ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2017. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/270.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 286.

A) Zadaci iz matematike

3581. Nađi sva rješenja jednadžbe
$$\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2.$$

3582. Pokaži da razlika rješenja kvadratne jednadžbe
$$5x^2-2(5m+3)x+5m^2+6m+1=0$$
ne ovisi o m.

3583. Nađi sve prirodne brojeve n za koje je $2^8+2^{11}+2^n$ potpuni kvadrat.

3584. Riješi jednadžbu
$$x^x+139x^{-x}-108x^{-2x}=32.$$

3585. Odredi minimalnu vrijednost iznosa $x^2+y^2+z^2$ gdje su x, y, z brojevi za koje je $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$.

3586. Neka su $x,y,z\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ takvi da je $\cos x+\cos y+\cos z=1$. Dokaži nejednakost
$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z\geq 16\sqrt{2}.$$

3587. Riješi sustav jednadžbi
$$\begin{aligned}\log(2xy)&=\log x\log y\\ \log(yz)&=\log y\log z\\ \log(2zx)&=\log z\log x\end{aligned}$$
za $x,y,z>0$.

3588. U šiljastokutnom trokutu ABC spuštene su visine $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$. Dokaži da je:

a) tangenta u točki A na opisanu mu kružnicu paralelna s pravcem B_1C_1,

b) $B_1C_1\perp OA$, gdje je O središte opisane kružnice trokuta ABC.

3589. Ako je u jednakokračnom trokutu ABC, $|AB|=a$, $|AC|=|BC|=b$ i $\sphericalangle ACB=140^\circ$, dokaži da vrijedi jednakost $a^3-b^3=3ab^2$.

3590. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC konstruirani su s vanjske strane kvadrati ABC_1D_1 i A_2D_2CB. Dokaži da se pravci AD_2 i CD_1 sijeku na visini $\overline{BH}$.

3591. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost
$$\frac{a^3-2a+2}{b+c}+\frac{b^3-2b+2}{c+a}+\frac{c^3-2c+2}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

3592. Odredi najveći pozitivan broj M za koji vrijedi nejednakost
$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\geq M(xy+yz+zx)^2$$
za sve $x,y,z\in\mathbf{R}$.

3593. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost
$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\binom{2n+1}{3}.$$

3594. Odredi sve funkcije $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ takve da vrijedi
$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2)$$
za sve prirodne brojeve x i y.

B) Zadaci iz fizike

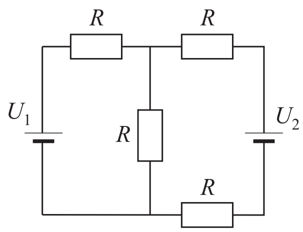
OŠ – 422. Učenik je na stalak objesio oprugu konstante elastičnosti 10 N/m. Na nju je objesio drugu oprugu mase 50 grama i konstante elastičnosti 15 N/m. Na tu je oprugu objesio uteg i izmjerio da su se obje opruge jednako produljile. Kolika je bila masa utega?

OŠ – 423. Automobil mase 1.5 tona na putu od 100 metara ubrza iz mirovanja do brzine 90 km/h. Faktor trenja kotača sa cestom iznosio je 0.04, a trenje sa zrakom zanemari. Kolikom je silom djelovao motor automobila?

OŠ – 424. Zvuk frekvencije 440 Hz ima valnu duljinu u zraku 75 centimetara. Kolika je valna duljina tog zvuka u vodi ako zvuk u vodi prijeđe udaljenost od 3.3 kilometra 7.8 sekundi brže nego što tu udaljenost prijeđe u zraku?

OŠ – 425. Voda za kupanje treba imati temperaturu $42\,^{\circ}\mathrm{C}$. Vruća voda ima temperaturu $60\,^{\circ}\mathrm{C}$, a hladna $16\,^{\circ}\mathrm{C}$. Prilikom miješanja toplina ne prelazi samo na hladnu vodu, 15 posto se izgubi u okolinu. Da bi se dobilo 120 litara vode za kupanje koliko treba uliti vruće, a koliko hladne vode?

1644. Koliki je napon na otporniku u sredini sheme? Kolika struja teče kroz taj otpornik? Sva četiri otpora iznose $R = 4.5\ \Omega$, a napon obaju izvora iznosi $U_1 = U_2 = 12$ V.



1645. Komet se giba po paraboličnoj putanji oko Sunca. Brzina u perihelu, točki putanje najbliže Suncu, iznosi 64.5 km/s u odnosu na Sunce. Odredi najmanju udaljenost kometa od Sunca (u perihelu), brzinu u trenutku presijecanja Zemljine putanje i kut presijecanja te putanje. Masa Sunca je $1.989 \cdot 10^{30}$ kg, a Zemljina putanja neka je kružnica polumjera 1 a.j. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ m.

1646. Neka je penjačko uže dugačko 20 m u neopterećenom stanju. Penjač visi na jednom kraju užeta, a drugi je kraj pričvršćen za okomitu stijenu. Pod težinom penjača od 80 kg, uže se istegne za dodatnih 35 cm. Odredi period malih oscilacija (gore-dolje) penjača na užetu.

1647. Za izradu kazališnog dalekozora na raspolaganju imamo konvergentnu leću jačine $+4.25$ dpt i divergentnu leću jačine -10 dpt. Na kojem međusobnom rastojanju treba postaviti leće? Koliko je tada uvećanje dalekozora?

1648. Napetost niti njihala iznosi 10 N za matematičko njihalo koje miruje u položaju ravnoteže. Otklonimo li njihalo 8° iz položaja ravnoteže i pustimo ga, ono će njihati. Odredi napetost niti pri njihanju, u trenutku prolaska kroz položaj ravnoteže i u trenutku maksimalnog otklona.

1649. Jedan gram radija 226 ima (po definiciji) aktivnost jedan Curie (1 Ci). Vrijeme poluživota tog izotopa iznosi 1600 godina. Odredi aktivnost jednog grama ugljika 14 ($^{14}\mathrm{C}$), s vremenom poluživota 5730 godina.

1650. Odredi napon koji se inducira na krajevima krila zrakoplova. Neka avion leti brzinom 950 km/h, uz okomitu komponentu Zemljinog polja $B = 5 \cdot 10^{-5}$ T, a raspon krila aviona je 45 metara.

C) Rješenja iz matematike

3553. *Neka je x, y, z cjelobrojno rješenje jednadžbe $x^3 + y^3 = z^3$. Dokaži da je barem jedan od ova tri broja djeljiv sa 7.*

Rješenje. Primijetimo da za svaki $k \in \mathbf{Z}$ vrijedi $k^3 \equiv r \pmod 7$, $r \in \{-1, 0, 1\}$. Pretpostavimo da niti jedan od brojeva x, y, z nije djeljiv sa 7. Tada je $z^3 = x^3 + y^3 \equiv 2 \pmod 7$ ili $z^3 = x^3 + y^3 \equiv -2 \pmod 7$, što je kontradikcija s uvodnim zaključkom.

Zlatko Petolas (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3554. *Realni brojevi x i y zadovoljavaju sistem jednadžbi*

$$x + y + \frac{x}{y} = 10$$
$$\frac{x}{y}(x + y) = 20.$$

Odredi zbroj svih mogućih vrijednosti izraza $x + y$.

Rješenje. Iz prve jednadžbe dobivamo

$$x + y = 10 - \frac{x}{y},$$

pa uvrštavanjem u drugu imamo

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\frac{x}{y} + 20 = 0.$$

Ovo je kvadratna jednadžba po $\frac{x}{y}$, tj.

$$\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5}.$$

Odavde je $(x+y)_{1,2} = 5 \mp \sqrt{5}$. Dakle, postoji samo jedna vrijednost zbroja izraza $x + y$ i to je 10.

Ilma Smajić (4),
Gimnazija "Visoko", Visoko, BiH

3555. *Ako su a, b, c cijeli brojevi takvi da je $a+b+c=0$, dokaži da je $2(a^4+b^4+c^4)$ kvadrat cijelog broja.*

Prvo rješenje. Kvadrirajmo jednakost

$$a+b+c=0. \qquad (*)$$

$$(a+b+c)^2=0$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=0$$
$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ac).$$

Dobivenu jednakost opet kvadriramo:

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(ab+bc+ac)^2$$
$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2$$
$$=4(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2ab^2c+2a^2bc+2abc^2).$$

Tada je:

$$a^4+b^4+c^4$$
$$=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2+8abc(a+b+c)$$

zbog $(*)$

$$2(a^4+b^4+c^4)=4a^2b^2+4b^2c^2+4a^2c^2.$$

Da bi posljednja jednakost na desnoj strani bila potpuni kvadrat nedostaje nam $8ab^2c+8a^2bc+8abc^2$, što je jednako $8abc(a+b+c)$. Kako vrijedi $(*)$, potrebni izraz možemo dodati desnoj strani, a jednakost će i dalje vrijediti:

$$2(a^4+b^4+c^4)$$
$$=4a^2b^2+4b^2c^2+4a^2c^2+8ab^2c+8a^2bc+8abc^2$$
$$=(2ab+2bc+2ac)^2.$$

Ako stavimo $2ab+2bc+2ac=x$, (x je cijeli broj jer su a, b i c cijeli brojevi) dobivamo traženu jednakost:

$$2(a^4+b^4+c^4)=x^2.$$

Mak Pehar (1), KŠC "Sveti Franjo", Opća gimnazija, Tuzla, BiH

Drugo rješenje.

$$2(a^4+b^4+c^4)$$
$$=2\{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}$$
$$=2\{[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)]^2$$
$$-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}$$
$$=2\{[-2(ab+bc+ca)]^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}$$
$$=2\{4[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a+b+c)abc]$$
$$-2(a^2b^2+b^2b^2+c^2a^2)\}$$
$$=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$=4[(ab+bc+ca)^2-2(a+b+c)abc]$$
$$=[2(ab+bc+ca)]^2.$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3556. *Odredi parametar a takav da rješenja jednadžbe*

$$x^2-(3a+1)x+(2a^2-3a-2)=0$$

budu realna i zbroj njihovih kvadrata minimalan.

Rješenje. Uvjet realnosti rješenja:

$$D=(3a+1)^2-4(2a^2-3a-2)$$
$$=a^2+18a+9\geq 0$$
$$\Longleftrightarrow a\in(-\infty,-9-6\sqrt{2}]\cup[-9+6\sqrt{2},\infty).$$

Zbroj kvadrata rješenja:

$$f(a)=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$
$$=(3a+1)^2-2(2a^2-3a-2)$$
$$=5a^2+12a+5.$$

Funkcija f pada na $\left(-\infty,-\dfrac{6}{5}\right)$, raste na $\left(-\dfrac{6}{5},\infty\right)$. Dakle f ima minimalnu vrijednost ili za $a=-9-6\sqrt{2}$ ili za $a=-9+6\sqrt{2}$. Kako je $\left|-9+6\sqrt{2}+\dfrac{6}{5}\right|<\left|-9-6\sqrt{2}+\dfrac{6}{5}\right|$ to f ima najmanju vrijednost, na $(-\infty,-9-6\sqrt{2}]\cup[-9+6\sqrt{2},\infty)$, za $a=-9+6\sqrt{2}$.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3557. *Ako su a, b, c poztivni brojevi takvi da je $a+b+c=1$ dokaži nejednakost*

$$ab+bc+ca\geq 9abc.$$

Rješenje. Korištenjem A-H nejednakosti

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}=9.$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3558. *Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c, za koje je $a+b+c=1$, vrijedi nejednakost*
$$\left(\frac{1}{a^2}+1\right)\left(\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{c^2}+1\right) \geq 1000.$$

Prvo rješenje.
$$a+b+c=1 \implies$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1.$$
$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}+1&=\frac{1+a^2}{a^2}\\ &=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+a^2}{a^2}\\ &=\frac{a^2+b^2+c^2+ab+ab+bc+bc+ca+ca+a^2}{a^2}\\ &\overset{\text{A-G}}{\geq}\frac{10\sqrt[10]{a^8b^6c^6}}{a^2}.\end{aligned}$$
Analogno:
$$\frac{1}{b^2}+1 \geq \frac{10\sqrt[10]{a^6b^8c^6}}{b^2},$$
$$\frac{1}{c^2}+1 \geq \frac{10\sqrt[10]{a^6b^6c^8}}{c^2}.$$
Sada je
$$\left(\frac{1}{a^2}+1\right)\left(\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{c^2}+1\right) \geq \frac{10^3\sqrt[10]{a^{20}b^{20}c^{20}}}{a^2b^2c^2}=1000.$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

Drugo rješenje. Imamo
$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a^2}+1\right)\left(\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{c^2}+1\right)\\ &=\frac{1}{a^2b^2c^2}+\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).\end{aligned}$$
Koristeći A-G nejednakost imamo
$$abc \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$
tj.
$$\frac{1}{abc} \geqslant 27.$$
Sada je redom:
$$\frac{1}{a^2b^2c^2} \geqslant 27^2=729,$$
$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2} &\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{(abc)^4}}\\ &\geqslant 3\sqrt[3]{27^4}=243,\end{aligned}$$
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \geqslant 3\sqrt[3]{27^2}=27.$$
Slijedi
$$\left(\frac{1}{a^2}+1\right)\left(\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{c^2}+1\right) \geqslant 729+343+27+1=1000.$$
Jednakost se postiže ako i samo ako je $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Ur.

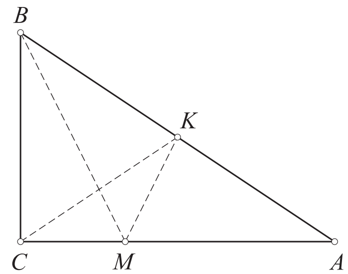
3559. *Dokaži da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi*
$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}.$$

Rješenje. Uočimo, za $k \geq 2$,
$$\begin{aligned}\frac{1}{k^3}=\frac{1}{kk^2}<\frac{1}{k(k^2-1)}&=\frac{1}{(k-1)k(k+1)}\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right).\end{aligned}$$
Za $n \geq 2$ tada imamo
$$\begin{aligned}1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3}&<1+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right)\\ &=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)<\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3560. *U pravokutnom trokutu ABC točka K je polovište hipotenuze $\overline{AB}$. Točka M je na stranici $\overline{AC}$ tako da je $|AM|=2|MC|$. Dokaži da je $\sphericalangle MBA=\sphericalangle MKC$.*

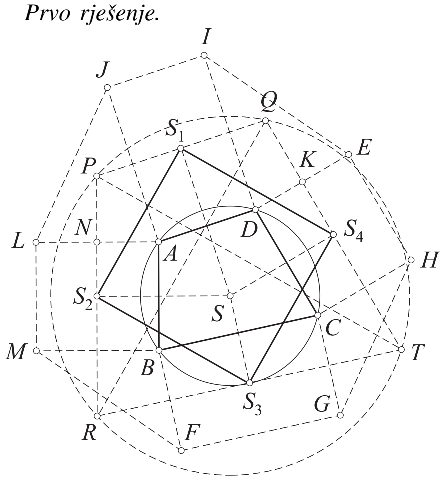
Rješenje. Točka K je središte opisane kružnice trokuta ABC radi čega je:
$$|CK|=|KA|, \quad \sphericalangle KCA=\sphericalangle KAC.$$
Kako je $|AM|=2|MC|$, trokuti MBA i MKC su slični s fakorom sličnosti 2 (dvije proporcionalne stranice i kut među njima). Dakle $\sphericalangle MBA=\sphericalangle MKC$.



Zlatko Petolas (4), Zagreb

3561. *Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, tetivnog četverokuta $ABCD$ duljina stranica redom a, b, c, d, s vanjske strane su konstruirani pravokutnici $a \times c$, $b \times d$, $c \times a$, $d \times b$. Dokaži da su središta tih pravokutnika vrhovi pravokutnika.*

Prvo rješenje.



Koristit ćemo lemu.

Lema. Tetivni četverokut $ABCD$ ima okomite dijagonale ako i samo ako je

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2.$$

Dokaz leme. Ako su a, b, c, d stranice, p, q dijagonale i θ kut među njima, površina tog tetivnog četverokuta može se izraziti na dva načina:

$$P = \frac{1}{2}pq\sin\theta = \frac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}.$$

Odavde slijedi dokaz leme. $\square$

Povucimo središtem S_1 pravokutnika $ADIJ$ pravac paralelan s AD i analogno učinimo središtima S_2, S_3, S_4. Presjekom tih pravaca dobivamo četverokut $QPRT$ koji je opet tetivan i koji ima isto središte opisane kružnice kao i početni četverokut $ABCD$ i polumjer kružnice opisane $QPRT$ označimo s ρ. Dalje, trokuti AJL i CBD su sukladni (dvije stranice jednakih duljina i kut među njima) tj. $\triangle AJL \cong \triangle CBD$. Analogno $\triangle FBM \cong \triangle ADC$, $\triangle HCG \cong \triangle BAD$, $\triangle EID \cong \triangle ACB$. Na osnovu toga zaključujemo: $|PS_1| = |SS_3|$, $|RS_2| = |SS_4|$, $|RS_3| = |SS_1|$, $|TS_4| = |SS_2|$.

Iz pravokutnog trokuta SPS_2 slijedi $|PS_2|^2 + |SS_2|^2 = \rho^2$ tj.

$$|PS_2|^2 + |TS_4|^2 = \rho^2.$$

Kako su S_2 i S_4 polovišta $\overline{PR}$ i $\overline{QT}$, redom, to je

$$|PR|^2 + |QT|^2 = 4\rho^2. \qquad (*)$$

Analogno,

$$|PQ|^2 + |RT|^2 = 4\rho^2. \qquad (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ slijedi

$$|PR|^2 + |QT|^2 = |PQ|^2 + |RT|^2,$$

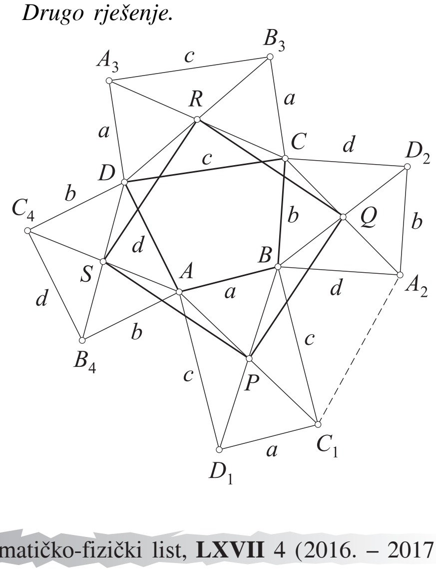
dakle tetivni četverokut $QPRT$ ima, prema lemi, okomite dijagonale $\overline{PT}$ i $\overline{QR}$.

$\overline{S_1S_4}$ i $\overline{S_2S_3}$ su srednjice trokuta QPT i RTP, pa je $|S_1S_4| = |S_2S_3|$ i $S_1S_4 \parallel S_2S_3 \parallel PT$. Analogno, $|S_1S_2| = |S_3S_4|$ i $S_1S_2 \parallel S_3S_4 \parallel QR$.

Dakle, četverokut $S_1S_2S_3S_4$ je pravokutnik.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

Drugo rješenje.



Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ konstruirani su pravokutnici ABC_1D_1, BCD_2A_2, CDA_3B_3 i DAB_4C_4, a P, Q, R, S su redom središta pravokutnika. Kako je $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ$, trokuti ADC i A_2BC_1 su sukladni. Promatrajmo pravokutnike konstruirane na stranicama tih sukladnih trokuta. Dobivamo $\triangle RDS \cong \triangle PBQ$ i $|RS| = |PQ|$. Analogna tvrdnja vrijedi za trokute QCR i SAP i vrijedi $|QR| = |PS|$. Dakle, $PQRS$ je paralelogram, pri čemu je jedan od trokuta RDS i PBQ konstruiran s vanjske, a drugi s unutarnje strane. Prema tome

$$\sphericalangle PQR + \sphericalangle RSP = \sphericalangle BQC + \sphericalangle DSA = 180^\circ$$

jer je

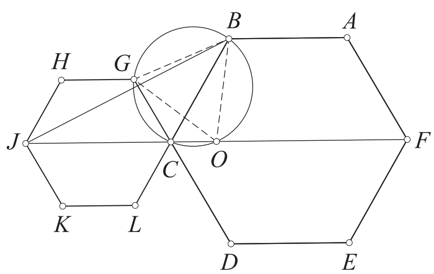
$$\sphericalangle PQB = \sphericalangle RSD \quad \text{i} \quad \sphericalangle RQC = \sphericalangle PSA.$$

Dakle, $PQRS$ je pravokutnik.

Ur.

3562. *Dani su pravilni šesterokuti $ABCDEF$ i $CGHJKL$ tako da je vrh C na pravcu FJ. Kružnica opisana trokutu BCG siječe pravac FJ u točki O. Dokaži da je O polovište dužine $\overline{FJ}$.*

Prvo rješenje. Neka je šesterokut $ABCDEF$ osnovne stranice a, šesterokut $CGHJKL$ osnovne stranice b.



$\sphericalangle BGO = \sphericalangle BCO = 60^\circ$, $\sphericalangle GOB = \sphericalangle GCB = 60^\circ$ (obodni kutevi). Dakle, trokut BGO je jednakostraničan tj. $|GO| = |OB| = |GB|$. Iz Ptolemejevog poučka slijedi

$$|GO| \cdot |CB| = |CG| \cdot |OB| + |OC| \cdot |GB| \implies$$

$$|GO|a = b|GO| + |OC||GO| \implies |OC| = a - b.$$

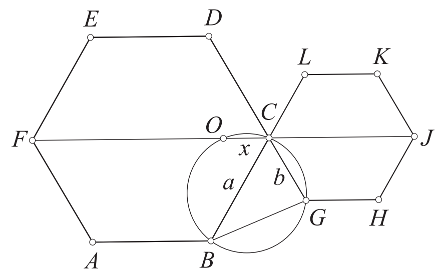
Sada je

$$|JO| = |JC| + |CO| = 2b + a - b = a + b$$

$$= \frac{2a + 2b}{2} = \frac{|FJ|}{2}.$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

Drugo rješenje. Treba pokazati $|FO| = \frac{1}{2}|FI|$, odnosno $|FO| = |OI|$.



Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je stranica šesterokuta $ABCDEF$ veća od stranice drugog. Veću stranicu označimo s a dok stranicu manjeg s b. Označimo duljinu $|OC|$ s x.

Primijetimo da vrijedi:

$$(1) \quad |FC| = 2a$$

$$(2) \quad \sphericalangle FCB = 60^\circ$$

$$(3) \quad |CJ| = 2b$$

$$(4) \quad \sphericalangle GCJ = 60^\circ.$$

Iz (2) i (4) slijedi $\sphericalangle BCG = 60^\circ$.

Promatrajmo trokut OCB. Po kosinusovom poučku je

$$|BO|^2 = x^2 + a^2 - 2ax\cos 60^\circ.$$

Analogno iz trokuta CGB imamo

$$|BG|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ.$$

Kako je četverokut $OBGC$ tetivan kutovi nad tetivama $\overline{OB}$ i $\overline{BG}$ su jednaki (iznose 60°) slijedi $|OB| = |BG|$, odnosno nakon kvadriranja:

$$x^2 + a^2 - 2ax\cos 60^\circ = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ$$

$$\iff x^2 + a^2 - ax = a^2 + b^2 - ab$$

$$[x - (a - b)](x - b) = 0.$$

Imamo dva slučaja:

$$x = b \quad \text{i} \quad x = a - b.$$

Promotrimo prvi slučaj, odnosno $x = b$. Iz ovog uvjeta su trokuti OCB i GCB sukladni, odnosno $\sphericalangle COB = \sphericalangle CGB$. Zbog tetivnosti četverokuta vrijedi $\sphericalangle COB = 180^\circ - \sphericalangle CGB$.

Iz toga slijedi $\sphericalangle COB = 90^\circ$ te je iz trokuta COB $a = 2x = 2b$, tj. $a - b = b = x$. Ovime smo dokazali $x = b$ tj. $x = a - b$.

Sada vrijedi $x = a - b$.

Primijetimo

$$|FO| = 2a - x = 2a - a + b = a + b$$

$$|OI| = 2b + x = 2b + a - b = a + b$$

$$\implies |FO| = |OJ|.$$

Juraj Marušić (3),
XV. gimnazija, Zagreb

3563. *Kutovi trokuta ABC su u omjeru* $\alpha : \beta : \gamma = 1 : (k+1) : (k+3)$, $k \in \mathbf{R}_+$. *Dokaži da za njegove stranice vrijedi* $a^2 + bc = c^2$.

Rješenje. $\beta = (k+1)\alpha$, $\gamma = (k+3)\alpha \implies 2\alpha + \beta = \gamma \implies$

$$\alpha = \frac{\gamma - \beta}{2}, \qquad (*)$$

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 180^\circ - \gamma. \qquad (**)$$

$a^2 + bc = c^2 \implies \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b}{c} = 1$, a to je, korištenjem poučka o sinusima, ekvivalentno

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} + \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 1, \qquad \text{tj.}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \beta \sin \gamma = \sin^2 \gamma. \qquad (***)$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
&\sin^2 \alpha + \sin \beta \sin \gamma \\
&\overset{*}{=} \sin^2 \left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) + \sin \beta \sin \gamma \\
&= \frac{1 - \cos(\gamma - \beta)}{2} + \sin \beta \sin \gamma \\
&= \frac{1 - \cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \beta}{2} + \sin \beta \sin \gamma \\
&= \frac{1 - \cos \gamma \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta}{2} \\
&= \frac{1 - \cos(\beta + \gamma)}{2} \\
&= \sin^2 \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) \\
&\overset{**}{=} \sin^2(180^\circ - \gamma) \\
&= \sin^2 \gamma.
\end{aligned}$$

Time je pokazano $(***)$.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3564. *Ako su* a_1, $a_2, \ldots, a_n$ *realni brojevi, dokaži*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ij \cos(a_i - a_j) \geq 0.$$

Rješenje. Koristit ćemo:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ij \cos(a_i - a_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ij \left(\cos a_i \cos a_j + \sin a_i \sin a_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ij \cos a_i \cos a_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ij \sin a_i \sin a_j \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} i \cos a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} i \sin a_i\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3565. *Dokaži da Fibonaccijevi brojevi zadovoljavaju identitet*

$$F_{m+n+1} = F_{m+1} F_{n+1} + F_m F_n, \quad m, n \geq 0.$$

Rješenje. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Dokaz provodimo indukcijom po $n \in \mathbf{N}$, za fiksni $m \in \mathbf{N}$.

Za $n = 0$: $F_{m+1} = F_{m+1} F_1 + F_m F_0$.

Za $n = 1$:

$$\begin{aligned}
F_{m+1} F_{1+1} + F_m F_1 &= F_{m+1} + F_m = F_{m+2} \\
&= F_{m+1+1}.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da za $n \geq 1$ vrijedi

$$F_{m+n+1} = F_{m+1} F_{n+1} + F_m F_n.$$

Tada za $n + 1$ imamo

$$\begin{aligned}
&F_{m+n+2} = F_{m+n+1} + F_{m+n} \\
&= F_{m+n+1} + F_{m+(n-1)+1} \\
&= (F_{m+1} F_{n+1} + F_m F_n) + (F_{m+1} F_n + F_m F_{n-1}) \\
&= F_{m+1}(F_{n+1} + F_n) + F_m(F_n + F_{n-1}) \\
&= F_{m+1} F_{n+2} + F_m F_{n+1}.
\end{aligned}$$

Time je pokazan korak indukcije i tvrdnja zadatka.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3566. *Dokaži da se spajanjem tri vrha pravilnog tetraedra s polovištem visine iz četvrtog, dobiju tri u parovima okomita pravca.*

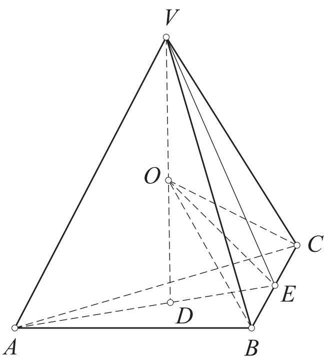
Prvo rješenje. Neka je O polovište visine spuštene iz vrha V na bazu ABC (uz ostale oznake kao na slici).

$$|DE| = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$|VD| = \sqrt{|VE|^2 - |DE|^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$|OD| = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

$$|OE| = \sqrt{|OD|^2 + |DE|^2} = \frac{a}{2}.$$



Slijedi: $|OE| = |BE| = |EC|$, tj. $\triangle OBC$ je jednakokračan pravokutni trokut s pravim kutom u O. Dakle pravci BO i CO se sijeku u točki O pod pravim kutom.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

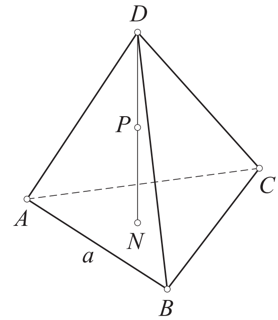
Drugo rješenje. Neka je $ABCD$ tetraedar, P polovište i N nožište visine iz vrha D. Neka je a duljina brida tetraedra. Prema poučku o sinusima za trokut ABC:

$$a = 2R\sin 60^\circ \implies R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Nadalje, prema Pitagorinom poučku za trokut ADN, budući da je N središte opisane kružnice trokuta ABC imamo:

$$|DN|^2 = |AD|^2 - |AN|^2 = a^2 - R^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$\implies |DN| = \frac{\sqrt{6}}{3}a \implies |PN| = \frac{\sqrt{6}}{6}a.$$



Prema Pitagorinom poučku za trokut APN je

$$|AP|^2 = |PN|^2 + |AN|^2 = \frac{1}{6}a^2 + R^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\implies |AP| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Analogno je

$$|BP| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad |CP| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$|BP|^2 + |AP|^2 = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2.$$

Budući da vrijedi $|BP|^2 + |AP|^2 = |AB|^2$, prema obratu Pitagorina poučka trokut APB je pravokutan s pravim kutom u vrhu P. Analogno su trokuti APC i BPC pravokutni s pravim kutovima u vrhu P. Iz toga su pravci AP, BP i CP međusobno okomiti.

Tadej Petar Tukara (3), XV. gimnazija, Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 414. *Električni bojler je za jedan sat ugrijao 50 litara vode od* $20\,^\circ C$ *na* $50\,^\circ C$. *Struja koja je tekla kroz njega iznosila je 8.7 ampera. Kolika je korisnost bojlera? Napon gradske mreže je 230 volti.*

Rješenje.

$t = 1$ h

$V = 50$ L

$m = 50$ kg

$t_p = 20\,^\circ$C

$t_k = 50\,^\circ$C

$\Delta t = t_k - t_p = 30\,^\circ$C

$I = 8.7$ A

$\underline{U = 230 \text{ V}}$

$\eta = ?$

$W_{\text{korisno}} = Q = c \cdot m \cdot \Delta t$

$Q = 4200 \text{ J/kg}\,^\circ\text{C} \cdot 50 \text{ kg} \cdot 30\,^\circ\text{C}$

$= 6\,300\,000$ J

$W_{\text{ukupno}} = I \cdot U \cdot t = 8.7 \text{ A} \cdot 230 \text{ V} \cdot 3600 \text{ s}$

$= 7\,203\,600$ J

$$\eta = \frac{W_{\text{korisno}}}{W_{\text{ukupno}}} = \frac{6\,300\,000 \text{ J}}{7\,203\,600 \text{ J}} = 0.87 = 87\%.$$

Josip Matanić (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 415. *Vozač je utvrdio da mu put od Zagreba do njegove kuće za odmor traje 20 minuta dulje kad mu je prosječna brzina 54 km/h, nego kad je 72 km/h. Koliko je kuća za odmor udaljena od Zagreba?*

Rješenje.

$v_1 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$

$v_2 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$

$\underline{\Delta t = 20 \text{ min} = 1200 \text{ s}}$

$s = ?$

$s = v_2 \cdot t_2 = v_1 \cdot (t_2 + 1200 \text{ s})$

$v_2 \cdot t_2 = v_1 \cdot t_2 + v_1 \cdot 1200 \text{ s}$

$v_2 \cdot t_2 - v_1 \cdot t_2 = v_1 \cdot 1200 \text{ s}$

$$t_2 = \frac{v_1 \cdot 1200 \text{ s}}{v_2 - v_1} = \frac{5 \text{ m/s} \cdot 1200 \text{ s}}{20 \text{ m/s} - 15 \text{ m/s}}$$

$= 3600$ s

$s = v_2 \cdot t_2 = 20 \text{ m/s} \cdot 3600 \text{ s}$

$= 72\,000 \text{ m} = 72 \text{ km}.$

Josip Matanić (8), Zagreb

OŠ – 416. *U posudu s pola litre vode temperature 20 °C je stavljeno tijelo mase 300 grama kojem je specifični toplinski kapacitet 5 puta manji od specifičnog toplinskog kapaciteta vode. Temperatura vode u posudi se nakon toga podigla na 35 °C. Kolika je bila početna temperatura tijela?*

Rješenje.

$V_1 = 0.5$ L

$m_1 = 0.5$ kg

$t_1 = 20\,^\circ$C

$m_2 = 300 \text{ g} = 0.3 \text{ kg}$

$c_1 = 5c_2$

$\underline{t_s = 35\,^\circ\text{C}}$

$t_2 = ?$

$Q_1 = Q_2$

$c_1 \cdot m_1 \cdot \Delta t_1 = c_2 \cdot m_2 \cdot \Delta t_2$

$5c_2 \cdot m_1 \cdot \Delta t_1 = c_2 \cdot m_2 \cdot \Delta t_2$

$5m_1 \cdot \Delta t_1 = m_2 \cdot \Delta t_2$

$$\Delta t_2 = \frac{5m_1 \cdot \Delta t_1}{m_2}$$

$\Delta t_1 = t_s - t_1 = 15\,^\circ$C

$$\Delta t_2 = \frac{5 \cdot 0.5 \text{ kg} \cdot 15\,^\circ\text{C}}{0.3 \text{ kg}} = 125\,^\circ\text{C}$$

$t_2 = t_s + \Delta t = 35\,^\circ\text{C} + 125\,^\circ\text{C} = 160\,^\circ\text{C}.$

Josip Matanić (8), Zagreb

OŠ – 417. *Na visini h tijelo ima potencijalnu energiju 1000 džula, a kinetičku 500 džula. Kolika će biti njegova kinetička energija na četiri puta manjoj visini ako zbog otpora zraka izgubi 20 posto ukupne energije?*

Rješenje.

$E_{gp_1} = 1000$ J

$E_{k_1} = 500$ J

$h_1 = 4h_2$

$\underline{E_{\text{otpor zraka}} = 0.2E_u}$

$E_{k_2} = ?$

$E_{\text{ukupna}} = 1500$ J

$E_{\text{otpor zraka}} = 0.2E_u = 0.2 \cdot 1500 \text{ J} = 300 \text{ J}$

$$E_{gp_2} = \frac{E_{gp1}}{4} = 250 \text{ J}$$

$E_{k_2} = E_{\text{ukupna}} - E_{\text{otpor zraka}} - E_{gp_2}$

$= 1500 \text{ J} - 300 \text{ J} - 250 \text{ J} = 950 \text{ J}.$

Josip Matanić (8), Zagreb

1630. *Predmet klizi niz kosinu nagiba* 28°*. Iz stanja mirovanja, predmet stigne do dna kosine. Pritom se 40% početne energije pretvori u kinetičku energiju predmeta, a 60% se trenjem pretvori u toplinu. Odredi koeficijent trenja.*

Rješenje. 60% energije na početku gibanja (potencijalne energije) jednako je energiji utrošenoj na trenje. Imamo:

$$0.6 \cdot mgh = \mu \cdot mgs \cdot \cos(\alpha),$$

gdje je $\alpha = 28^\circ$ kut nagiba kosine, s duljina kosine, a $h = s\sin(\alpha)$ visinska razlika. Uvrštavanjem h dobijemo:

$$0.6 \cdot mgs \cdot \sin(\alpha) = \mu \cdot mgs \cdot \cos(\alpha),$$

$$\mu = 0.6\ \mathrm{tg}(\alpha) = 0.6\ \mathrm{tg}(28^\circ) = 0.319.$$

Ur.

1631. *Brzina nekog kometa oko Sunca iznosi* 40 *km/s kad je komet najbliži Suncu (perihel), a* 3.5 *km/s kad je najdalje od Sunca (ahel). Odredi period kometa i numerički ekscentricitet njegove putanje. Masa Sunca je* $M = 1.989 \cdot 10^{30}$ *kg.*

Rješenje. Duljina velike poluosi putanje a može se lako izračunati iz najveće i najmanje brzine:

$$a = \frac{GM}{v_{\min} v_{\max}} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}}{3500 \cdot 40\,000}$$
$$= 9.48185 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m} = 6.33822\ \mathrm{a.j.}$$

Rezultat u astronomskim jedinicama je pogodan za računanje perioda (u godinama), jer znamo da je za Zemljinu putanju $a = 1$ a.j. i $T = 1$ godina. Iz trećeg Keplerovog zakona dobivamo

$$T = a^{\frac{3}{2}} = 6.33822^{1.5} = 15.957\ \text{godina}.$$

Numerički ekscentricitet e odredimo iz drugog Keplerovog zakona, izjednačavajući umnožak brzine i udaljenosti za perihel i ahel:

$$v_{\max} \cdot a(1-e) = v_{\min} \cdot a(1+e)$$

$$e = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_{\max} + v_{\min}} = \frac{36.5}{43.5} = 0.8391$$

Ur.

1632. *Punjač za mobitel napuni praznu bateriju mobitela za 90 minuta. Kolika je njegova prosječna snaga punjenja, ako baterija ima kapacitet 1.8 amper sati i napon 3.7 V, uz 75%-tnu iskoristivost energije punjenja?*

Rješenje. Energija pune baterije uz zadane nominalne vrijednosti iznosi

$$E = UIt = 3.7 \cdot 1.8 \cdot 3600 = 23976\ \mathrm{J}.$$

Potrebnu snagu dobijemo:

$$P = \frac{E}{T_{\text{punjenja}}} = \frac{23\,976}{90 \cdot 60} = 4.44\ \mathrm{W}.$$

No kako punjač ima 75%-tnu iskoristivost snaga punjenja mora biti veća,

$$P' = \frac{P}{0.75} = 5.92\ \mathrm{W}.$$

Ur.

1633. *Na kojoj je udaljenosti od Sunca njegov sjaj toliko malen da odgovara sjaju punog mjeseca gledanog sa Zemlje? Udaljenost izrazi u astronomskim jedinicama. Pun mjesec ima 14 magnituda manji sjaj od Sunca, gledano sa Zemlje.*

Rješenje. Omjer sjaja Sunca i Mjeseca (gledano sa Zemlje) izračunamo iz razlike u magnitudama. 5 magnituda je faktor 100 u sjaju, pa je razlika od 14 magnituda faktor $100^{\frac{14}{5}} = 398\,107$. Kako intenzitet svjetla pada s kvadratom udaljenosti, tražena udaljenost iznosi

$$d = \sqrt{398\,107} = 630.96\ \mathrm{a.j.}$$

Ur.

1634. *Kad na bateriju napona 24 V priključimo otpornik od* $2\ \Omega$*, napon baterije padne na 20 V. Kolika je struja kratkog spoja baterije? Koliku snagu baterija troši, a koliku predaje navedenom otporniku? Izrazi korisnost u %.*

Rješenje. Struja koja potekne strujnim krugom iznosi

$$I = \frac{U_v}{R_v} = \frac{20}{2} = 10\ \mathrm{A}.$$

Kako ista struja prolazi i kroz bateriju, njen unutarnji otpor je

$$R_u = \frac{U_u}{I} = \frac{4}{10} = 0.4\ \Omega.$$

Struja kratkog spoja je

$$I_{KS} = \frac{U}{R_u} = 60\ \mathrm{A}.$$

Snaga koju troši baterija je

$$P = I^2(R_u + R_v) = 100 \cdot 2.4 = 240 \text{ W},$$

a snaga predana otporniku

$$P_v = I^2 R_v = 200 \text{ W}.$$

Korisnost je tada

$$\eta = \frac{200}{240} = 83.33\%.$$

Ur.

1635. *Prsten i disk jednakog promjera i jednake mase kotrljaju se bez klizanja jednakom linearnom brzinom. Kolika je kinetička energija diska ako je kinetička energija prstena 1 J?*

Rješenje. Za kinetičku energiju rotacije obaju tijela koristimo izraz

$$E_R = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

gdje je $\omega = \omega_1 = \omega_2$ kutna brzina rotacije, jednaka za oba tijela (i iznosa $\frac{v}{r}$). Moment tromosti prstena je

$$I_P = mr^2,$$

dok je moment tromosti diska

$$I_D = \frac{1}{2} mr^2.$$

Uvrštavanjem dobijemo energiju rotacije prstena

$$E_P = \frac{1}{2} mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2} mv^2,$$

a za disk

$$E_D = \frac{1}{2}\frac{1}{2} mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4} mv^2.$$

Ukupna kinetička energija je za oba tijela zbroj dobivene i translacijske energije $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, jer kotrljanje znači istovremenu translaciju i rotaciju. Tada dobijemo

$$E\,(\text{disk}) = \frac{3}{4} E\,(\text{prsten}) = 0.75 \text{ J}.$$

Ilma Smajić (4),
Gimnazija "Visoko", Visoko, BiH

1636. *Dva različita radioaktivna izvora imaju jednaku početnu aktivnost (u broju raspada u sekundi, Becquerelima). Nakon 5 sati, prvi izvor ima 40% veću aktivnost od drugog. Kolika su vremena poluraspada tih izvora, ako prvi ima točno 10 sati dulje vrijeme poluraspada od drugog?*

Rješenje. Nakon 5 sati aktivnost prvog izvora je

$$A_1 = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_1}},$$

a drugog

$$A_2 = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_2}},$$

uz $t = 5$ h, $A_1 = 1.4 A_2$ i $T_1 = T_2 + 10$ h. Uvrštavanjem dobivamo

$$1.4 = 2^{\frac{5}{T_2} - \frac{5}{T_2 + 10}}$$

$$\ln 1.4 = \frac{10 \cdot 5}{T_2(T_2 + 10)} \cdot \ln 2$$

Odatle je $T_2 = 6.313$ h, pa je $T_1 = 16.313$ h.

Ilma Smajić (4), Visoko, BiH