Točnost izračunavanja broja π

Krajem prošlog tisučljeća, 1997. godine, pojavila se formula koju su objavili David Bailey, Peter Borwein i Simon Plouffle, a pomoću koje se može brzo izračunati broj π s velikom točnošću.

U knjizi Lennart Berggren, Jonathan Borwien, Peter Borwein, *Pi: A Source Book*, 2003. godine, objavljena je začuđujuće jednostavna formula. Za svako sljedee k dobije se barem još po jedna točna decimala. Postupak koji se nastavlja ne utječe na prvih n decimala.

Koristeći formulu za izračunavanje broja

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right),$$

odredimo njegovu točnost na k decimala.

Ocijenimo za $n > 0$ izraz

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} = \ldots \\
&= \frac{960n^2 + 1208n + 376}{(8n+1)(8n+4)(8n+5)(8n+6)} \\
&= \frac{15 + \frac{151}{8n} + \frac{94}{16n^2}}{\left(1+\frac{1}{8n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)(8n+5)(8n+6)} < \frac{15 + \frac{151}{8} + \frac{94}{16}}{(8n+5)(8n+6)} \\
&< \frac{15+19+6}{(8n+5)(8n+6)} = \frac{20}{(8n+5)(4n+3)} < \frac{20}{8n \cdot 4n} < \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Ako stavimo $k \geq 1$ i

$$a_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

možemo ocijeniti grešku ε_k:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k = \pi - a_{k-1} &< \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{16^n} \cdot \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{16^k k^2}\left(1 + \frac{1}{16} \cdot \frac{k^2}{(k+1)^2} + \frac{1}{16^2} \cdot \frac{k^2}{(k+2)^2} + \ldots\right) \\
&< \frac{1}{16^k k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} = \frac{1}{16^k k^2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{1}{15 \cdot 16^{k-1} k^2}.
\end{aligned}$$

Za $k = 8$ greška je manja od 10^{-15}.

Željko Hanjš