Osječki matematički list 19 (2019), 109–122

Koliko je točaka ...

Petar Žugec*

Sažetak

U članku obrađujemo problem iz područja zabavne matematike, vezan uz ukupan broj točaka na kugli zemaljskoj koje zadovoljavaju određeno svojstvo. Analizu problema i rješenja odvodimo i korak dalje od izvorne formulacije, dotičući se Cantorove teorije transfinitnih brojeva.

ključne riječi: *točke na kugli, Cantorova teorija skupova, kardinalni i transfinitni brojevi*

How many points are there ...

Abstract

The article addresses an entertaining problem from recreational mathematics, concerning the total number of points satisfying a given property on the globe. Both the problem and the solution are taken a step further from their original formulation, up to the Cantor's theory of cardinal and transfinite numbers.

keywords: *points on sphere, Cantor's set theory, cardinal and transfinite numbers*

*Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: pzugec@phy.hr

1 Problem

Koliko je točaka na kugli zemaljskoj takvih da se kretanjem kilometar južno, kilometar istočno pa kilometar sjeverno vratimo u polaznu točku?

Ovaj problem jedan je iz niza poznatih logičkih pitalica s razgovora za posao u Microsoftu [1, 2]. Mi ćemo svakako ponuditi izravan i uobičajen odgovor na pitanje. No vidjet ćemo i da se na izvorni problem prirodno nadovezuju dodatna pitanja, svakako vrijedna dublje analize.

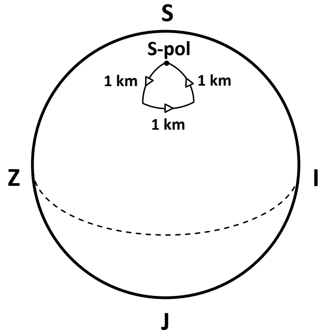
1.1 Osnovno rješenje

Prva točka koja nam pada na pamet zasigurno je sjeverni pol (slika 1). Očito, u tom slučaju putanja nalikuje na sferni trokut[1] kojemu je jedan vrh upravo sjeverni pol. Vrijedi komentirati da se pitanje u prvi tren može učiniti zbunjujućim razmišljamo li o zemljopisnim smjerovima (sjever, jug, istok, zapad) u kontekstu zemljopisne karte, s obzirom da su u slučaju najjednostavnijeg mapiranja – koje odgovara projiciranju Zemljina oplošja na pravokutnu površinu[2] – zemljopisni smjerovi sjever–jug i istok–zapad međusobno okomiti. Stoga praćenjem danih smjernica na takvoj karti iscrtavamo tri stranice kvadrata te putanja naizgled ostaje otvorenom. U navedenoj vrsti projekcije, oba pola – i sjeverni i južni – potpuno su rastegnuta preko vrha i dna karte, odnosno čitav gornji i donji rub karte odgovaraju samo dvjema izoliranim zemljopisnim točkama: gornji rub sjevernome, a donji rub južnome polu. Prema tome, iako na takvoj karti opisana putanja uvijek izgleda otvorenom, ako se početna i završna točka obje nalaze na sjevernom ili južnom rubu karte, nakon „zamatanja“ karte natrag u sferu našle bi se preklopljene. Možda nije naodmet napomenuti i sljedeće: dok u navedenoj projekciji smjerovi jug–sjever i zapad–istok odgovaraju smjerovima Kartezijevih koordinatnih x i y osi, na sferi se poklapaju sa smjerovima prirasta konvencionalno definiranih sfernih kutnih koordinata: sjever–jug sa smjerom polarne θ-koordinate, a zapad–istok sa smjerom azimutne φ-koordinate.

Još preostaje odrediti je li sjeverni pol jedino rješenje početnog problema? Prije prelaska na sljedeći dio teksta pozivam čitatelja da se samostalno okuša u nalaženju dodatnih točaka, ako postoje. Zadovoljstvo samostalnog nalaženja odgovora svakako je vrijedno pokušaja.

[1] S obzirom da spojnica istok–zapad ne leži ni na kojoj od velikih kružnica kugle, ovakva putanja ne zadovoljava strogu definiciju sfernog trokuta (ravnine u kojima leže velike kružnice moraju prolaziti središtem kugle).

[2] Ovakva projekcija pripada klasi cilindričnih projekcija, od kojih je najpoznatija i najčešće korištena tzv. Merkatorova projekcija.



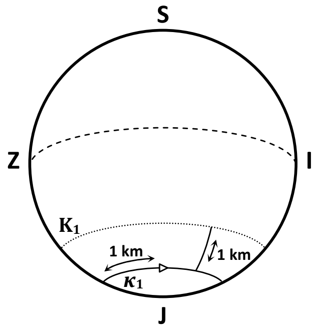
Slika 1: Sjeverni pol kao jedno rješenje problema.

1.2 Dodatna rješenja

Ovaj put krenimo od južnog pola. Krenimo sjeverno (kamo drugo?) sve dok se ne nađemo na zemljopisnoj širini gdje je opseg zemljopisne paralele (kružnice na Zemljinoj površini koja leži u ravnini paralelnoj s ekvatorom) točno 1 km. Na slici 2 ta paralela odgovara manjoj kružnici κ_1. Zatim nastavimo sjeverno, hodajući 1 km po Zemljinoj površini sve dok se ne nađemo na paraleli K_1 sa slike 2. Ako sada iz bilo koje točke kružnice K_1 krenemo 1 km južno, po konstrukciji ćemo doći na kružnicu κ_1. A nastavimo li 1 km istočno po κ_1, napravit ćemo jedan puni krug duž njezina opsega od točno 1 km, vrativši se u istu točku iz koje smo krenuli na istok. Naposlijetku, povratkom 1 km sjeverno (potpuno istim putem kojim smo išli na jug), vraćamo se točno u polaznu točku na K_1! Prema tome, čitava kružnica K_1 skup je točaka – njih neprebrojivo beskonačno mnogo – koje zadovoljavaju početni problem.

No primijetimo da niti ovdje nije kraj. Naime, ponovimo postupak konstrukcije kružnica κ_1 i K_1, no tako da manju kružnicu κ_1 zamijenimo kružnicom κ_n čiji je opseg jednak $1/n$ km, gdje je n prirodan broj ($n \in \mathbb{N}$). Kružnicu K_n ponovno nalazimo 1 km sjeverno od κ_n. Praćenjem početnih smjerova i obilaženjem dane kružnice κ_n 1 km u smjeru istoka, obilazimo je točno n puta, ponovno se vraćajući u istu točku. Odavde je opet moguće vratiti se u polaznu točku na K_n, 1 km sjeverno. Dakle, svaka točka svake kružnice K_n također je rješenje početnoga problema, a tih kružnica ima onoliko koliko je prirodnih brojeva: prebrojivo beskonačno mnogo.

U konačnici zaključujemo da je ukupan broj traženih točaka beskonačan! Pri tome je jednak umnošku dviju beskonačnosti: one koja odgovara ukupnome broju točaka na pojedinoj kružnici i one koja odgovara ukup-



Slika 2: Konstrukcija kružnice K_1, kao dodatnog rješenja problema.

nom broju prihvatljivih kružnica. Možemo li reći nešto više o svakoj od tih beskonačnosti? Možemo! No za to nam je potreban...

1.3 Izlet u Cantorovu teoriju skupova

Označimo s $\aleph_0$ beskonačnost koja odgovara količini prirodnih brojeva, a s $\mathfrak{c}$ beskonačnost koja odgovara ukupnoj količini realnih brojeva. Drugim riječima, neka je $\aleph_0$ broj elemenata skupa prirodnih brojeva[3], a $\mathfrak{c}$ broj elemenata skupa realnih brojeva, tj. broj točaka kontinuuma.

Do sada smo vidjeli da je ukupan broj točaka koje predstavljaju rješenje izvornog problema jednak $\aleph_0\mathfrak{c} + 1$, gdje $\aleph_0$ odgovara ukupnom broju kružnica, $\mathfrak{c}$ ukupnome broju točaka svake kružnice, dok dodatna jedinica korespondira sjevernome polu. Možemo li reći nešto o tolikoj beskonačnosti, svesti je na veću od njih ili možda na neki treći stupanj beskonačnosti? Ima li uopće smisla govoriti o različitim razinama beskonačnosti ili su sve beskonačnosti jednake? Jasan odgovor na sva ova pitanja – i mnogo više od toga – nalazimo unutar Cantorove teorije skupova: da, logički je neizbježno postojanje različitih razina beskonačnosti! Pri tome su $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$ samo najniže među njima, tek prvi članovi u beskonačnome nizu rastućih beskonačnosti, tzv. *transfinitnih brojeva*. Štoviše, pokazuje se da je naš polazni izraz $\aleph_0\mathfrak{c} + 1$ jednak „samo“ $\mathfrak{c}$. Drugim riječima, da smo od svih kružnica K_n uspjeli identificirati samo jednu kao rješenje, već bismo imali točan odgovor na pitanje „koliko je točaka...“. Stoga zaključujemo da bi

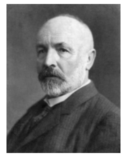
[3] Formalni naziv za broj elemenata skupa, posebice kada govorimo o skupovima s beskonačno mnogo elemenata, jest *kardinalni broj* skupa. Uobičajena oznaka za kardinalni broj skupa prirodnih brojeva je $\aleph_0$, što se čita „alef nula“, prema prvome slovu hebrejske abecede (ℵ: alef).

relevantnija formulacija početnoga problema glasila: „koje je geometrijsko mjesto točaka...“.

Postojanje različitih beskonačnosti i njihov međusobni odnos među najzanimljivijim su i povijesno najkontroverznijim pitanjima Cantorove teorije skupova. Na samome početku Cantorove ideje o različitim tipovima beskonačnosti širom su dočekane kao kontroverzne, iako je bilo i njihovih pristalica koji su odmah prepoznali važnost i valjanost njegovih revolucionarnih koncepcija. Zahvaljujući svojoj logičkoj čvrstoći, isprva „heretična“ Cantorova otkrića s vremenom su se jasno etablirala kao istinita, što se najljepše odražava u slavnoj Hilbertovoj izjavi „Nitko nas neće istjerati iz raja koji je Cantor stvorio za nas.“ koja se, naravno, odnosi na Cantorovu teoriju skupova. Jedno od najlaskavijih priznanja Cantorovoj teoriji svakako jest činjenica da ju je – među brojnim vrsnim matematičarima – vrijednom nepodijeljene pažnje našao i Kurt Gödel, danas prepoznat kao jedan od najznačajnijih logičara u povijesti, koji je teoriju skupova dalje revolucionarizirao [3], nastavivši gaziti Cantorovim koracima.

Kao izvrstan uvod u Cantorovu teoriju skupova može poslužiti vrlo pristupačan pregledni članak [4], iz kojeg je bez zadrške očita revolucionarna priroda već i najranijih Cantorovih rezultata. Ona se očituje u uznemirujućoj suprotstavljenosti našeg intuitivnog poimanja beskonačnosti – u potpunosti utemeljenog na poimanju konačnog – spram strogog logičkog i nepristranog pristupa istoj. I dok su intuitivne koncepcije, kao neadekvatne generalizacije konačnosti, podložne najrazličitijim vrstama paradoksā, predrasudama neopterećen pristup teorije skupova slobodan je od takvih kontradikcija. Dubok osvrt na povijesni razvoj, prihvaćanje i nezaustavljivo širenje Cantorovih ideja može se pronaći u knjizi [5], čije je relevantno poglavlje slobodno dostupno u [6].

Ohrabreni postojanjem teorije koja nam omogućava prebrojavanje beskonačnog, vratimo se izvornome problemu točaka od interesa na kugli zemaljskoj i ranijoj tvrdnji da je ukupan broj identificiranih točaka – bilo s jedne od kružnica K_n, bilo s beskonačno mnogo njih – jednak kardinalnome broju kontinuuma $\mathfrak{c}$, odnosno ukupnome broju točaka na brojevnome pravcu. Osnovni princip pri prebrojavanju beskonačnih skupova uspostava je *bijekcije* s nekim referentnim skupom čiji nam je stupanj beskonačnosti (tj. kardinalni broj) poznat, poput skupa prirodnih ili realnih brojeva[4]. Bez ulaženja u strogi simbolički iskaz definicije, bijekciju možemo



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845.–1917.), otac moderne teorije skupova. „Skup je Mnogo koje si dopušta da o njemu razmišljamo kao o Jednome.“

David Hilbert (1862.–1943.), jedan od najutjecajnijih matematičara s početka 20. stoljeća. „Nitko nas neće istjerati iz raja koji je Cantor stvorio za nas.“

Kurt Gödel (1906.–1978.), jedan od najznačajnijih logičara u povijesti. „Unatoč njihovoj udaljenosti od osjetilnog iskustva, mi doista imamo nešto poput poimanja predmeta teorije skupova, što se očituje u činjenici da nam se njezini aksiomi silovito nameću kao istiniti.“

[4] Valja napomenuti da činjenica da su kardinalni brojevi skupova prirodnih i realnih brojeva različiti ($\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$) nije nimalo trivijalna te je upravo njezino otkriće dovelo do rođenja teorije skupova. Danas se ona najlakše dokazuje *Cantorovim dijagonalnim argumentom* koji je toliko poznat i slavan da ga se sasvim lako nalazi u bilo kojoj referenci na ovu temu.

opisati kao *preslikavanje jedan-na-jedan*, odnosno sparivanje koje na jedinstven način svakom elementu jednog skupa pridružuje točno jedan element drugog skupa i suprotno. Drugim riječima, bijektivnim sparivanjem svi elementi obaju skupova su iskorišteni i svaki ima jedinstvenog parnjaka iz drugog skupa.

Principom uspostave bijekcije vrlo lako se pokazuje da je kardinalni broj (tj. ukupan broj točaka) bilo kojeg otvorenog intervala realnih brojeva jednak kardinalnome broju čitavog skupa realnih brojeva, odnosno ukupnome broju svih realnih brojeva. Za početak, svaki otvoreni interval $\langle a, b\rangle$ možemo preslikati na bilo koji drugi otvoreni interval $\langle c, d\rangle$ (uz $a < b$ i $c < d$) bijekcijom:

$$x \mapsto c + \frac{d-c}{b-a}(x-a). \tag{1}$$

To pokazuje da svi otvoreni intervali sadrže jednako mnogo točaka, neovisno o njihovoj duljini! Uzmimo da smo ovime neki početni interval bijektivno preslikali na interval $\langle -1, 1\rangle$, na kojem imamo nekoliko jednostavnih bijektivnih funkcija na čitav skup realnih brojeva, poput $x/(1-x^2)$ ili $\mathrm{tg}(\pi x/2)$ ili pak $\mathrm{arth}(x)$ (area tangens hiperbolni). Prema tome, primjenom ovih funkcija svakoj točki intervala $\langle -1, 1\rangle$ na jedinstven način možemo pridružiti točku brojevnoga pravca i suprotno: primjenom inverznih funkcija – poput $(\sqrt{4x^2+1}-1)/2x$ ili $2\,\mathrm{arctg}(x)/\pi$ ili $\mathrm{th}(x)$ – svakoj točki brojevnoga pravca možemo pridružiti jedinstvenu točku intervala $\langle -1, 1\rangle$.

Da bismo ustvrdili da svaka od kružnica K_n sadrži jednako mnogo točaka kao i brojevni pravac – odnosno da su kružnica i pravac ekvipotentni – trebamo riješiti samo jednu tehničku poteškoću koja se ne uklapa u paradigmu prethodnog dokaza s otvorenim intervalima: za obuhvaćanje skupa svih točaka na kružnici potreban nam je poluotvoreni interval! Naime, pokušamo li svaku točku kružnice identificirati njenim kutnim otklonom φ s obzirom na neku proizvoljnu os (koja leži u ravnini kružnice i prolazi njenim središtem), bit će nam potreban raspon kutova $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Predstavlja li sad ova dodatna rubna točka $\varphi = 0$ neku fundamentalnu, nepremostivu komplikaciju po pitanju uspostave bijekcije sa skupom realnih brojeva? Naravno da ne. Štoviše, Cantor-Schröder-Bernsteinov teorem jamči da bijekcija između dvaju skupova postoji čim postoje injekcije s jednog u drugi skup, i obratno, što je tipično puno lakše pokazati nego konstruirati neku konkretnu bijekciju. Međutim, ništa nije toliko uvjerljivo poput primjera, stoga ćemo doista navesti jednu bijekciju sa zatvorenog intervala $[0, 1]$ na skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Opisani primjer čitatelj može lako modificirati na bijekciju s poluotvorenog intervala na $\mathbb{R}$, koja je potrebna za dokaz ekvipotentnosti kružnice i brojevnog pravca. Definirajmo prvo funkciju

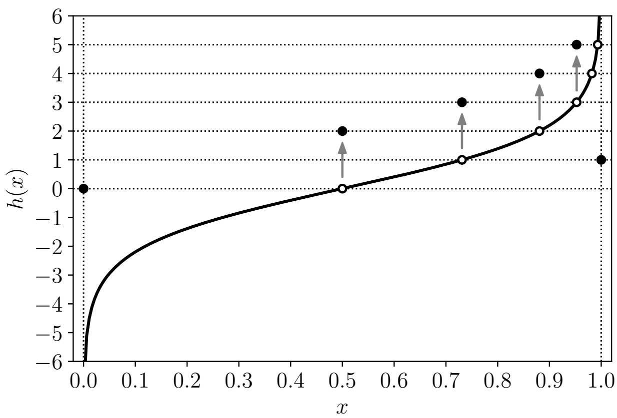
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \notin \mathbb{N}_0 \\ x + 2 & ; \quad x \in \mathbb{N}_0 \end{cases} , \tag{2}$$

gdje je $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ skup prirodnih brojeva proširen nulom. Izaberimo sada proizvoljnu bijekciju $g : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R}$ s *otvorenog* intervala $\langle 0, 1 \rangle$ na $\mathbb{R}$. Tada je funkcija $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$:

$$h(x) = \begin{cases} f(g(x)) & ; \quad x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ 1 & ; \quad x = 1 \end{cases} \tag{3}$$

bijekcija sa *zatvorenog* intervala $[0, 1]$ na $\mathbb{R}$. Slika 3 prikazuje primjer bijekcije $h(x)$ uz $g(x) = 2 \operatorname{arth}(2x - 1)$. Primjenom (1) i malom promjenom ideje iz (3) čitatelj će lako pronaći bijekciju s poluotvorenog intervala na čitav skup realnih brojeva[5], odnosno s kružnice na pravac: s $[0, 2\pi\rangle$ na $\mathbb{R}$.



Slika 3: Primjer bijekcije $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ iz (3), uz $g(x) = 2 \operatorname{arth}(2x - 1)$.

[5] Jedan od alternativnih načina početna je uspostava bijekcije $f : [0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$, poput:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \neq (n-1)/n \text{ za } n \in \mathbb{N} \\ n/(n+1) & ; \quad x = (n-1)/n \text{ za } n \in \mathbb{N} \end{cases} ,$$

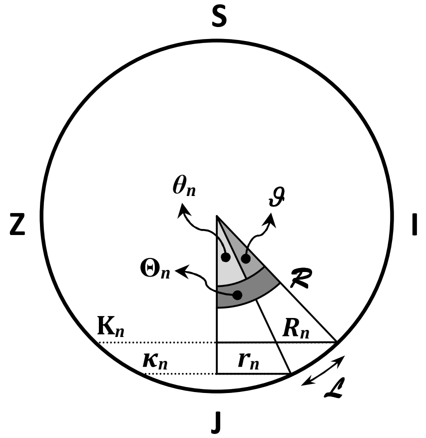
praćene bilo kojom bijekcijom s $\langle 0, 1 \rangle$ na $\mathbb{R}$.

Konačno, jedno od najneintuitivnijih Cantorovih otkrića jest činjenica da broj točaka sadržanih u prostoru ne ovisi od dimenziji prostora. Drugim riječima, pravac se sastoji od isto toliko točaka kao i ravnina, kao čitav trodimenzionalni prostor ili prostor bilo koje više dimenzije! I ovo ćemo pokazati uspostavom bijekcije, i to između otvorenog intervala $\langle 0, 1\rangle$ na pravcu i otvorenog jediničnog kvadrata $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ u ravnini. Već smo pokazali da je interval $\langle 0, 1\rangle$ ekvipotentan $\mathbb{R}$. Iz prirode dokaza sasvim je očito da je jedinični kvadrat ekvipotentan čitavoj ravnini $\mathbb{R}^2$ jer bijekciju između intervala $\langle 0, 1\rangle$ i pravca samo treba primijeniti na obje koordinate točaka kvadrata i točaka ravnine. Prema tome, samo ostaje ustanoviti ekvipotentnost otvorenog jediničnog intervala i otvorenog jediničnog kvadrata. Dokaz je sljedeći. Koordinate x i y točaka otvorenog jediničnog kvadrata možemo prikazati u decimalnom zapisu kao $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ i $y = 0.b_1b_2b_3\ldots$, gdje su a_i i b_i znamenke $0, 1, 2, \ldots, 9$. Sada svakom paru koordinata (x, y) možemo pridružiti jedinstven[6] broj z jediničnog otvorenog intervala, koji konstruiramo kao $z = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$, naizmjeničnim korištenjem znamenaka brojeva x i y. Očito, krenemo li od nekog broja z otvorenog jediničnog intervala, uvijek ga možemo na jedinstven način „odmotati“ u par koordinata jediničnog kvadrata, čime smo uspostavili bijekciju između tih dvaju skupova. Dokaz se lako poopćuje na trojke koordinata jedinične kocke – odnosno na čitav trodimenzionalni prostor $\mathbb{R}^3$ – i dalje: na n-torke koordinata n-dimenzionalne (hiper)kocke, tj. na čitav n-dimenzionalni prostor $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. U kontekstu početnog problema, pokazali smo da bi odgovor na pitanje „koliko je točaka...“ ostao jednak čak i da se čitava površina kugle zemaljske ispostavila kao rješenje, što još jednom potvrđuje da je primjerenija formulacija početnog pitanja: „koje je geometrijsko mjesto točaka...“.

2 Dublja analiza početnog problema

Vratimo se početnome problemu. Nakon što smo opisno identificirali točke od interesa, pokušajmo ih sve egzaktno matematički parametrizirati. Pri tome ćemo radi jednostavnosti Zemlju smatrati savršenom kuglom radijusa $\mathcal{R}$, a zadanu udaljenost od 1 km ćemo tretirati općenitije, kao proizvoljnu udaljenost $\mathcal{L}$ (slika 4). Naravno, da bismo zadovoljili uvjet pro-

[6] Svaki realni broj ima decimalni zapis, ali ne nužno jedinstven! Tako su, na primjer, i 0.5 i 0.4999... valjani zapisi broja $1/2$ (za pristupačan uvod, vidi [7]). Dokaz iz glavnog teksta zahtijeva da se koristi samo jedan tip zapisa jer bi se u suprotnome par točaka poput $(x, y) = (1/2, 0)$ mogao preslikati i u $z = 0.50000\ldots = 1/2$ i u $z = 0.40909\ldots = 9/22$. Ovo ne čini dokaz nevaljanim, no nećemo se upuštati u daljnju argumentaciju ove tehničke pojedinosti; zainteresiranog čitatelja samo upućujemo u taj mali tehnički problem.



Slika 4: Geometrijske veličine potrebne za analizu problema.

blema – da je neprekidno kretanje u smjeru juga ili sjevera uopće moguće – mora vrijediti $\mathcal{L} < \pi\mathcal{R}$ jer je $\pi\mathcal{R}$ maksimalna duljina kružnog luka na spojnici sjevernog i južnog pola.

Koordinatni sustav postavit ćemo tako da je ishodište u središtu Zemlje, a z-os je usmjerena prema sjevernom polu. Koordinate sjevernog pola – čije geometrijsko mjesto ćemo opisati radijvektorom $\vec{R}_0$ – tada su trivijalne:

$$\vec{R}_0 = (\,0\,,\,0\,,\,\mathcal{R}\,). \tag{4}$$

U parametrizaciji točaka kružnica K_n svakako će nam pomoći postupak njihove konstrukcije. Pri tome će nam za parametrizaciju njihovih radijvektora $\vec{R}_{n,\varphi}$ biti potrebne dvije varijable: jedna cjelobrojna ($n \in \mathbb{N}$) kojom ćemo odrediti na kojoj kružnici se nalazimo; druga realna ($\varphi \in \mathbb{R}$) kojom ćemo popisati sve točke dane kružnice. Varijabla φ je azimutna koordinata sfernog koordinatnog sustava (projiciramo li točku prostora na x-y ravninu, φ je kut koji spojnica ishodišta i projekcije točke zatvara s x-osi). Također ćemo iskoristiti i vrlo prikladnu definiciju sfernog polarnog kuta θ koji radijvektor dane točke zatvara sa z-osi. Jedina razlika u odnosu na uobičajenu definiciju je da ćemo radi jednostavnosti kut θ mjeriti s obzirom na negativni dio z-osi, umjesto pozitivnoga.

Sada se vodimo slikom 4. Po konstrukciji manjih kružnica κ_n znamo da im je opseg $2r_n\pi$ jednak $\mathcal{L}/n$. Ovime je njihov radijus r_n izravno određen kao:

$$r_n = \frac{\mathcal{L}}{2n\pi}. \tag{5}$$

Kako za kut θ_n – pola kuta pod kojim se kružnica κ_n vidi iz ishodišta – vrijedi $\sin\theta_n = r_n/\mathcal{R}$, onda također slijedi:

$$\sin\theta_n = \frac{\mathcal{L}}{2n\pi\mathcal{R}}. \tag{6}$$

Kut ϑ za koji se moramo pomaknuti sjeverno da bismo došli od κ_n do K_n uvijek je jednak:

$$\vartheta = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}}. \tag{7}$$

Kut Θ_n, pola kuta pod kojim se kružnica K_n vidi iz ishodišta, jednak je:

$$\Theta_n = \theta_n + \vartheta. \tag{8}$$

Sada je lako parametrizirati točke svih polaznih kružnica jer vrijedi:

$$\vec{R}_{n,\varphi} = (\,\mathcal{R}\sin\Theta_n\cos\varphi\,,\ \mathcal{R}\sin\Theta_n\sin\varphi\,,\ -\mathcal{R}\cos\Theta_n). \tag{9}$$

U principu, ovdje bismo mogli stati s obzirom da smo jednadžbom (8) potpuno odredili Θ_n. Međutim, korištenjem adicijskih formula zaobići ćemo potrebu za računanjem inverza sinusa (što bi nam bilo potrebno da bismo našli θ_n u svrhu uvrštavanja u $\cos(\theta_n+\vartheta)$):

$$\begin{aligned}\sin\Theta_n &= \sin(\theta_n+\vartheta) = \cos\theta_n\sin\vartheta + \sin\theta_n\cos\vartheta,\\ \cos\Theta_n &= \cos(\theta_n+\vartheta) = \cos\theta_n\cos\vartheta - \sin\theta_n\sin\vartheta.\end{aligned} \tag{10}$$

Član $\cos\theta_n$ lako je odrediti iz (6) kao $\cos\theta_n = \sqrt{1-\sin^2\theta_n}$, odakle slijedi:

$$\begin{aligned}\sin\Theta_n &= \frac{\sqrt{(2n\pi\mathcal{R})^2-\mathcal{L}^2}\sin\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}} + \mathcal{L}\cos\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}}}{2n\pi\mathcal{R}},\\ \cos\Theta_n &= \frac{\sqrt{(2n\pi\mathcal{R})^2-\mathcal{L}^2}\cos\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}} - \mathcal{L}\sin\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}}}{2n\pi\mathcal{R}}.\end{aligned} \tag{11}$$

Sve što treba je uvrstiti (11) u (9). Naposlijetku, primijetimo sa slike 4 da je radijus R_n kružnice K_n jednak $R_n = \mathcal{R}\sin\Theta_n$.

Želimo li provesti potpuniju analizu problema, trebali bismo pokazati i da se uz postavljena ograničenja nijedna od kružnica κ_n ne može naći na sjevernoj polutki (hemisferi) te da ih, prema tome, nismo zaboravili pobrojiti[7]. Pokazat ćemo sljedeće: za bilo koju od kružnica κ_n postavljenih na

[7] Da smo kružnicu opsega $\mathcal{L}/n$ postavili iznad ekvatora, dobili bismo izraz za sinus kuta θ_n potpuno jednak onome iz (6), no za sam kut bi vrijedilo $\theta_n > \pi/2$, stoga više ne bi bio određen izravnim inverzom $\arcsin(\sin\theta_n)$, već kao: $\theta_n = \pi - \arcsin(\sin\theta_n)$. Umjesto $\cos\theta_n = \sqrt{1-\sin^2\theta_n}$, što smo koristili za potrebe izraza (11), tada vrijedi: $\cos\theta_n = -\sqrt{1-\sin^2\theta_n}$.

sjevernu polutku, sjeverni pol nalazi se na udaljenosti manjoj od $\mathcal{L}$, stoga nikad ne bismo mogli zadovoljiti zahtjev za kretanjem u smjeru sjever–jug.

Radi jednostavnosti definirajmo kutnu koordinatu θ' tako da mjeri kutni otklon od pozitivnog dijela z-osi (umjesto od negativnog, kao što mjeri θ; očito vrijedi: $\theta' = \pi - \theta$). Prisjetimo se da su kružnice κ_n opsega $\mathcal{L}/n$. Prema tome, uz pretpostavku da postoje κ_n na sjevernoj polutki, ona s najvećim opsegom ($n = 1$) bila bi najudaljenija od sjevernog pola. Uspijemo li pokazati da je udaljenost kružnice κ_1 od sjevernog pola uvijek manja od $\mathcal{L}$, isto će vrijediti i za sve ostale kružnice ($n > 1$).

Stoga postavimo kružnicu κ_1 – opsega $\mathcal{L}$ – na sjevernu polutku. Njezin radijus je $r_1 = \mathcal{L}/2\pi$. Analogno geometriji sa slike 4, za kut θ_1' – pola kuta pod kojim ovu kružnicu vidimo iz ishodišta – vrijedi $\sin\theta_1' = r_1/\mathcal{R}$, a također vrijedi i $\theta_1' = \ell_1/\mathcal{R}$, gdje je ℓ_1 udaljenost kružnice κ_1 od sjevernog pola (kao i ranije, ova udaljenost mjerena je duž Zemljine površine). Odavde slijedi:

$$\sin\frac{\ell_1}{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{L}}{2\mathcal{R}\pi}. \tag{12}$$

Sada se pitamo: kada će udaljenost ℓ_1 postati dovoljno velika da se, krenuvši od κ_1, doista možemo pomaknuti za $\mathcal{L}$ u smjeru sjevera[8]:

$$\ell_1 > \mathcal{L}. \tag{13}$$

Čitavu nejednakost dijelimo s $\mathcal{R}$ te na nju primjenjujemo funkciju sinus kako bismo mogli iskoristiti relaciju (12). Budući da pretpostavljamo da smo na sjevernoj polutki ($\theta_1' = \ell_1/\mathcal{R} \leq \pi/2$), pri primjeni sinusa nejednakost ne mijenja smjer jer je na intervalu $[0, \pi/2]$ sinus rastuća funkcija:

$$\sin\frac{\ell_1}{\mathcal{R}} > \sin\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{L}}{2\mathcal{R}\pi} > \sin\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}}. \tag{14}$$

Korištenjem definicije ϑ iz (7) nejednakost poprima još jednostavniji oblik:

$$\vartheta > 2\pi\sin\vartheta. \tag{15}$$

Ova nejednakost nema rješenja na intervalu $\vartheta \in [0, \pi/2]$. No za kut θ_1', pola kuta pod kojim se nalazi κ_1 svakako mora vrijediti $\theta_1' > \vartheta$ jer kutni raspon ϑ uvijek moramo imati dostupnim za kretanje u smjeru sjever–jug. Odavde vidimo da se θ_1' ne može naći unutar intervala $[0, \pi/2]$, što je u suprotnosti s početnom pretpostavkom da smo kružnicu κ_1 postavili na sjevernu polutku! Time smo dokazali da se sve kružnice κ_n nužno nalaze na južnoj polutki.

[8] Primijetimo da bi jednakost $\ell_1 = \mathcal{L}$ značila da se kružnica K_1 potpuno stegnula u sjeverni pol, a ta je točka prva koju smo uzeli u obzir i posebno smo je parametrizirali izrazom (4). Stoga je u (13) dovoljno uzeti strogu nejednakost.

Štoviše, ovakvim razmišljanjem možemo otići i korak dalje, kako bismo razmotrili i pitanje: unutar kojeg kutnog raspona se nalaze sve moguće kružnice κ_n. Budući da sad znamo da se sve nalaze na južnoj polutki, prikladno je vratiti se njihovoj parametrizaciji kutom θ, otklonom s obzirom na negativni dio z-osi. I dok još uvijek vrijedi: $\sin\theta_n = r_n/\mathcal{R}$, uz r_n kao radijus kružnice κ_n, ovaj put moramo uzeti u obzir da zbog promjene dijela z-osi od kojeg mjerimo kut, za udaljenost ℓ_n od sjevernog pola vrijedi: $\ell_n/\mathcal{R} = \pi - \theta_n$. Budući da se na južnoj polutki kružnice približavaju južnom polu kako n raste (zbog sve manjeg opsega $\mathcal{L}/n$), kružnica κ_1 ponovno će imati najveći kutni otklon od svih κ_n. Postavljamo pitanje: dokle će duljina ℓ_1 luka do sjevernog pola biti barem $\mathcal{L}$, tako da uvijek možemo zadovoljiti uvjet za kretanjem u smjeru sjever–jug, tj. da vrijedi (13)? Postupamo kao i ranije, ali kako je sada $\ell_1/\mathcal{R} \in [\pi/2, \pi]$, a na tom je intervalu sinus padajuća funkcija, umjesto (14) i (15) dobivamo:

$$\sin\frac{\ell_1}{\mathcal{R}} < \sin\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{L}}{2\mathcal{R}\pi} < \sin\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta < 2\pi\sin\vartheta. \tag{16}$$

Granično rješenje $\vartheta_{\max}$ ove nejednakosti nalazimo kao rješenje jednadžbe $\vartheta = 2\pi\sin\vartheta$, čija je numerička vrijednost $\vartheta_{\max} \approx 2.6978$ približno jednaka $6\pi/7$. Kako je $\theta_1 + \vartheta \leq \pi$, zaključujemo da $\theta_1 \lesssim \pi - \vartheta_{\max} \approx \pi/7$, a kako kako se sve kružnice κ_n nalaze između κ_1 i južnog pola, sve su one unutar kutnog otklona od približno $\pi/7$, neovisno o zadanoj vrijednosti $\mathcal{L}$.

Do sada smo implicitno podrazumijevali da uvijek možemo razapeti sve kružnice od κ_1 nadalje, odnosno da ih možemo konstruirati za svaki $n \geq 1$. No razmislimo još o sljedećem: što ako je zadana udaljenost $\mathcal{L}$ toliko velika da gotovo spaja polove? Drugim riječima, što ako je $\mathcal{L}$ gotovo jednako $\pi\mathcal{R}$? U tom slučaju, primijetit ćemo, dostupan nam je samo malen raspon kuta θ unutar kojeg možemo smjestiti kružnice κ_n, s obzirom da je kut ϑ iz (7) vrlo velik (gotovo π), a uvijek mora biti „rezerviran" za kretanje u pravcu sjever–jug. U isto vrijeme, za veliki $\mathcal{L}$ opseg kružnica κ_n za malene n trebao bi također biti velik (točno $\mathcal{L}$ u slučaju κ_1), što bi zahtijevalo razmjerno velik kutni otklon θ_n pod kojim bismo ih konstruirali (ali, kao što smo pokazali, uvijek manji od približno $\pi/7$). Ovo znači da ne možemo uvijek konstruirati kružnice κ_n za svaki $n \geq 1$, već samo one dovoljno malog opsega. Dakle, u općenitom slučaju očekujemo minimalnu vrijednost $n_{\min}$ od koje bismo mogli krenuti s konstrukcijom (tako da je $n \geq n_{\min}$).

Granični $n_{\min}$ lako je odrediti iz prethodnog opisa. S obzirom da se svaki θ_n mora naći unutar dostupnog kutnog raspona, a koji je jednak $\pi - \vartheta$, dozvoljeni n određeni su uvjetom:

$$\theta_n < \pi - \vartheta. \tag{17}$$

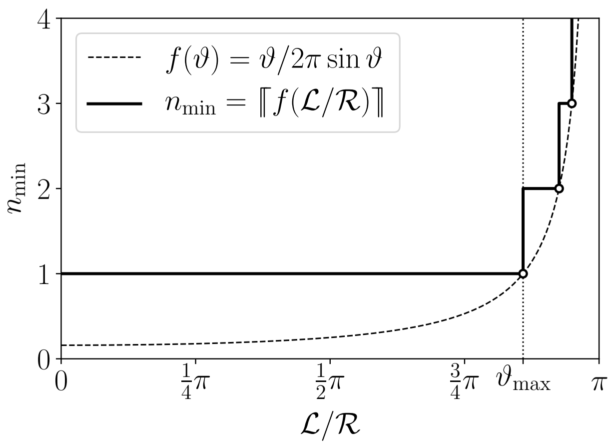
Koristeći (6) i (7) dobivamo:

$$\sin\theta_n < \sin(\pi - \vartheta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\vartheta}{2n\pi} < \sin\vartheta, \tag{18}$$

tj. $n > \vartheta/2\pi\sin\vartheta$ te je stoga, ponovno koristeći (7):

$$n_{\min} = \left[\!\!\left[\frac{\mathcal{L}/\mathcal{R}}{2\pi\sin(\mathcal{L}/\mathcal{R})} \right]\!\!\right], \tag{19}$$

gdje smo s $[\![x]\!]$ označili najmanji cijeli broj strogo veći od x, slično tzv. strop-funkciji $\lceil x \rceil$ definiranoj kao najmanji cijeli broj veći ili jednak od x. Na slici 5 prikazan je graf funkcije $n_{\min}$. Kao što vidimo, prekoračenjem vrijednosti $\vartheta_{\max} \approx \pi/7$ do koje je moguće konstruirati sve kružnice κ_n, broj kružnica koje više ne zadovoljavaju početni uvjet vrlo se brzo povećava te jedna za drugom ispadaju iz igre.



Slika 5: Oblik funkcije (19), kojom je definiran indeks $n_{\min}$ prve kružnice κ_n koju je moguće konstruirati u skladu s uvjetima početnog problema.

Literatura

[1] *10 Famous Microsoft Interview Puzzles*, http://www.mytechinterviews.com/10-famous-microsoft-interview-puzzles, 2010.

[2] *Globe Walker*, http://www.mytechinterviews.com/globe-walker, 2010.

[3] Juliet Floyd, Akihiro Kanamori, *How Gödel Transformed Set Theory*, Notices of the American Mathematical Society Vol. 53 No. 4 (2006) 419–427

[4] Bjorn Poonen, *Infinity: Cardinal Numbers*, https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC5/docpspdf/infinity.pdf, 2002.

[5] Solomon Feferman, *In the Light of Logic*, Oxford University Press, 1998.

[6] Solomon Feferman, *Infinity in Mathematics: Is Cantor Necessary?*, http://logic.harvard.edu/EFI_Feferman_InfinityInMathematics.pdf, 2013.

[7] *0.999...*, https://en.wikipedia.org/wiki/0.999..., 2020.