Središte trokutu upisane kružnice i Eulerov pravac

Maja Starčević[1]

U radu ćemo proučiti može li središte trokutu upisane kružnice također pripadati Eulerovom pravcu. Poznato je da u svakom trokutu tom pravcu pripadaju težište, ortocentar i središte trokutu opisane kružnice. Iznimka su jednakostranični trokuti u kojima se sve te točke podudaraju pa se Eulerov pravac ne definira. Lako je dokazati da u jednakokračnom trokutu, koji nije jednakostraničan, sve četiri karakteristične točke trokuta pripadaju istom pravcu. Pitamo se postoje li ipak i raznostranični trokuti s tim svojstvom. Odgovor na to pitanje je negativan, odnosno vrijedi tvrdnja

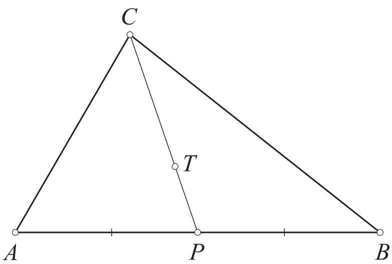
Teorem 1. *Dan je trokut ABC koji nije jednakostraničan. Središte trokutu ABC upisane kružnice pripada Eulerovom pravcu ako i samo ako je trokut jednakokračan.*

U nastavku ćemo dokazati tvrdnju teorema 1 na dva različita načina. Pritom označavamo težište, ortocentar te središta upisane i opisane kružnice trokuta ABC redom s T, H, U i O.

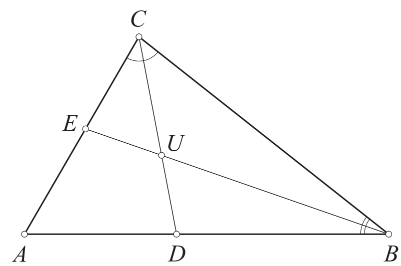
Prvi dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju teorema pomoću vektorskog računa. Pretpostavimo da trokut ABC nije jednakostraničan. Nadalje, označimo $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

Izrazimo sada vektore $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AU}$ i $\overrightarrow{AO}$ pomoću nekolinearnih vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Neka je P polovište stranice $\overline{AB}$ (slika 1). Imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC})\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\Big) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



Slika 1.



Slika 2.

Sada zapisujemo vektor $\overrightarrow{AU}$ u zadanoj bazi. Prvo primijetimo da je U sjecište simetrala kutova trokuta ABC (slika 2). Neka je D sjecište simetrale kuta kod vrha C sa stranicom $\overline{AB}$ te neka je E sjecište simetrale kuta kod vrha B sa stranicom $\overline{AC}$. Kako simetrala kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru duljina stranica trokuta koje zatvaraju taj kut, imamo

[1] Autorica je docentica na Zavodu za primijenjenu matematiku Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `mstarcev@math.hr`

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AE} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}.$$

Neka su $x, y \in \mathbf{R}$ takvi da je $\overrightarrow{DU} = x\overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{EU} = y\overrightarrow{EB}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AU} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DU} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{DC} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + x\left(-\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{b}{a+b}(1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Zapišimo vektor $\overrightarrow{AU}$ na još jedan način:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AU} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EU} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{EB} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC} + y(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC} + y\left(-\frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) = y\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+c}(1-y)\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Zbog jedinstvenosti zapisa u toj bazi vrijedi

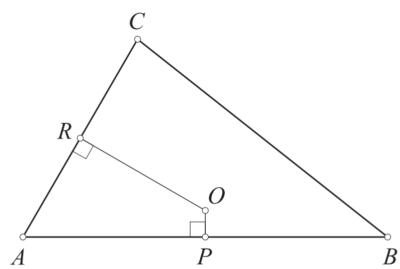
$$\frac{b}{a+b}(1-x) = y, \qquad x = \frac{c}{a+c}(1-y).$$

Iz ovog sustava dobivamo

$$x = \frac{c}{a+b+c}, \qquad y = \frac{b}{a+b+c}.$$

Prema tome,

$$\overrightarrow{AU} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$



Slika 3.

Sada ćemo odrediti zapis vektora $\overrightarrow{AO}$ pomoću skalarnog produkta. Neka je $\overrightarrow{AO} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, za neke α, $\beta \in \mathbf{R}$. Primijetimo da su vektori $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{PO}$ okomiti (slika 3). Prema tome imamo

$$0 = \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO}) \cdot \overrightarrow{AP} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}\right) \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Dobivamo

$$c^2\alpha + (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\beta = \frac{1}{2}c^2. \tag{1}$$

Analogno, neka je R polovište stranice $\overline{AC}$. Tada vrijedi

$$0 = \overrightarrow{RO} \cdot \overrightarrow{AR} = (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AO}) \cdot \overrightarrow{AR} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}\right) \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Iz ove jednakosti dobivamo

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\alpha + b^2\beta = \frac{1}{2}b^2. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) vidimo da su pripadni skalari α i β jednaki

$$\alpha = \frac{1}{2}b^2\frac{c^2 - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{b^2c^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}, \qquad \beta = \frac{1}{2}c^2\frac{b^2 - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{b^2c^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.$$

Označimo $\alpha = \sphericalangle CAB$. Tada je $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = bc\cos\alpha$. Iz kosinusovog poučka imamo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ pa je konačno

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Sada možemo pisati i

$$\alpha = \frac{b^2(c^2 - b^2 + a^2)}{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}, \qquad \beta = \frac{c^2(b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}.$$

Primijetimo također da su α i β uvijek dobro definirani jer je $b^2c^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2 = 0$ ako i samo ako je $\cos\alpha = \pm 1$, a te jednadžbe nemaju rješenje u intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

Nadalje, možemo izračunati

$$\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{AU} - \overrightarrow{AT} = \frac{2b - a - c}{3(a+b+c)}\overrightarrow{AB} + \frac{2c - a - b}{3(a+b+c)}\overrightarrow{AC}.$$

Tada je $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{0}$ ako i samo ako je $2b - a - c = 0$ i $2c - a - b = 0$, odnosno ako i samo ako je $a = b = c$. S obzirom da smo pretpostavili da trokut ABC nije jednakostraničan, zaključujemo $\overrightarrow{TU} \neq \overrightarrow{0}$. Prema tome, točke T, U i O su kolinearne ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbf{R}$ takav da je $\overrightarrow{TO} = \lambda\overrightarrow{TU}$, odnosno $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AT} = \lambda\overrightarrow{TU}$. Iz prethodne jednakosti dobivamo da nužan i dovoljan uvjet za kolinearnost točaka T, U i O glasi

$$(3\alpha - 1)(2c - a - b) = (3\beta - 1)(2b - a - c),$$

odnosno

$$\begin{aligned}&(2c - a - b)[3b^2(c^2 - b^2 + a^2) - 4b^2c^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2]\\ &= (2b - a - c)[3c^2(b^2 - c^2 + a^2) - 4b^2c^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2].\end{aligned}$$

Ovaj uvjet je ekvivalentan s

$$\begin{aligned}0 &= 3(b-c)[(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2] - a[3c^2(b^2 - c^2 + a^2) - 3b^2(c^2 - b^2 + a^2)]\\
&\quad + (b-c)[3c^2(b^2 - c^2 + a^2) + 3b^2(c^2 - b^2 + a^2)]\\
&\quad + 3bc^2(b^2 - c^2 + a^2) - 3b^2c(c^2 - b^2 + a^2)\\
&= 3(b-c)[(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2] - 3a(b-c)[(b+c)(b^2 + c^2) - a^2(b+c)]\\
&\quad + 3(b-c)(-b^4 - c^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2) + 3bc(b-c)(-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc)\\
&= 3(b-c)(a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + 2b^2c^2 - ab^3 - abc^2 - ab^2c - ac^3 + a^3b\\
&\quad + a^3c - a^2bc + b^3c + bc^3)\\
&= 3(b-c)[a^2(a^2 - c^2) - b^2(a^2 - c^2) - b^2c(a-c) + ac(a^2 - c^2) - bc^2(a-c)\\
&\quad - b^3(a-c) + a^2b(a-c)]\\
&= 3(b-c)(a-c)(a^3 - b^3 + 2a^2c + ac^2 - bc^2 - ab^2 + a^2b - 2b^2c)\\
&= 3(b-c)(a-c)[(a-b)(a^2 + ab + b^2) + ab(a-b) + 2c(a-b)(a+b) + c^2(a-b)]\end{aligned}$$

$= 3(b-c)(a-c)(a-b)(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)$

$= 3(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)^2.$

Dakle, vidimo da su točke T, U i O kolinearne ako i samo ako je $(b-c)(a-c)(a-b)=0$. Ta jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b$ ili $b=c$ ili $a=c$. Drugim riječima, sve četiri karakteristične točke trokuta pripadaju istom pravcu ako i samo ako je trokut jednakokračan. Dakle, ne postoji raznostraničan trokut koji ima to svojstvo. □

Pogledajmo i jedan alternativni dokaz te tvrdnje. Ovaj put ćemo umjesto težišta koristiti ortocentar, odnosno činjenicu da i on pripada Eulerovom pravcu.

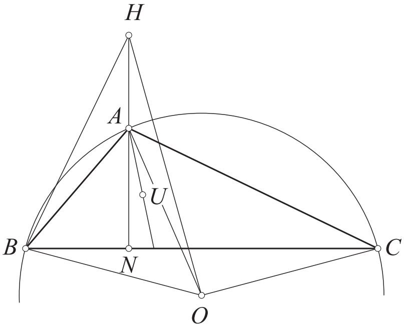
Drugi dokaz. Pretpostavimo da trokut ABC nije jednakokračan. Promotrimo za početak slučaj kad je trokut ABC tupokutan (slika 4). Neka je npr. $\sphericalangle BAC > 90^\circ$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA$. Tada vrijedi

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle ABO = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBO > \sphericalangle BCA + \sphericalangle OCB = \sphericalangle ACO = \sphericalangle OAC.$$

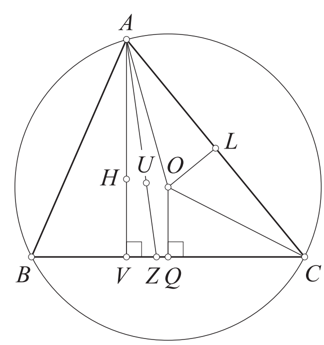
Neka je N nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$. Tada je

$$\sphericalangle BAN = 90^\circ - \sphericalangle ABN < 90^\circ - \sphericalangle NCA = \sphericalangle CAN.$$

Zaključujemo da se simetrala kuta $\sphericalangle BAC$, odnosno polupravac AU, nalazi između polupravaca AN i AO, odnosno pripada kutu $\sphericalangle NAO$. Točka U se nalazi unutar trokuta ABC, a H se nalazi na pravcu AN, ali ne pripada polupravcu AN. Stoga točka U ne pripada pravcu HO, odnosno Eulerovom pravcu.



Slika 4.



Slika 5.

Posve analogno provodimo dokaz i u slučaju da je trokut ABC pravokutan (s pravim kutom $\sphericalangle BAC$).

Neka je sada trokut ABC šiljastokutan (slika 5). Pretpostavimo da U pripada Eulerovom pravcu. S Q označimo polovište stranice $\overline{BC}$, s V nožište okomice iz A na $\overline{BC}$, a sa Z sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ s istom stranicom. Dokažimo prvo da polupravac AU leži između polupravaca AH i AO. Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da je $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$. Tada je

$$\sphericalangle BAV = 90^\circ - \sphericalangle ABV < 90^\circ - \sphericalangle VCA = \sphericalangle CAV.$$

S druge strane, vrijedi

$$\frac{|BZ|}{|CZ|} = \frac{|AB|}{|AC|} < 1.$$

Prema tome je $|BZ| < |BQ|$. Dakle, polupravac AU nalazi se između polupravaca AH i AQ. Kako O pripada trokutu ABC i nalazi se na okomici iz Q na $\overline{BC}$, polupravac AU leži i između polupravaca AH i AO.

Nadalje, neka je k kružnica opisana trokutu ABC sa središtem u točki O. Tada su kutovi $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle AOC$ obodni i središnji kut nad istom tetivom te kružnice pa vrijedi $\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle ABC$. Neka je zatim L polovište stranice $\overline{AC}$. Trokuti AOL i COL su sukladni pa je $\sphericalangle AOL = \sphericalangle ABC$. Iz pravokutnih trokuta ABV i AOL dobivamo da je $\sphericalangle BAV = \sphericalangle OAL$. Kako je AU simetrala kuta BAC, i polupravac AU se nalazi između polupravaca AH i AO, zaključujemo da je $\sphericalangle HAU = \sphericalangle OAU$. Dakle, AU je simetrala kuta HAO i točka U pripada dužini $\overline{HO}$ pa je

$$\frac{|AH|}{|AO|} = \frac{|HU|}{|UO|}.$$

Vidimo da prethodna jednakost ne ovisi o izboru vrha trokuta ABC pa vrijedi i

$$\frac{|AH|}{|AO|} = \frac{|BH|}{|BO|} = \frac{|CH|}{|CO|} = \frac{|UH|}{|UO|} = m.$$

Sada ćemo dokazati da ove jednakosti povlače da točke A, B, C i U pripadaju istoj kružnici.

Odaberimo koordinatni sustav tako da je točka O u ishodištu koordinatnog sustava, dok je točka H na osi x, s koordinatama $(d,0)$. Neka je $M = (x_0, y_0)$ proizvoljna točka sa svojstvom da je

$$\frac{|MH|}{|MO|} = m. \tag{3}$$

Pretpostavimo prvo da je $m \neq 1$. Tada vrijedi

$$\sqrt{(x_0-d)^2 + y_0^2} = m\sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

odnosno

$$x_0^2 + y_0^2 = -\frac{2d}{m^2-1}x_0 + \frac{d^2}{m^2-1}.$$

Neka je S neka točka na osi x, s koordinatama $(s,0)$. Odredimo kvadrat udaljenosti točaka S i M:

$$|SM|^2 = (x_0-s)^2 + y_0^2 = -2x_0\left(\frac{d}{m^2-1} + s\right) + s^2 + \frac{d^2}{m^2-1}.$$

Odaberemo li $s = -\dfrac{d}{m^2-1}$, dobivamo

$$|SM|^2 = s^2 + \frac{d^2}{m^2-1} = \frac{d^2m^2}{(m^2-1)^2}.$$

Dakle, za tako odabranu točku S sve točke koje zadovoljavaju (3) leže na kružnici sa središtem u točki S i radijusom $r = \dfrac{dm}{|m^2-1|}$.

Prema tome, dokazali smo da A, B, C i U pripadaju istoj kružnici, a to je naravno nemoguće jer točke A, B i C pripadaju kružnici k, dok se U nalazi unutar trokuta ABC.

U slučaju $m = 1$, točke A, B, C i U pripadaju simetrali dužine $\overline{HO}$, i opet dolazimo do kontradikcije. $\square$