ivana Slamić[†]

Sažetak

Poznati rezultat iz topologije, Jordanov teorem o krivulji, obično se navodi kao primjer rezultata čija tvrdnja djeluje očito, ali čiji je dokaz vrlo složen. U radu su prezentirane neke zanimljivosti vezane uz taj teorem i prikazano je kako se ove ideje mogu koristiti u primjeni, preciznije, u digitalnoj obradi slika.

Ključne riječi: *krivulja, put, Jordanov teorem, digitalna slika, digitalna topologija*

The Jordan curve theorem and its applications in digital image processing

Abstract

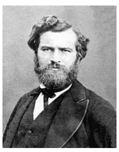
A famous result in topology, i.e., the Jordan curve theorem, is usually regarded as a result whose statement is obvious, but whose proof is very difficult. In this paper, we present some interesting facts concerning this theorem and show how these ideas can be used in applications, more precisely, in digital image processing.

Keywords: *curve, path, the Jordan curve theorem, digital image, digital topology*

[*] studentica, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci, email: rebeka.gasparic@gmail.com
[†] Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci, email: islamic@math.uniri.hr

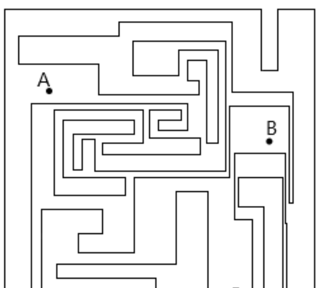
1 Uvod – intuicija i Jordanov teorem

Zamislimo da linija na slici 1 predstavlja visoku ogradu koja razdvaja dva područja, a nas zanima odgovor na pitanje: možemo li, ne prelazeći ogradu, stići iz točke A do točaka B i C? Pitanje pomalo podsjeća na dječje mozgalice, a možda bi najprirodnije bilo krenuti iz jedne točke i bojiti područje koje možemo dohvatiti, kao na slici 2(a). Tada bismo vidjeli da „ograda“ dijeli ravninu na dva dijela te bismo na temelju toga mogli utvrditi nalazi li se A u istom području kao B i C. No, slika je mogla izgledati i puno kompliciranije i u tom slučaju ovakvo rješenje možda ne bi bilo najbrže moguće. Promotrimo sada drugu metodu koja će nas brže dovesti do rješenja. Povežimo točke A i B, odnosno A i C dužinom, kao na slici 2(b). Matematički, ograda predstavlja zatvorenu krivulju bez samopresjeka, ona dijeli ravninu na dva dijela – unutrašnji i vanjski, a zaključak ćemo donijeti na sljedeći način. Siječe li dužina krivulju paran broj puta, to znači da se točke nalaze u istom području, a siječe li neparan broj puta, iz A ne možemo stići u B. Budući da u našem primjeru dužina $\overline{AB}$ siječe krivulju deset puta, iz A možemo stići u B, isto kao i iz A u C, budući da dužina $\overline{AC}$ siječe krivulju dvanaest puta. U pozadini ove jednostavne metode nalazi se izuzetno važan matematički rezultat koji je okupirao pažnju velikog broja poznatih matematičara. Taj teorem opisuje jedno važno svojstvo jednostavno zatvorenih krivulja – svojstvo koje se na prvi pogled može smatrati očitim, a koje je prvi, kao svojstvo koje je potrebno dokazati, uočio Bolzano te zatim dokaz u svojoj knjizi *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* predstavio Jordan. Po njemu ovaj rezultat nosi naziv *Jordanov teorem*.



Camille Jordan (1838.-1922.), francuski matematičar, najpoznatiji po svom radu u području teorije grupa te radu Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique u kojem je i naveden teorem promatran u ovom članku (slika preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/Camille_Jordan`*)*

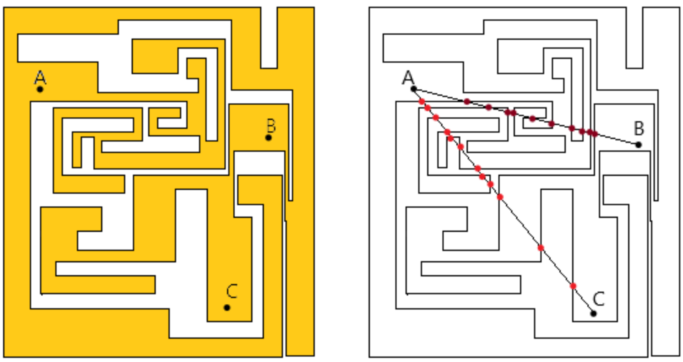
Bernard Bolzano (1781.–1848.), češki matematičar čiji rad ima veliku važnost u matematičkoj analizi. Jedan od fundamentalnih doprinosa je definiranje limesa pomoću $\epsilon - \delta$ uvjeta. (slika preuzeta `https://en.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano`*)*



Slika 1: Možemo li stići iz točke A do točaka B i C?

Jordanov teorem govori da jednostavno zatvorena krivulja u ravnini dijeli tu ravninu na dva dijela, od kojih je jedan *unutrašnji* i omeđen, a drugi *vanjski* i neomeđen te je ta krivulja rub oba navedena područja. Imajući na umu kružnicu ili elipsu, rekli bismo da tvrdnja djeluje očito. Unatoč tome, dokaz Jordanovog teorema složen je i dug te se dokaz koji je 1887. godine dao Jordan ne smatra potpuno točnim. Prvim točnim dokazom ovog teorema smatra se onaj kojeg je 1905. godine dao Veblen, a danas postoje i mnogi drugi dokazi teorema, kao i njegove generalizacije. Neki su od tih dokaza duži i elementarniji, neki kraći i elegantniji, no zahtijevaju poznavanje algebarske topologije. Rješenje gornjeg primjera zapravo je ideja dokaza Jordanovog teorema za poligone, koji je bitno jednostavniji od općeg slučaja. Razlog je taj što definicija krivulje uključuje i primjere koji nisu u skladu s našom intuicijom. Neke od tih primjera upoznat ćemo u sljedećoj cjelini, no osim ovih primjera koji ilustriraju složenost pojma i spomenutog rezultata te koji su važni s teorijskog aspekta, postoje i primjeri (prikazani, na primjer, u [7]) zanimljivi iz drugog razloga – koji pokazuju da Jordanove krivulje mogu biti prava umjetnička djela, a koja su nastala upravo inspirirana ovim rezultatom.

Oswald Veblen (1880.–1960.), američki matematičar s radom u području geometrije i topologije, koji je također našao primjenu u atomskoj fizici i teoriji relativnosti (slika je preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/Oswald_Veblen`*)*



(a) Prvo rješenje (b) Drugo rješenje

Slika 2: Možemo li stići iz točke A do točaka B i C?

Jordanov teorem primjenjuje se u raznim granama matematike, a posebno je važan u kompleksnoj analizi, no u četvrtoj cjelini, vidjet ćemo da se ove ideje prirodno javljaju kod vrlo aktualnih pitanja, primjerice u digitalnoj obradi slika. Digitalne slike u današnjem su svijetu jedan od osnovnih načina prijenosa vizualne informacije. To su slike koje vidimo na TV ekranu, računalu ili novinama, a one predstavljaju zapravo modele dvodimenzionalnih ili trodimenzionalnih objekata koje vidimo. Osnovni problem je taj što računalo poznaje samo diskretne skupove, preciznije, one koji se sastoje od najviše konačno mnogo elemenata. Tako se, na primjer, pravac prikazan na ekranu ne sastoji od neprebrojivo mnogo (iako ga tako percipiramo), nego samo od konačno mnogo točaka.

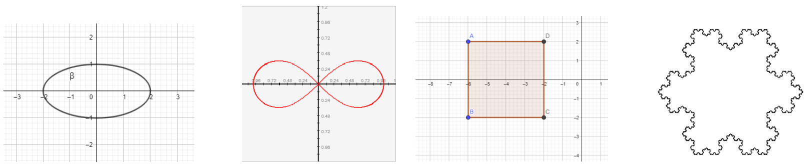
Područje digitalne obrade slika uključuje stvaranje, spremanje, manipulaciju i prezentaciju digitalnih slika. U svakom od ovih procesa u pozadini se skrivaju pitanja i problemi koji uključuju matematičke koncepte i alate. Osnovni zadatak je, prelaskom na diskretni model, sačuvati osnovne karakteristike promatranog objekta. Recimo da promatramo objekt u prostoru s određenim geometrijskim obilježjima. Tada želimo da diskretni model vjerno prikaže ta geometrijska obilježja kako ne bismo došli do krivih zaključaka. Na primjer, želimo da iz rečenice „Policajci su okružili kuću.", slijedi zaključak da je nemoguće napustiti kuću bez susreta s policajcem. Matematički rečeno, skup policajaca zapravo ima svojstva Jordanove krivulje, što omogućava policajcima da razdvoje kuću i ostatak svijeta (jasno, ovdje je situacija promatrana u dvije dimenzije, odnosno, pojedinac iz kuće nema mogućnost kretanja u tri dimenzije).

Očito je da nijedan diskretni model ne može u potpunosti prikazati sva bitna obilježja neprekidne strukture. Dakle, kod diskretnih se modela moraju napraviti kompromisi koji će ovisiti o tome kako taj model želimo iskoristiti. Iz tog se razloga uvode različiti pristupi digitalnoj topologiji. U svojoj digitalnoj verziji, Jordanov teorem kaže da se skup može reprezentirati svojim rubom što vodi do smanjenja dimenzije u reprezentaciji. Zato je taj teorem bitan za razumijevanje prostornih relacija te se koristi za grupiranje objekata u prostornim podatkovnim strukturama. Primjerice, pri spremanju digitalne slike, pitamo se postoje li karakteristike strukture te slike koje omogućuju optimalni način spremanja informacija o svakom individualnom pikselu. Odgovor na to pitanje opisat ćemo u četvrtoj cjelini, a kako bismo mogli definirati pojam digitalne ravnine i kako bismo članak prilagodili i čitateljima koji nisu upoznati s osnovama topologije, u trećoj cjelini prisjetit ćemo se najprije svih relevantnih pojmova.

2 Što sve smatramo krivuljama?

Pojam krivulje koristi se u raznim granama matematike te je jedan od pojmova za koji bismo mogli reći da je svakom od nas „intuitivno jasan". Vodeći se intuicijom, vjerojatno bi velika većina rekla da su na slikama 3(a), 3(b) i 3(d) prikazane krivulje, dok kvadrat prikazan na slici 3(c) nije krivulja. No, što predstavlja naša „intuitivna" definicija krivulje i koliko dobro njena matematička formulacija prati našu intuiciju? Poznata Kleinova izjava *Everyone knows what a curve is, until he has studied enough mathematics to become confused through the countless number of possible exceptions* možda najbolje daje odgovor na ovo pitanje i upućuje na to koliko ovom pojmu treba pažljivo pristupiti.

Christian Felix Klein (1849.-1925.), njemački matematičar, poznat po svom radu u teoriji grupa, kompleksnoj analizi i neeuklidskoj geometriji (slika je preuzeta s **`https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein`***)*



(a) Elipsa (b) Lemniskata (c) Kvadrat (d) Kochova pahuljica

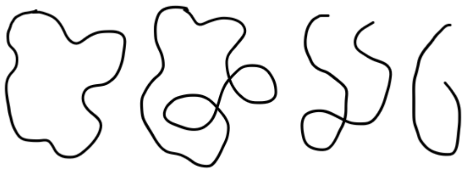
Slika 3: Različiti podskupovi od $\mathbb{R}^2$

Grubo govoreći, krivulju zamišljamo kao „liniju" koju možemo nacrtati u jednom potezu. Također je možemo shvatiti kao „trag" što ga neka čestica opisuje gibajući se kroz vrijeme u ravnini. Prirodno je zahtijevati i da to gibanje nema „skokova". Ako matematički opišemo prethodno, dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 2.1. *Put* u ravnini je neprekidno preslikavanje $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, a *krivulju* u ravnini definiramo kao sliku toga puta. *Zatvorene krivulje* su krivulje kod kojih su početna i završna točka jednake.

Tako je funkcija $f(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$ primjer puta u $\mathbb{R}^2$. Varijablu t ovdje možemo shvatiti kao vrijeme te zamišljamo da se u tom vremenskom intervalu čestica giba od točke $(0,0)$ do točke $(1,1)$ po paraboli. Kružnica i elipsa također su krivulje u ravnini, budući da su one slike neprekidnih funkcija poput $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, odnosno $\beta(t) = (2\cos(t), \sin(t))$, za $t \in [0, 2\pi]$. Uočimo da takav put nije jedinstven, jer je i slika preslikavanja $\tilde{\alpha}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 4\pi]$ ista kružnica kao ona koju definira put α (ali „prijeđena" dva puta).

Kružnica i elipsa primjeri su zatvorenih krivulja. Ako se čestica čije gibanje opisuje krivulju ne može u različitim vremenskim trenucima naći u istoj točki, odnosno, matematički, ako je preslikavanje α injekcija, onda govorimo o *jednostavnoj krivulji*. Ako je jedini trenutak u kojem se čestica nalazi u istoj točki početak, odnosno kraj gibanja, tada to gibanje opisuje *jednostavno zatvorenu krivulju*. Dakle, krivulja će biti jednostavno zatvorena ako je zatvorena i preslikavanje α je injektivno na $[a, b\rangle$. Od krivulja na slici 4, jedino je prva jednostavno zatvorena, četvrta krivulja nije zatvorena iako je definirana putem koji je injektivan na $[a, b\rangle$, druga krivulja je zatvorena, ali kao i treća krivulja, ima samopresjek, tj. put koji ih definira nije injektivan na $[a, b\rangle$.

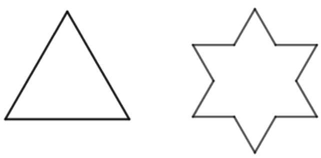


Slika 4: Krivulje u ravnini

Niels Fabian Helge von Koch (1870.–1924.), švedski matematičar s radom u području teorije brojeva (slika preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch`*)*

Karl Weierstrass (1815.–1897.), njemački matematičar, često nazivan „ocem moderne analize“. Prvi je formalizirao pojam neprekidne funkcije. (slika preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass`*)*

Kako je krivulja definirana kao neprekidna slika segmenta, mogli bismo očekivati da svaka krivulja ima *duljinu*, koja je jednaka nekom pozitivnom realnom broju. No, postoje krivulje koje nemaju to svojstvo, dok one koje imaju nazivamo *rektifikabilnim krivuljama*. Promotrimo krivulju na slici 3(d). Ta je krivulja poznata pod nazivom *Kochova pahuljica*. Nju možemo konstruirati iterativno počevši od jednakostraničnog trokuta. Svaka stranica tog trokuta modificira se tako da je podijelimo na tri segmenta jednake duljine, nad srednjim segmentom svake stranice konstruiramo jednakostraničan trokut i zatim izbrišemo osnovicu tog trokuta. Postupak ponavljamo za svaki dobiveni trokut. Kochova krivulja primjer je jednostavno zatvorene krivulje koja nije rektifikabilna. Naime, nije teško uočiti da krivulja nastala nakon n iteracija ima duljinu $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, a taj niz divergira u $+\infty$ kada $n \to \infty$.



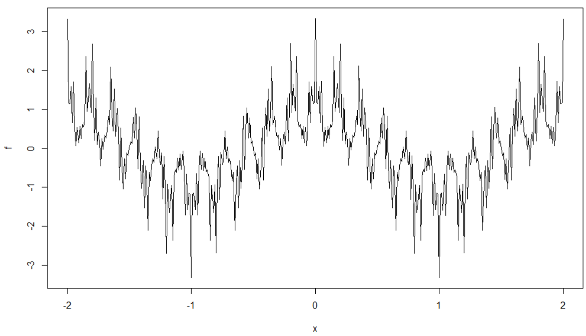
Slika 5: Prvi korak u konstrukciji Kochove pahuljice

Kad čujemo riječ *krivulja*, vjerojatno većina vizualizira "glatku" krivulju, iako smo u definiciji zahtijevali samo da funkcija bude neprekidna. No, ne samo da ne mora postojati derivacija u nekoj točki, što je lako zamisliti, nego postoje i jednostavno zatvorene krivulje definirane funkcijama koje nisu derivabilne ni u jednoj točki. Jedna od tih funkcija je *Weierstrassova funkcija*, zadana pomoću reda:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

gdje je $0 < a < 1$, a b neparan prirodan broj tako da vrijedi $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

William Fogg Osgood (1864.–1943.), američki matematičar s radom u području kompleksne analize (slika preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/William_Fogg_Osgood`*)*



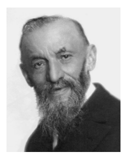
Slika 6: Graf Weierstrassove nigdje diferencijabilne funkcije

Konrad Hermann Theodor Knopp (1882.–1957.), njemački matematičar, bavio se generaliziranim limesima i kompleksnim funkcijama (slika preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/Konrad_Knopp`*)*

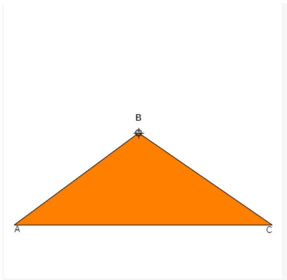
Još jedno svojstvo koje bismo prirodno očekivali je to da je krivulja podskup ravnine čija je površina 0, no to ne mora uvijek biti slučaj. Preciznije, postoje i jednostavno zatvorene krivulje s pozitivnom Lebesgueovom mjerom. Krivulje s ovim svojstvom obično se nazivaju *Osgoodove krivulje*. Na slici 7 prikazano je nekoliko iteracija u konstrukciji takve krivulje (ovaj primjer konstruirao je Knopp kao modifikaciju primjera Osgooda i Lebesguea iz 1903.). Započinjemo s trokutom iz kojeg odstranimo manji trokut tako da od početnog trokuta nastanu dva nova trokuta, pri čemu je omjer površine izbačenog trokuta i površine početnog trokuta jednak r_1. Postupak ponovimo na trokutima koje smo dobili u prethodnoj iteraciji, odnosno, u svakom od ta dva trokuta ponovno odstranimo manji trokut površine r_2 te dobivamo četiri nova trokuta. Postupak nastavljamo, a niz (r_j) možemo odabrati tako da dobijemo skup pozitivne Lebesgueove mjere.

Henri Lebesgue (1875.-1941.), francuski matematičar najpoznatiji po teoriji integracije (slika preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Lebesgue`*)*

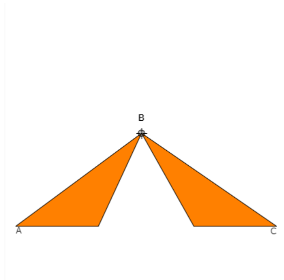
Krivulje čija je Lebesgueova mjera veća od 0 bile su poznate i prije rada Osgooda. Naime, Peano je pokazao 1890. godine da postoji neprekidna surjekcija s jediničnog segmenta $[0,1]$ u jedinični kvadrat u $\mathbb{R}^2$. Nekoliko iteracija prikazano je na slici 8. Međutim, za razliku od Osgoodove krivulje,



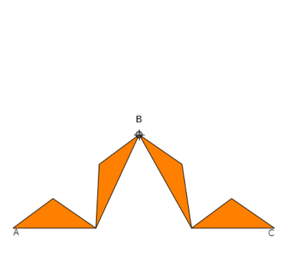
Guiseppe Peano (1858.–1932.), talijanski matematičar, jedan od utemeljitelja matematičke logike i teorije skupova (slika preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano`*)*



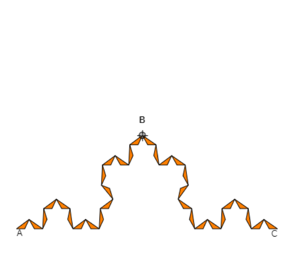
(a) Početno stanje



(b) Prvi korak konstrukcije



(c) Drugi korak konstrukcije



(d) Peti korak konstrukcije

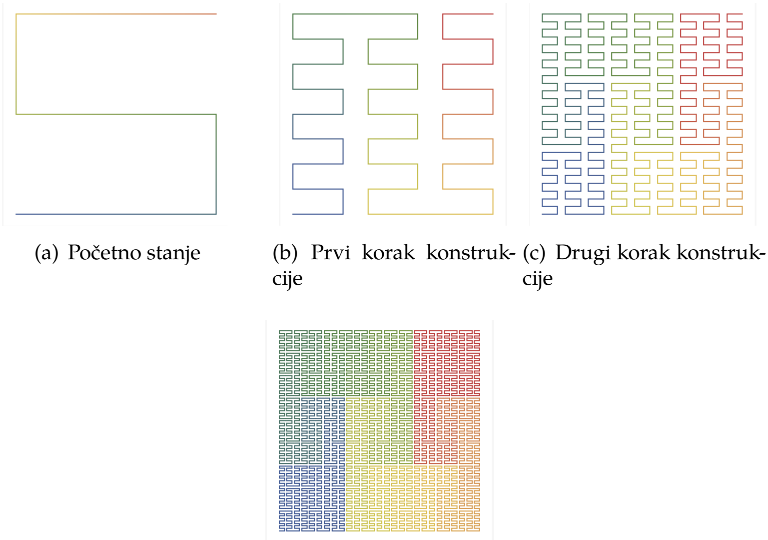
Slika 7: Konstrukcija Osgoodove krivulje

Peanova krivulja nije jednostavno zatvorena krivulja. Naime, kada bi bila, tada bi $[0,1]$ i $[0,1] \times [0,1]$ bili homeomorfni, što nije točno. Homeomorfizam je pojam koji označava preslikavanje koje čuva topološku strukturu, a preciznu definiciju navest ćemo u sljedećoj cjelini.

3 Digitalna topologija

Osnovni prostor kojeg ćemo promatrati u četvrtoj cjelini je Kartezijev produkt $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ na kojem ćemo definirati prikladnu topološku strukturu. No, prije toga, prisjetimo se osnovnih pojmova topologije.

Promatramo li na $\mathbb{R}$ otvoreni interval, $\langle a, b \rangle$, uočimo da taj skup ima svojstvo da koju god točku uzeli (i točke jako blizu rubova a i b), postoji manji otvoreni interval koji sadrži tu točku, a koji je sadržan u $\langle a, b \rangle$. Isto svojstvo vrijedi i za proizvoljnu uniju takvih intervala. Nazovimo sada podskupove od $\mathbb{R}$ koji imaju ovo svojstvo *otvorenima*. Familija svih otvorenih podsku-



(a) Početno stanje

(b) Prvi korak konstrukcije

(c) Drugi korak konstrukcije

(d) Peti korak konstrukcije

Slika 8: Konstrukcija Peanove krivulje

pova od $\mathbb{R}$ sadrži prazan skup i cijeli $\mathbb{R}$, zatvorena je na proizvoljne unije i na konačne presjeke. Na taj način otvoreni intervali određuju jednu (*standardnu* ili *euklidsku*) *topologiju* na $\mathbb{R}$. Familije s ovim svojstvom možemo promatrati na proizvoljnom nepraznom skupu.

Definicija 3.1. Neka je X neprazan skup. Familiju $\mathcal{T}$ podskupova od X koja zadovoljava uvjete:

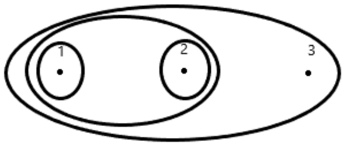
(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(T2) unija proizvoljno mnogo elemenata iz $\mathcal{T}$ je element iz $\mathcal{T}$,

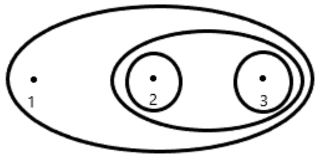
(T3) presjek konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{T}$ je element iz $\mathcal{T}$,

zovemo *topologija (ili topološka struktura)* na X, a $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor*. Elemente skupa X nazivamo *točke*, a elemente familije $\mathcal{T}$ *otvoreni skupovi*.

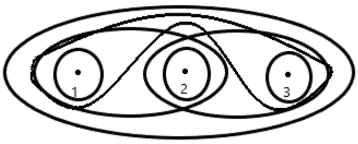
Na slici 9 prikazani su primjeri topologija na skupu $\{1, 2, 3\}$, odnosno $\{1, 2, 3, 4\}$ na način da su istaknuti neprazni elementi tih topologija (otvoreni skupovi).



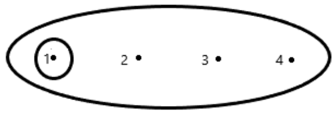
(a) $X = \{1, 2, 3\}$,
$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\}$



(b) $X = \{1, 2, 3\}$,
$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, X\}$



(c) $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T}_3 = \mathcal{P}(X)$



(d) $Y = \{1, 2, 3, 4\}$,$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{1\}, Y\}$

Slika 9: Primjeri topologija na skupu $\{1, 2, 3\}$, odnosno $\{1, 2, 3, 4\}$

Uz pojam otvorenog skupa, usko je vezan i pojam *zatvorenog skupa*. Za podskup skupa X kažemo da je zatvoren ako mu je komplement otvoren. *Interior* skupa A u X je unija svih otvorenih podskupova od X sadržanih u A, odnosno to je najveći otvoreni skup kojeg A sadrži te se označava s $\mathrm{Int}(A)$. *Zatvarač skupa* A u X je presjek svih zatvorenih podskupova od X koji sadrže A, odnosno, to je najmanji zatvoreni skup koji sadrži skup A te se označava s $\mathrm{Cl}(A)$. *Rub skupa* A u X definiran je sa $\partial A = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)$, a može se pokazati da je to zapravo skup $\mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$. Za točku x_0 prostora X, svaki podskup N od X čiji interior sadrži x_0 nazivamo *okolinom* te točke.

Koristeći ovako uvedenu terminologiju, možemo definirati i pojam neprekidnog preslikavanja među dvama topološkim prostorima.

Definicija 3.2. Preslikavanje $f : X \to Y$ je *neprekidno u točki* $x_0 \in X$ ako za svaku okolinu V točke $f(x_0)$ postoji okolina U točke x_0 takva da vrijedi $f(U) \subseteq V$.

Neprekidnost funkcije između dva topološka prostora često je najlakše provjeriti pomoću karakterizacije koja kaže da je neprekidnost ekvivalentna činjenici da je praslika $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ svakog otvorenog skupa V u Y otvoren skup u X.

U primjeru neprekidnosti, kao i u mnogim drugim primjerima, određeno svojstvo koje treba vrijediti za cijelu familiju $\mathcal{T}$ (odnosno otvorene skupove) dovoljno je provjeriti samo za određenu podfamiliju dane topologije. To je podfamilija od $\mathcal{T}$ koja se naziva *baza* topologije $\mathcal{T}$.

Definicija 3.3. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za podfamiliju $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ kažemo da je *baza* topologije $\mathcal{T}$ ako se svaki element iz $\mathcal{T}$ može prikazati kao unija nekih elemenata iz $\mathcal{B}$.

Često se topologija na nekom skupu X zadaje preko baze. Preciznije, zadaje se familija $\mathcal{B}$ podskupova tog skupa koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(B1) $\mathcal{B}$ je pokrivač od X, odnosno X je jednak uniji elemenata iz $\mathcal{B}$,

(B2) ako je $x_0 \in A \cap B$ za neke $A, B \in \mathcal{B}$, onda postoji $C \in \mathcal{B}$ takav da je $x_0 \in C \subseteq A \cap B$.

Može se pokazati da je takva familija baza jedinstvene topologije na X, pri čemu su otvoreni skupovi točno oni podskupovi od X koji se mogu prikazati kao unija nekih elemenata iz $\mathcal{B}$.

Za dva topološka prostora X i Y jedno od važnih pitanja je možemo li jedan od njih smjestiti u drugi tako da se njihove strukture ne promijene. Da bismo definirali smještenje jednog prostora u drugi, za početak trebamo definirati pojam homeomorfizma.

Definicija 3.4. *Homeomorfizam* je neprekidna bijekcija $f : X \to Y$ takva da je i inverzno preslikavanje $f^{-1} : Y \to X$ neprekidno.

Prema karakterizaciji neprekidnih funkcija među topološkim prostorima, zaključujemo da je f homeomorfizam ako i samo ako je bijekcija, $f(U)$ otvoren u Y za svaki otvoreni skup U u X te da je $f^{-1}(V)$ otvoren u X za svaki otvoreni skup V u Y. Dakle, homeomorfizam je preslikavanje koje čuva topološku strukturu te će dva prostora biti homeomorfna ako su oni, topološki gledano, „jednaki". Topološki prostori opisani slikama 9(a) i 9(b) su homeomorfni. Naime, ispitivanjem prethodno navedenog uvjeta, lako se provjeri da je preslikavanje f definirano s $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$ homeomorfizam. S druge strane, ovi prostori nisu homeomorfni prostorima opisanim slikama 9(c) i 9(d). Naime, X i Y su konačni skupovi i imaju različit broj elemenata pa ne postoji bijekcija između tih skupova. Nadalje, uočimo da su svi jednočlani podskupovi od X otvoreni s obzirom na $\mathcal{T}_3$ pa, kada bi prostor na opisan slikom 9(c) bio homeomorfan prostoru sa slike

9(a), i njihovi originali, koji su jednočlani podskupovi od X trebali bi biti otvoreni s obzirom na $\mathcal{T}_1$, međutim, taj uvjet nije ispunjen.

Neka je sada $f : X \to Y$ neprekidna injekcija, gdje su X i Y topološki prostori. Na $f(X)$ promatramo *relativnu topologiju* određenu topologijom na Y, što znači da su otvoreni skupovi oblika $U \cap f(X)$, gdje je skup U otvoren u Y. Korestrikcija $f : X \to f(X)$ je bijekcija, a ukoliko je i homeomorfizam, onda kažemo da je f *smještenje* topološkog prostora X u topološki prostor Y te ćemo reći da je prostor X *smješten* u prostor Y.

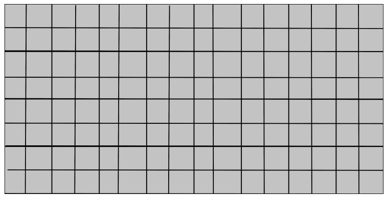
Arthur Moritz Schönflies (1853.–1928.), njemački matematičar, poznat po doprinosima primjeni teoriji grupa u kristalografiji te radu u području topologije (slika preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Moritz_Schoenflies`*)*

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881.–1966.), nizozemski matematičar i filozof, bavio se topologijom, teorijom skupova, teorijom mjere i kompleksnom analizom (slika preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/L._E._J._Brouwer`*)*

Sada možemo definirati jednostavno zatvorenu krivulju u proizvoljnom topološkom prostoru pomoću smještenja. Neka je $S^1 = \{x : |x| = 1\}$ jedinična kružnica. Ako je $f : S^1 \to X$ smještenje, tada je slika od f *jednostavno zatvorena krivulja* u X ili, drugim riječima, jednostavno zatvorena krivulja je homeomorfna slika kružnice. Koristeći ovu terminologiju, Jordanov teorem kaže da kružnica smještena u ravninu dijeli tu ravninu na dva dijela – unutrašnji i vanjski i da je ta kružnica rub oba dijela. Vrijedi i jača tvrdnja, koju je dokazao Schönflies 1906. godine, a koja kaže da je svako smještenje kružnice u ravninu može proširiti do homeomorfizma cijele ravnine i takvo preslikavanje preslikava homeomorfno unutrašnje područje određeno kružnicom (tj. otvoreni krug $x^2 + y^2 < 1$) na unutrašnjost određenu tom jednostavno zatvorenom krivuljom te analogno vrijedi za vanjštinu. Brouwer je 1912. godine dokazao Jordanov teorem u višim dimenzijama, dokazavši da svako smještenje n-dimenzionalne sfere S^n u $\mathbb{R}^{n+1}$ dijeli $\mathbb{R}^{n+1}$ na dva dijela, a slika sfere s obzirom na to smještenje je rub svake komponente. S druge strane, analogon Schönfliesovog teorema ne vrijedi u višim dimenzijama.

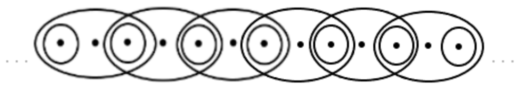
Nas će u nastavku zanimati jedna drugačija varijanta Jordanovog teorema koju smo spomenuli u uvodu, a koja je važna u području digitalne obrade slika. Zamislimo da smo mobitelom napravili fotografiju nekog krajolika i odlučili je pogledati na računalu. Ako bismo sliku na ekranu povećavali, u jednom trenutku uočili bismo da je sastavljena od polja kvadratića. Ti kvadratići čine najmanje elemente digitalne slike koji se nazivaju *pikseli* (eng. *pixel*, kratica od riječi *picture element*). Svaki od tih kvadratića određen je trima brojevima koji određuju njegovu boju. Stoga, pojednostavljeno, o prikazu digitalne slike možemo razmišljati kao o pravokutnom polju piksela, kao što je prikazano na slici 10. Kako bismo napravili matematički model, to polje nadalje shvaćamo kao podskup od $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, a na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ želimo definirati odgovarajuću topologiju.

Na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ postoji prirodna topologija koju taj skup nasljeđuje kao potprostor od $\mathbb{R}$. To znači da su otvoreni skupovi oni podskupovi od $\mathbb{Z}$ koji se mogu dobiti kao presjeci nekog otvorenog skupa u $\mathbb{R}$ i skupa $\mathbb{Z}$. Kako je za svaki $m \in \mathbb{Z}$ skup $\{m\}$ jednak presjeku otvorenog in-



Slika 10: Pravokutno polje piksela

tervala $\langle m-1, m+1 \rangle$ i $\mathbb{Z}$, to znači da su svi jednočlani skupovi, a onda i svi podskupovi od $\mathbb{Z}$, otvoreni. Drugim riječima, takva topologija jednaka je partitivnom skupu skupa $\mathbb{Z}$. Topologiju definiranu na proizvoljnom skupu s ovim svojstvom nazivamo *diskretnom topologijom*. No, nas će u nastavku zanimati topologija na $\mathbb{Z}$ definirana na drugi način, kao jedinstvena topologija koju definira baza $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{Z}\}$, gdje je $B_n = \{n-1, n, n+1\}$ ako je n paran, odnosno $B_n = \{n\}$ ako je n neparan.



Slika 11: Digitalni pravac – elementi baze topologije

Digitalna ravnina je topološki prostor $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{T})$, gdje je $\mathcal{T}$ topologija koju na Kartezijevom produktu $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ inducira baza $\mathcal{B} = \{B_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$, pri čemu su skupovi $B_{m,n}$ definirani na sljedeći način:

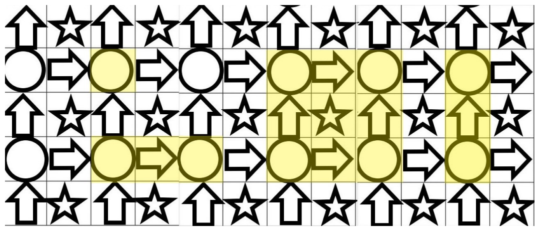
$$B_{m,n} = \begin{cases} \{(m,n)\}, & \text{ako su } m \text{ i } n \text{ neparni,} \\ \{(m+a,n) : a = -1,0,1\}, & \text{ako je } m \text{ paran i } n \text{ neparan,} \\ \{(m,n+b) : b = -1,0,1\}, & \text{ako je } m \text{ neparan i } n \text{ paran,} \\ \{(m+a,n+b) : a,b = -1,0,1\}, & \text{ako su } m \text{ i } n \text{ parni.} \end{cases}$$

Za svaki $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, element $B_{m,n}$ je najmanji element baze koji sadrži točku (m,n). Ovisno o parnosti brojeva m i n, razlikujemo četiri vrste točaka:

- ako su m i n neparni, točku (m,n) nazivamo *otvorenom točkom* i ona predstavlja jednotočkovni otvoreni skup u digitalnoj ravnini (označavamo s $\circ$)

- ako su i m i n parni, točku (m, n) nazivamo *zatvorenom točkom* te se najmanji element baze koji je sadrži sastoji od devet točaka (označavamo s ★)
- ako su m i n različite parnosti, točke koje oni predstavljaju nazivamo *mješovitim točkama* te se najmanji element baze koji ih sadrži sastoji od tri točke (označavamo s $\uparrow$ i $\rightarrow$).

Na slici 12 je prikazano kako izgledaju prethodno opisani elementi baze (označeni žutom bojom).



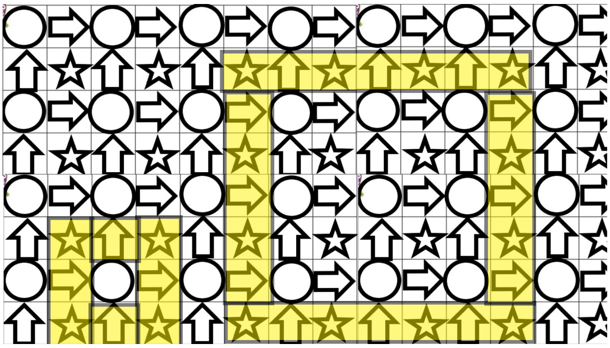
Slika 12: Elementi baze digitalne ravnine

Često je topologija na nekom skupu inducirana nekom metrikom na tom skupu, pri čemu se otvoreni skupovi, odnosno topologija, definiraju na sličan način kao u slučaju euklidske topologije, a ulogu otvorenih intervala preuzimaju *otvorene kugle*. Topološke prostore s ovim svojstvom nazivamo *metrizabilnima* (za definicije ovih pojmova i primjere vidjeti, na primjer, [5]). Međutim, digitalna ravnina nije metrizabilan prostor. Naime, kada bi bio, onda bi prostor morao biti i *Hausdorffov*, odnosno različite točke mogli bismo razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima. Kako u svaki otvoreni skup u nekom prostoru možemo upisati neki element baze, a za parove neparnih brojeva pripadni elementi baze koji ih sadrže se sijeku, taj prostor nije Hausdorffov.

4 Digitalna obrada slika i Jordanov teorem

Potprostor digitalne ravnine koji se sastoji od otvorenih točaka nazivamo *vidljivim ekranom* i označavamo ga s $\mathbb{V}$. U našem modelu, vidljiv ekran odgovara skupu piksela koje vidimo u prikazu digitalne slike, to jest, vidljiv ekran je ono što zapravo vidimo kada promatramo digitalnu sliku.

Na slici 13 prikazani su skupovi točaka u digitalnoj ravnini koji tvore 1×1 i 3×3 polje piksela u vidljivom ekranu. Ta polja okružena su skupovima od 8 i 24 točaka, respektivno. Može se pokazati da vrijedi općenita



Slika 13: Polja piksela

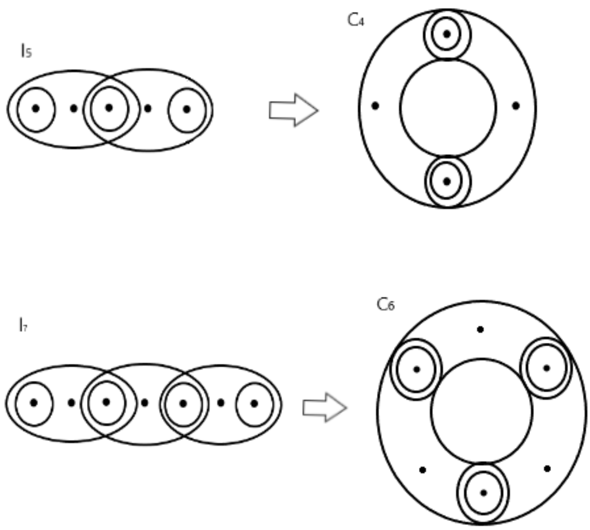
tvrdnja, odnosno da je svako $n \times n$ polje otvorenih točaka okruženo skupom od $8n$ točaka digitalne ravnine. Dakle, ako želimo spremiti digitalnu sliku kvadratnog oblika, veličine 1000×1000 piksela, imamo dvije opcije – možemo spremiti lokaciju svakog od milijun, na primjer, plavih piksela ili možemo spremiti lokaciju točaka koje okružuju našu sliku u digitalnoj ravnini, a koje indiciraju da su točke vidljivog ekrana koje taj skup okružuje plave. Pohranjujući samo informacije o „okružujućim“ skupovima točaka, pohranili bismo informacije o cijeloj slici, te na taj način, već za $n > 8$, smanjili prostor potreban za pohranu slike. Što je n veći, ušteda prostora bila bi sve značajnija.

Ovaj princip može se generalizirati i na općenitije digitalne slike. Naime, digitalnu sliku možemo predstaviti kao familiju klasa tako da se u svakoj klasi nalazi točka iste boje. Svaku od tih klasa htjeli bismo reducirati na skupove točaka koji ih okružuju te ih ujedno i na jedinstven način predstavljaju. U nastavku su opisani rezultati koji daju odgovor na to pitanje. Osnovni pojam koji ćemo definirati je pojam *digitalne jednostavno zatvorene krivulje*, ali prije toga, prisjetimo se pojma kvocijentne topologije.

Ako je X topološki prostor, A neki skup i $p : X \to A$ surjekcija, definiramo da je podskup U od A otvoren ako i samo ako je $p^{-1}(U)$ otvoren u X. Familija takvih podskupova od A čini topologiju na A koja se naziva *kvocijentna topologija*. Preslikavanje p naziva se *kvocijentno preslikavanje*. Neka je sada X^* neka particija skupa X, odnosno familija disjunktnih podskupova od X čija je unija jednaka X i $p : X \to X^*$ surjekcija koja svakom elementu iz X pridružuje odgovarajući element iz X^*. Tada preslikavanje p inducira kvocijentnu topologiju na X^*, a prostor X^* naziva se *kvocijentni prostor*. Intuitivno, takav model oponaša proces lijepljenja, odnosno sažimanja određenih dijelova polaznog prostora.

Ako, primjerice, promotrimo segment $X = [0,1]$ i definiramo particiju $X^* = \{\{x\} : 0 < x < 1\} \cup D$, gdje je $D = \{0,1\}$, onda u prostoru X^* na D gledamo kao na jednu točku, odnosno zamišljamo da smo identificirali rubne točke segmenta $[0,1]$. Rezultirajući prostor homeomorfan je jediničnoj kružnici S^1. Na temelju tog svojstva definiramo pojam *digitalne kružnice*.

Podskup $\{m, m+1, \ldots, n\}$ od $\mathbb{Z}$ snabdjeven relativnom topologijom koju nasljeđuje od digitalnog pravca naziva se *digitalni interval*. Za neparan prirodan broj $n \geqslant 5$, definiramo *digitalnu kružnicu* kao topološki prostor C_{n-1} nastao identifikacijom točaka 1 i n digitalnog intervala $I_n = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ kao što je ilustrirano na slici 14. S te se slike također vidi što će biti otvoreni podskupovi u kvocijentnom prostoru. Prema definiciji, digitalna kružnica sadrži paran broj točaka.



Slika 14: Digitalne kružnice C_4 i C_6

Definicija 4.1. Neka je X topološki prostor. *Digitalna jednostavno zatvorena krivulja* u X je potprostor od X koji je homeomorfan digitalnoj kružnici.

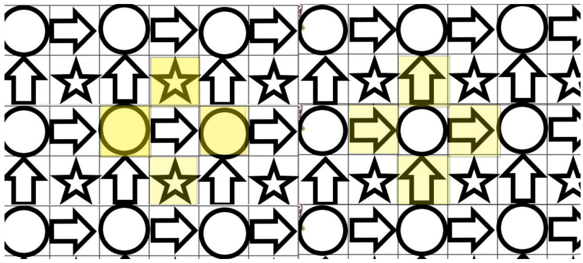
Promotrimo skupove na slici 13, odnosno 15. Uočimo da je skup A na slici 15 jednostavno zatvorena krivulja, ali B nije. Označimo, radi jednostavnosti, točke koje čine C_4 sa a, b, c, d, odnosno koje čine skup A sa a', b', c', d'. Ako definiramo preslikavanje $f : C_4 \to A$, $f(x) = x', x \in \{a, b, c, d\}$, uočimo najprije da je to preslikavanje bijekcija. Nadalje, na skupu A promatramo relativnu topologiju, što znači da su otvoreni podskupova od A skupovi oblika $U \cap A$ gdje je U otvoren podskup od $\mathbb{Z}^2$. Stoga su neprazni otvoreni podskupovi od A skupovi $\{a'\}$, $\{c'\}$, $\{a', b', c'\}$ i $\{a', c', d'\}$ i njihove unije. S druge strane, neprazni otvoreni podskupovi od C_4 su skupovi$\{a\}$, $\{c\}$, $\{a, b, c\}$ i $\{a, c, d\}$ i njihove unije. Sada se lako provjeri da vrijedi traženi uvjet, odnosno da je f homeomorfizam. Sličnim postupkom, također se provjeri da su skupovi na slici 13 digitalne jednostavno zatvorene krivulje, pri čemu je lijeva krivulja homeomorfna digitalnoj kružnici C_8, a desna C_{24}. S druge strane, skup na slici 15 označen slovom B nije digitalna jednostavno zatvorena krivulja. Naime, jedina digitalna kružnica kojoj bi B mogao biti homeomorfan je C_4, no između tih skupova ne možemo uspostaviti homeomorfizam budući da je topologija definirana na skupu B diskretna pa bi, zaključujući kao i u primjeru sa slike 9, onda i topologija na C_4 trebala biti disketna.

Napomenimo ovdje da se pojam digitalne kružnice pomoću kvocijentne topologije mogao definirati i za neparne brojeve, međutim, nije teško vidjeti da tako definirani skup ne bi bio homeomorfan nijednom potprostoru digitalne ravnine.

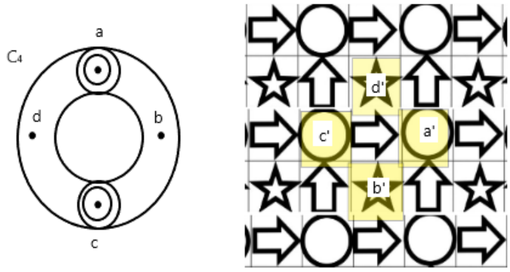
Uočimo sada da, iako je skup A sa slike 15 digitalna jednostavno zatvorena krivulja koja dijeli ravninu na dva dijela, taj skup nema jedno drugo svojstvo koje se traži u Jordanovom teoremu. Preciznije, kako A sadrži otvorene točke digitalne ravnine, jednočlani skupovi koji sadrže te točke ne sijeku niti jedno od dva područja na koja skup A dijeli ravninu pa A nije rub nijednog od ta dva područja. Stoga digitalna varijanta Jordanovog teorema mora biti formulirana na drugačiji način.

Teorem 4.1 (Digitalni Jordanov teorem o krivulji). *Neka je A digitalna jednostavno zatvorena krivulja u digitalnoj ravnini. Tada A dijeli digitalnu ravninu na dvije komponente. Nadalje, A je rub svake komponente ako i samo ako je A zatvoreni podskup digitalne ravnine.*

Dokaz ovog teorema (kao i preostalih teorema u ovome poglavlju) može se pronaći u [1], poglavlje 11. Glavna razlika između Jordanovog teorema i njegove digitalne verzije je ta da je jednostavno zatvorena krivulja u $\mathbb{R}^2$ (s euklidskom topologijom) uvijek rub dijelova na koje ona dijeli tu ravninu, dok u digitalnoj ravnini to nije uvijek slučaj. Preciznije, digitalna krivulja bit će rub tih komponenti ako i samo ako je dana krivulja zatvoren skup. Bitno je naglasiti da će jednostavno zatvorena krivulja uvijek biti zatvoren skup u $\mathbb{R}^2$. Iz tog razloga u standardnoj verziji Jordanovog teorema



(a) Podskupovi digitalne ravnine (A je lijevi skup, B desni)



(b) C_4 i A su homeomorfni

Slika 15: Skup A je jednostavno zatvorena digitalna krivulja, dok B nije

nije bitno navoditi taj dodatan uvjet, dok je u digitalnoj verziji bitan budući da zatvorene krivulje nisu nužno zatvoreni skupovi. Pomoću sljedećeg teorema lako određujemo hoće li zadana krivulja biti zatvoren podskup digitalne ravnine ili ne.

Teorem 4.2. *Neka je A jednostavno zatvorena krivulja u digitalnoj ravnini. Tada je A zatvoren podskup digitalne ravnine ako i samo ako A ne sadrži nijednu otvorenu točku.*

Na primjer, obje se krivulje prikazane na slici 13 sastoje samo od zatvorenih i mješovitih točaka, što znači da su one zatvoreni podskupovi ravnine u kojoj se nalaze. No, krivulja A na slici 15 sadrži dvije otvorene točke, iz čega zaključujemo da A nije zatvoren skup.

Sljedeće što želimo pokazati je da područja od kojih se sastoji komplement jednostavno zatvorene digitalne krivulje u digitalnoj ravnini razlikujemo po tome što je jedno omeđeno, a drugo nije. No, prvo ćemo definirati pojam omeđenosti u digitalnoj ravnini.

Definicija 4.2. Skup A u digitalnoj ravnini je *omeđen* ako postoji $M \in \mathbb{Z}_+$ takav da vrijedi $|m| \leq M$ i $|n| \leq M$ za svaki $(m, n) \in A$. U suprotnom kažemo da je A *neomeđen*.

Drugim riječima, A je omeđen u digitalnoj ravnini ako se A nalazi unutar kvadrata čiji je središte u ishodištu.

Teorem 4.3. *Ako je A digitalna jednostavno zatvorena krivulja u digitalnoj ravnini, tada ona tu ravninu dijeli na dvije komponente, od kojih je jedna omeđena, a druga neomeđena.*

Vratimo se sada ponovno na problem pohrane digitalne slike. Pretpostavimo da imamo digitalnu sliku – sliku prikazanu pomoću piksela. Definirajmo particiju $\mathcal{P}$ vidljivog ekrana $\mathbb{V}$ u digitalnoj ravnini tako da se svaki skup particije sastoji od klase piksela iste boje. Kao što smo naveli prije, zanima nas je li moguće pohraniti sliku kao familiju skupova koji okružuju svaku od tih klasa. Odnosno, pitamo se možemo li je poistovjetiti s familijom digitalnih krivulja koje određuju skupove u particiji $\mathcal{P}$.

U klasičnom Jordanovom teoremu, jednostavno zatvorena krivulja dijelila je ravninu na dvije komponente koji su povezani podskupovi od $\mathbb{R}^2$, odnosno oni podskupovi koji se ne mogu prikazati kao unija dvaju nepraznih disjunktnih otvorenih skupova. Kako je topologija od $\mathbb{V}$ je diskretna topologija (prema definiciji digitalne topologije, svaka je otvorena točka otvoren skup), jedini povezani podskupovi bit će jednočlani skupovi, stoga je ovdje potrebno uvesti alternativni pojam povezanosti.

Definicija 4.3.
(i) Neka je $p = (m, n)$ točka vidljivog ekrana. Točke $(m - 2, n), (m + 2, n), (m, n - 2)$ i $(m, n + 2)$ su *4-okolne* točki p.

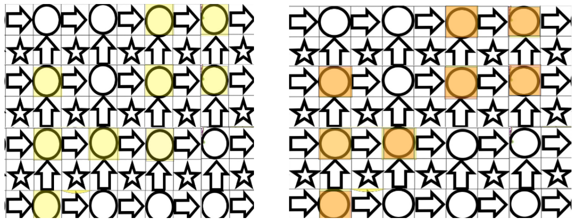
(ii) Skup C vidljivog ekrana je *4-povezan* ako za svaki par točaka $p, q \in C$ postoji niz točaka iz C, $p = p_1, ..., p_n = q$, takav da je točka p_{i+1} 4-okolna točki p_i za svaki $i = 1, ..., n - 1$.

Za proizvoljnu točku vidljivog ekrana, točke koje su joj 4-okolne su one točke koje su u vidljivom ekranu „susjedne horizontalno ili vertikalno“ izabranoj točki. Na slici 16 prikazan je jedan 4-povezan skup i jedan skup koji nije 4-povezan. Analogno se definira i 8-okolnost točke, no to nam za naša razmatranja nije potrebno.

Sljedeća definicija opisuje proces kojim sliku vidljivog ekrana prebacujemo u familiju „okružujućih“ skupova točaka u digitalnoj ravnini.

Definicija 4.4. Neka je $\mathcal{P}$ particija vidljivog ekrana koja se sastoji od 4-povezanih skupova od kojih je samo jedan neomeđen. Skup digitalne ravnine definiran s:

$$S_{\mathcal{P}} = \bigcup_{D \in \mathcal{P}} \partial(\mathrm{Cl}(D))$$



Slika 16: Podskupovi vidljivog ekrana (lijevi je 4-povezan, desni nije).

zove se *crtež* definiran s $\mathcal{P}$.

Dakle, crtež definiran s $\mathcal{P}$ je skup $S_{\mathcal{P}}$ dobiven unijom rubova zatvarača svakog skupa u particiji $\mathcal{P}$. Može se pokazati da je to zapravo unija digitalnih jednostavno zatvorenih krivulja u $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathbb{V}$, odnosno to su krivulje koje se nalaze u komplementu vidljivog ekrana s obzirom na digitalnu ravninu. Idući nam teorem govori da se particija $\mathcal{P}$ može dohvatiti iz crteža kojeg ona definira, a to je upravo odgovor na naše prvobitno pitanje o pohrani digitalne slike.

Teorem 4.4. *Neka je $\mathcal{P}$ particija vidljivog ekrana određena 4-povezanim skupovima od kojih je najviše jedan neomeđen i neka je $S_{\mathcal{P}}$ crtež određen s $\mathcal{P}$. Tada je familija $\mathcal{P}^* = \{C \cap \mathbb{V} : C$ je komponenta od $\mathbb{Z}^2 \setminus S_{\mathcal{P}}\}$ particija vidljivog ekrana i vrijedi $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$.*

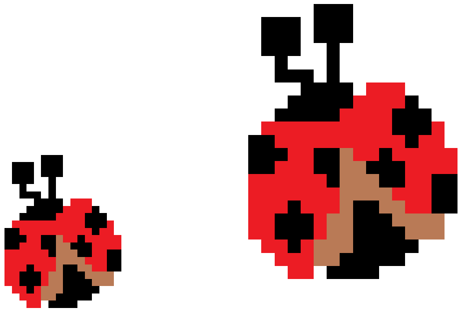
Sada možemo ukratko rezimirati proces pohranjivanja i dohvaćanja digitalne slike:

(i) Za odabranu digitalnu sliku, definiramo particiju vidljivog ekrana tako da su svi skupovi koji čine particiju 4-povezani i sve točke određenog skupa te particije imaju istu boju (pri čemu različiti skupovi u particiji mogu imati istu boju).

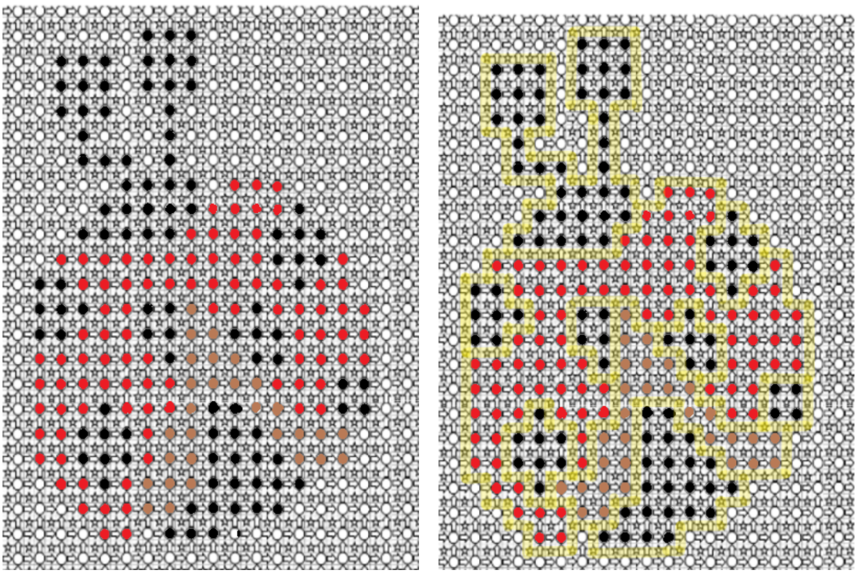
(ii) Kako bismo pohranili sliku, definiramo crtež određen particijom. Također možemo spremiti i informacije o bojama naglašavajući koji je dio digitalne zatvorene krivulje u crtežu koje boje.

(iii) Dohvatimo particiju uzimajući presjeke vidljivog ekrana sa svakom komponentom komplementa crteža u digitalnoj ravnini.

Na slici 17(a) prikazana je jedna jednostavna slika. Ako bismo je malo uvećali, uočili bismo da je ta slika sastavljena od kvadratića, odnosno piksela, kojih je ukupno 214. Na slici 17(c) slika je prikazana u digitalnoj ravnini. Uočimo da se pikseli mogu razvrstati u deset klasa, tako da se u svakoj klasi nalaze pikseli iste boje (različite klase mogu imati istu boju) i te su



(a) Jednostavna slika (b) Jednostavna slika, uvećana verzija



(c) Prikaz u digitalnoj ravnini (d) Crtež

Slika 17: Primjer jednostavne slike

klase piksela 4-povezani skupovi. Na slici 17(d) žutom bojom je prikazan crtež digitalne slike.

Napomenimo da slika 17(a) služi samo kao ilustracija postupka, pokazuje vrlo pojednostavljen primjer te bismo, brojanjem točaka u crtežu, odnosno u vidljivom ekranu vjerojatno uočili da ovim pristupom možda i nismo bitno uštedjeli prostor. Nadalje, uvećavanjem složenijih slika, na primjer, fotografija krajolika na našem računalu, vidjeli bismo da su susjedni pikseli najčešće različitih boja, te bi ovakav pristup bio samo složeniji i, zapravo, ne bi ni imao previše smisla. No, u slikama čiji se dijelovi sastoje od vrlo jednostavnih boja, pri čemu je velik skup piksela iste boje, kao što je, na primjer, slika 18, ta bi ušteda bila značajna. Digitalna topologija je pojam koji je prvi put uveden u radu [6] te područje koje se istražuje i danas, s primjenama u području digitalne obrade slika i umjetne inteligencije. Ovaj primjer također pokazuje važnost topoloških ideja i koncepata u područjima za koje možda ne bismo na prvi pogled pomislili da bi mogli imati neki utjecaj.

Slika 18: Slika kod koje su velike skupine piksela istih boja (slika je preuzeta s `https://www.clipartwiki.com/`)

Zahvala

Autorice zahvaljuju recenzentu na korisnim sugestijama.

Literatura

[1] C. Adams, R. Franzosa, *Introduction to Topology: Pure and Applied*, Pearson Prentice Hall, 2008.

[2] R. Gašparić, *Jordanov teorem i primjene*, završni rad, Nacionalni repozitorij završnih i diplomskih radova ZIR, 2018.

[3] T. Hales, *The Jordan Curve Theorem, Formally and Informally*, The American Mathematical Monthly, **114** (2007), no. 10, 882–894.

[4] E. Khalimsky, R. Kopperman, P. R. Meyer, *Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets*, Topology and its Applications, **36** (1990), 1–17.

[5] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[6] A. Rosenfeld, *Digital Topology*, The American Mathematical Monthly, **86** (1979), 621–630.

[7] F. Ross, W. Ross, *The Jordan curve theorem is non-trivial*, Journal of Mathematics and the Arts, **5** (2011), no. 8, 213–219.

[8] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, skripta, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2009.