Nizovi i kamatni račun

Željko Zrno[1], *Marijana Ćutuk*[2]

Sažetak

U nastavnoj praksi bilo da se radi o srednjoj ekonomskoj školi ili studiju ekonomskog smjera, pojmovi *kamatnog računa*, kao temeljni pojmovi tog računa, odnosno odgovarajuće formule, prezentiraju se tako što se služimo definicijama i alatima financijske matematike. Ovim člankom želimo pokazati kako se uz pomoć više matematičkih pojmova, pojma *niza*, može doći do temeljnih formula za izračun konačne vrijednosti, kod jednostavnog, odnosno složenog kamatnog računa, na koju naraste glavnica C_0 oročena na n godina uz dekurzivnu kamatnu stopu p. Došli smo da formule $C_n = C_0\left(1+\dfrac{np}{100}\right)$ za jednostavni kamatni račun, odnosno $C_n = C_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$ za složeni kamatni račun.

Pojam niza

Pojam niza blizak je pojmu prebrojavanja. Riječ "nizati" iz koje se izvodi i riječ *niz* sinonim je za "brojati po redu". U običnom jeziku pod nizom podrazumijevamo poredanu skupinu bilo kakvih (obično svojstvima sličnih) objekata, poput niza bisera, niza kuća, niza sunčanih dana. Kuće su označene i poredane svojim brojevima, a svaki dan ima svoj nadnevak. Dakle, radi se o nekom pridruživanju prirodnih brojeva i njima odgovarajućih objekata.

Definicija 1. Niz je funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Umjesto $a(n)$ obično kraće pišemo a_n za $n \in \mathbf{N}$. Cijeli niz označavamo s (a_n).

$$\begin{aligned}
&a_1 - \text{prvi član niza}\\
&a_2 - \text{drugi član niza}\\
&\ \vdots\\
&a_n - n\text{-ti (opći) član niza}\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Obično se zapisuje: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Podsjećamo na dva poznata i važna niza: aritmetički i geometrijski.

Definicija 2. Za niz (a_n) kažemo da je *aritmetički*, ako je razlika člana i člana ispred njega stalna i iznosi d:

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2. \tag{1}$$

Broj d naziva se *razlika (diferencija) aritmetičkog niza*.

[1] Viši je predavač, profesor matematike na Veleučilištu "Marko Marulić" u Kninu.

[2] Studentica je kninskog Veleučilišta na Odjelu Trgovinskog poslovanja s poduzetništvom.

Formula za opći član aritmetičkog niza lagano se određuje iz (1):

$$\begin{aligned} &a_1, \\ &a_2 = a_1 + d, \\ &a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

Uočavamo da prvom članu niza moramo dodati $(n-1)$ razlika d da bismo dobili n-ti ili opći član niza.

Dakle, aritmetički niz s prvim članom a_1 i razlikom d ima opći član

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{2}$$

Definicija 3. Za niz (a_n) kažemo da je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \quad n \geq 2. \tag{3}$$

Broj q naziva se *kvocijent geometrijskog niza*.

Formula za opći član geometrijskog niza određuje se iz (3):

$$\begin{aligned} &a_1, \\ &a_2 = a_1 \cdot q, \\ &a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2, \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

Prema tome, opći je član a_n geometrijskog niza umnožak prvog člana a_1 i kvocijenta q potenciranog s $n-1$.

Dakle, geometrijski niz kome je prvi član a_1, a kvocijent q, ima opći član

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{4}$$

Osnovni pojmovi kamatnog računa

Ulaganje novca za određeno vremensko razdoblje u banku (štednja) odnosno za korištenje novčanih sredstava iz banke za određeno vremensko razdoblje (podizanje zajma, kredita) predstavlja jedan važan i čest poslovni odnos koji je reguliran ugovorom ili zakonom.

Pod pojmom *kamata* podrazumijeva se naknada koju dužnik plaća za posuđenu *glavnicu*. Kamate se uvijek obračunavaju za neki osnovni vremenski interval koji nazivamo *razdoblje ukamaćivanja* ili *razdoblje kapitalizacije* (najčešće jedna godina).

Pod pojmom *kamatna stopa* podrazumijeva se iznos koji se plaća za 100 novčanih jedinica za neki osnovni vremenski interval. Kamate možemo obračunavati na dva osnovna načina:

a) *dekurzivna* kraju obračunskog razdoblja u odnosu na glavnicu s početka tog razdoblja;

b) *anticipativna* početku obračunskog razdoblja u odnosu na vrijednost glavnice s kraja tog razdoblja.

Isto tako, kamate se mogu obračunavati *jednostavnim* i *složenim* modelom.

U ovom radu orijentirati ćemo se na dekurzivni obračun kamata, koji je i češće u upotrebi.

Sada definiramo *osnovni problem*:

Bez obzira na vrstu i model obračuna kamata, problem glasi: *Izračunati konačnu vrijednost* C_n *na koju naraste glavnica* C_0, *za* n *godina i uz godišnju kamatnu stopu* p.

Shema i matematički zapis osnovnog problema imaju izgled:

$$C_n = C_0 + I \quad (I \text{ ukupne kamate}). \tag{5}$$

Jednostavni obračun kamata i aritmetički niz

Kod jednostavnog obračuna kamata, kamate se u svakom razdoblju računaju na početnu vrijednost glavnice.

U jednostavnom kamatnom računu upotrebljavaju se oznake za sljedeće veličine:

C_0 – glavnica
p – dekurzivna kamatna stopa
n – broj razdoblja (godina)
C_n – konačna vrijednost glavnice
I – jednostavne kamate (dekurzivni obračun kamata).

Imamo razmjer za jednu godinu $I : C_0 = p : 100$, iz kojeg slijedi $I = \dfrac{C_0 \cdot p}{100}$.

Jednostavne kamate za n godina veće su n puta od kamata za jednu godinu, pa ukupne jednostavne kamate za n godina iznose

$$I = \frac{C_0 pn}{100}. \tag{6}$$

Kako je obračun kamata godišnji, jednostavan i dekurzivan, konačna je vrijednost glavnice na kraju:

prve godine: $C_1 = C_0 + \dfrac{C_0 p}{100} = C_0\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$,

druge godine: $C_2 = C_1 + \dfrac{C_0 p}{100} = C_0\left(1 + \dfrac{p}{100}\right) + \dfrac{C_0 p}{100} = C_0\left(1 + \dfrac{2p}{100}\right)$,

...

itd., na kraju općenito n-te godine $C_n = C_0\left(1 + \dfrac{np}{100}\right)$.

Naznačene konačne vrijednosti glavnice na kraju svake godine čine zapravo ovaj aritmetički niz: C_0, C_1, $C_2, \ldots, C_n$.

U tom je nizu prvi član $a_1 = C_0$, razlika $d = \dfrac{C_0 p}{100}$, broj članova je $n+1$, a potrebno je odrediti konačnu vrijednost glavnice na kraju n-te godine, tj. C_n, koja označava opći član a_{n+1}. Na temelju (2) imamo

$$\begin{aligned} C_n &= a_{n+1} = C_0 + (n+1-1)\frac{C_0 p}{100} \\ C_n &= C_0\left(1 + \frac{np}{100}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Primjer 1. *Izračunati konačnu vrijednost na koju naraste glavnica od 1000 kn, ako je oročena na 5 godina uz godišnju kamatnu stopu od 3%. Obračun kamata je jednostavan i dekurzivan.*

Rješenje. Iz (7) uz $C_0 = 1000$, $n = 5$, $p = 3\%$ imamo

$$\begin{aligned} C_5 &= 1000\left(1 + \frac{5 \cdot 3}{100}\right) \\ C_5 &= 1150 \text{ kn}. \end{aligned}$$

Lako se provjeri da pomoću formule (7) dobivamo odgovarajući aritmetički niz: 1000, 1030, 1060, 1090, 1120, 1150.

Ukupne kamate su $I = 150$ kn.

Složeni obračun kamata i geometrijski niz

Za razliku od jednostavnog, kod složenog obračuna kamata, kamate se u svakom sljedećem razdoblju računaju na prethodnu vrijednost uvećanu za kamate.

Imamo oznake za ovu vrstu obračuna kamata:

C_0 – početna vrijednost glavnice
n – broj godina trajanja kapitalizacije
p – dekurzivna kamatna stopa
C_n – konačna vrijednost glavnice
I – složene kamate (dekurzivni obračun kamata).

Kako je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan, konačna je vrijednost glavnice na kraju:

prve godine: $C_1 = C_0 + \frac{C_0 p}{100} = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

druge godine: $C_2 = C_1 + \frac{C_1 p}{100} = C_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$,

...

itd., na kraju općenito n-te godine $C_n = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Naznačene konačne vrijednosti glavnice na kraju svake godine čine zapravo ovaj geometrijski niz: C_0, C_1, $C_2, \ldots, C_n$.

U tom je nizu prvi član $a_1 = C_0$, kvocijent $q = 1 + \frac{p}{100}$, broj članova je $n+1$, a potrebno je odrediti konačnu vrijednost glavnice na kraju n-te godine, tj. C_n, koja označava opći član niza a_{n+1}. Na temelju (4) imamo:

$$\begin{aligned} C_n &= a_{n+1} = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n+1-1} \\ C_n &= C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}. \end{aligned} \tag{8}$$

Označimo $r = 1 + \dfrac{p}{100}$, kojeg zovemo *dekurzivni kamatni faktor*, gdje (8) možemo pisati

$$C_n = C_0 \cdot r^n.$$

Ukupne kamate za složeni obračun kamata dobivamo iz (5). Dakle, imamo

$$I = C_n - C_0. \tag{9}$$

Primjer 2. *Izračunati konačnu vrijednost na koju naraste glavnica od 1000 kn, ako je oročena 5 godina uz godišnju kamatnu stopu od 3%. Obračun kamata je složen i dekurzivan.*

Rješenje. Iz (8) uz $C_0 = 1000$, $n = 5$, $p = 3\%$ imamo

$$\begin{aligned} C_5 &= 1000\left(1+\frac{3}{100}\right)^5 \\ C_5 &= 1000 \cdot 1.03^5 \\ C_5 &= 1159.27 \text{ kn}. \end{aligned}$$

Lako se provjeri da pomoću formule (8) dobijemo odgovarajući geometrijski niz: 1000, 1030, 1060.90, 1092.73, 1125.51, 1159.27.

Ukupne kamate iz (9) iznose $I = 159.27$ kn.

Zaključak

U ovom radu, pojmove jednostavni i složeni kamatni račun, odnosno temeljne formule za izračun konačnih vrijednosti, povezali smo i obradili pomoću aritmetičkog odnosno geometrijskog niza. Dakle, cilj nam je bio da ekonomske pojmove obradimo više preko matematičkih alata i to na elegantan, ali učinkovit i nestandardan način.

Literatura

[1] Željko Zrno, *Matematika za ekonomiste za stručne studije*, Veleučilište "Marko Marulić" u Kninu, Knin, 2011.

[2] Branko Relić, *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb, 2002.

[3] Boris Apsen, *Repetitorij elementarne matematike* (I i II dio), Tehnička knjiga, Zagreb, 1968.