

Carlsonove¹ nejednakosti

Šefket Arslanagić²

Švedski matematičar *F. D. Carlson* je 1934. godine dokazao sljedeću nejednakost iz matematičke analize:

Neka je a_1, a_2, \dots niz nenegativnih realnih brojeva koji nisu svi jednaki nuli i neka je $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 < +\infty$; ($k \in A$). Tada je

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)^4 < \pi^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 \right), \quad (1)$$

gdje je π^2 najbolja moguća konstanta.

Gornja nejednakost ima sljedeći integralni analogon:

Neka je f nenegativna realna funkcija na $[0, +\infty)$, koja nije identički jednaka 0, takva da su $f^2(x)$ i $x^2 f^2(x)$ integrabilne funkcije na istom intervalu. Tada je

$$\left(\int_0^{\infty} f(x) dx \right)^4 < \pi^2 \left(\int_0^{\infty} f^2(x) dx \right) \left(\int_0^{\infty} x^2 f^2(x) dx \right), \quad (2)$$

gdje je π^2 najbolja moguća konstanta.

Nejednakosti (1) i (2) nazivaju se *Carlsonove nejednakosti*.

Umjesto integralnih nejednakosti postoje i one koje se odnose na nizove, konačne i beskonačne. Iako ovo spada u višu matematiku koja se izučava na prirodoslovnim i tehničkim fakultetima, za dokaz ovih nejednakosti koristi se elementarna matematika.

Ovdje ćemo dokazati Carlsonovu nejednakost za konačan niz a_1, a_2, \dots, a_n nenegativnih realnih brojeva koji nisu svi jednaki nuli na jedan zanimljiv način koji se razlikuje od onoga koga je koristio Carlson. Dakle, dokazat ćemo sljedeću nejednakost:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^4 < \pi^2 (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2), \quad (3)$$

gdje su a_1, a_2, \dots, a_n nenegativni realni brojevi koji nisu svi jednaki nuli.

Ova nejednakost se u literaturi često naziva *druga Carlsonova nejednakost*.

Prije njenog dokaza formulirat ćemo i dokazati i *prvu Carlsonovu nejednakost* koja glasi:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^4 < \frac{\pi^2}{6} (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2), \quad (4)$$

gdje su a_1, a_2, \dots, a_n nenegativni realni brojevi koji nisu svi jednaki nuli.

¹ F. D. Carlson (1888.–1952.), švedski matematičar

² Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Sarajevu; e-pošta: asefket@pmf.unsa.ba

Dokaz. Za dokaz ove nejednakosti koristit ćemo nejednakost Schwarz-Cauchy-Bunyakovskog:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^4 &= \left(a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot \frac{1}{2} + \dots + n \cdot a_n \cdot \frac{1}{n} \right)^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Poznato je da vrijedi jednakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

te odavde

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}. \quad (6)$$

Sada iz (5) i (6) dobivamo prvu Carlsonovu nejednakost (4).

Da bi dokazali nejednakost (3), formulirat ćemo i dokazati jednu lemu.

Lema. Vrijedi nejednakost

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{2^2+x^2} + \dots + \frac{x}{n^2+x^2} < \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

gdje je $x > 0$.

Dokaz. Koristit ćemo analitičku geometriju. Na osi Ox uzimamo točku $A(x, 0)$, ($x > 0$), a na osi Oy točke $B_k(0, k)$; $k = 0, 1, \dots$. Promatrajmo $\triangle B_{k-1}AB_k$ i neka je $\varphi_k = \sphericalangle B_{k-1}AB_k$, gdje $k = 1, 2, \dots$. Izračunat ćemo površinu $\triangle B_{k-1}AB_k$ na dva načina:

$$P_{\triangle B_{k-1}AB_k} = \frac{1}{2}x$$

i

$$P_{\triangle B_{k-1}AB_k} = \frac{1}{2}|B_{k-1}A| \cdot |AB_k| \cdot \sin \varphi_k,$$

a odavde

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}|B_{k-1}A| \cdot |AB_k| \cdot \sin \varphi_k,$$

tj.

$$x = \sqrt{(k-1)^2 + x^2} \cdot \sqrt{k^2 + x^2} \cdot \sin \varphi_k.$$

Sada je

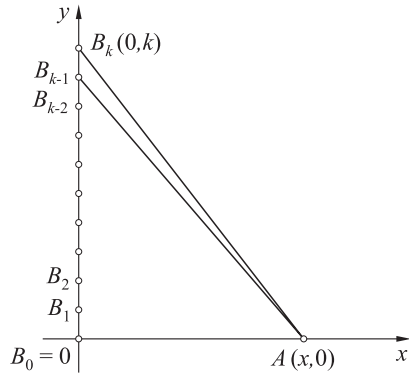
$$\sin \varphi_k = \frac{x}{\sqrt{(k-1)^2 + x^2} \cdot \sqrt{k^2 + x^2}} > \frac{x}{k^2 + x^2}. \quad (8)$$

Poznato je da vrijedi nejednakost

$$\varphi_k \geq \sin \varphi_k, \quad \varphi_k \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (9)$$

te iz (8) i (9) imamo

$$\frac{x}{k^2 + x^2} < \varphi_k,$$



tj.

$$\frac{x}{1^2 + x^2} < \varphi_1; \quad \frac{x}{2^2 + x^2} < \varphi_2, \dots, \frac{x}{n^2 + x^2} < \varphi_n,$$

odnosno zbog

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n &< \frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{1^2 + x^2} + \frac{x}{2^2 + x^2} + \dots + \frac{x}{n^2 + x^2} &< \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

Prijeđimo sada na dokaz druge Carlsonove nejednakosti, (3).

Dokaz. Neka je x proizvoljan pozitivan broj. Opet ćemo koristiti nejednakost Schwarz-Cauchy-Bunyakowskog s tim što ćemo svako a_k , ($k = 1, 2, \dots, n$) predstaviti u obliku

$$\sqrt{x + \frac{k^2}{x}} a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{x + \frac{k^2}{x}}}.$$

Sada dobivamo

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &\leq \left(\frac{x}{1^2 + x^2} + \frac{x}{2^2 + x^2} + \dots + \frac{x}{n^2 + x^2} \right) \\ &\cdot \left(x(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + \frac{1}{x}(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2) \right), \end{aligned}$$

a odavde zbog nejednakosti (7):

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq \frac{\pi}{2} \left(x(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + \frac{1}{x}(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2) \right). \quad (10)$$

Izaberimo sada x tako da vrijedi

$$x(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = \frac{1}{x}(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2).$$

Tada iz (10) dobivamo sljedeće dvije nejednakosti:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 < \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{x}(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2) \right),$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 < \frac{\pi}{2} (2x(a_1 + a_2^2 + \dots + a_n^2)).$$

Nakon množenja ove dvije, dobivamo

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^4 < \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{2}{x} \cdot 2x(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2),$$

odnosno

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^4 < \pi^2 (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \dots + n^2 a_n^2),$$

a ovo je (3), druga Carlsonova nejednakost.

Literatura

- [1] Š. ARSLANAGIĆ, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
- [2] A. ENGEL, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag New York, 1998.
- [3] D. S. MITRINOVIĆ, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.