ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2017. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $1/269$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

A) Zadaci iz matematike

3567. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x(x+2) = y^2(y^2+1).$$

3568. Nađi sve proste brojeve oblika $2^{2^n}+5$, gdje je n nenegativan cijeli broj.

3569. Riješi sustav linearnih jednadžbi

$$4bcx + acy - 2abz = 0$$

$$5bcx + 3acy - 4abz = -abc$$

$$3bcx + 2acy - abz = 4abc,$$

gdje je $abc \neq 0$.

3570. Za koje pozitivne cijele brojeve x je broj $x^2 - 14x - 256$ potpun kvadrat?

3571. Neka je n cijeli broj veći od 2. Dokaži da je $n(n-1)^4 + 1$ složen broj.

3572. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokaži nejednakost

$$\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\left(\frac{1}{b^2}-1\right)\left(\frac{1}{c^2}-1\right) \geq 512.$$

3573. Točke D, E, F su polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC, a P je bilo koja točka na stranici $\overline{BC}$. Pravac AP siječe pravac FD u Q i DE u K. Dokaži da je $KC \parallel BQ$.

3574. U šiljastokutnom trokutu ABC su $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ visine, M je ortogonalna projekcija od F na BC i N ortogonalna projekcija od B na EF. Dokaži da je $AC \parallel MN$.

3575. Na dužini $\overline{AB}$ dana je točka C i konstruirane su polukružnice s dijametrima $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$ (s iste strane pravca AB). Nađi omjer površine lika sa zakrivljenim stranicama određenih tim polukružnicama i površine trokuta s vrhovima u polovištima tih triju polukružnica.

3576. Duljine stranica šiljastokutnog trokuta su a, b i c. Udaljenosti središta trokutu opisane kružnice od tih stranica su redom m, n i p. Dokaži jednakost

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=\frac{abc}{4mnp}.$$

3577. Ako kutovi α, β, γ trokuta zadovoljavaju relaciju

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1$$

dokaži da je jedan od njih jednak 120°.

3578. Dokaži da je trokut ABC kod kojeg vrijedi

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}$$

jednakokračan.

3579. U konveksnom 21-terokutu nacrtane su sve njegove dijagonale. Dokaži da barem dvije od njih zatvaraju kut manji od 1°.

3580. Zadana je funkcija $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ sa svojstvima:

a) $f(a+b) \geq f(a) + f(b)$, za svake $a, b \in \mathbf{Z}$;

b) $f(1) = 1$, $|f(-1)| = 1$.

Dokaži: $f(a) = a$ za svaki $a \in \mathbf{Z}$.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 418. Automobil je 6 sekundi jednoliko ubrzavao pri čemu mu se početna brzina povećala 4 puta. Kolika je bila ta početna brzina ako mu je akceleracija iznosila $4\ \mathrm{m/s^2}$?

OŠ – 419. Voda je najgušća na $4\,^\circ\mathrm{C}$ kad joj gustoća iznosi $1000\ \mathrm{kg/m^3}$. Ako se litru vode zagrije za $1\,^\circ\mathrm{C}$ njen će se volumen povećati približno za $0.2\ \mathrm{cm^3}$. Kolika će biti gustoća litre vode početne temperature $4\,^\circ\mathrm{C}$ nakon što ju se 10 minuta zagrijava grijačem snage 350 vata? Specifični toplinski kapacitet vode je $4200\ \mathrm{J/kgK}$.

OŠ – 420. Periodi rotacije (okretanja oko svoje osi) na Zemlji i Marsu su približno jednaki pa smjene dana i noći na tim planetima traju oko 24 sata, na Marsu 37.5 minuta dulje. Usporedite njihove periode revolucije (okretanja oko Sunca) ako je prosječna brzina Zemlje oko Sunca 29.78 km/s, a Marsa 24.077 km/s. Prosječna udaljenost Zemlje od Sunca iznosi 149.6 milijuna kilometara, a Marsa 227.94 milijuna kilometara. Pretpostavite da su staze tih planeta kružnice. Periode revolucije izrazite u danima.

OŠ – 421. Daska mase 45 kilograma ima oslonac točno na trećini svoje duljine. Koliku bi masu moralo imati dijete koje bi se, sjedeći na kraju daske, moglo samo ljuljati na njoj?

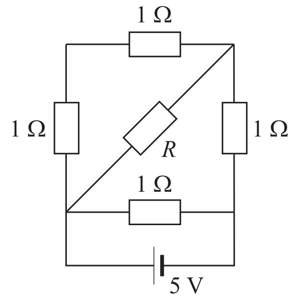
1637. Žarišna daljina tanke konvergentne leće je 10% manja od udaljenosti predmeta od leće. Oštra realna slika nastaje na udaljenosti 40 cm od leće. Odredi jačinu leće.

1638. Kamen možemo izbaciti kosim hicem, početnom brzinom 20 m/s. Metu koja se nalazi iznad mjesta izbačaja kamena možemo pogoditi s dva različita kuta izbačaja, takvim da vrijeme leta iznosi 1 s ili 3.5 s. Odredi tlocrtnu udaljenost mete, visinu mete i oba kuta izbačaja.

1639. Dva unutarnja planeta, Merkur i Venera obiđu Sunce brže od Zemlje, s periodima $T_M = 0.2408$ godina i $T_V = 0.6152$ godine. Koristeći treći Keplerov zakon, odredi duljine poluosi putanja, te iz toga maksimalni kutni otklon od Sunca (gledano sa Zemlje), uz aproksimaciju kružnih putanja.

1640. Kuglica malih dimenzija, mase 0.5 kg obješena je na oprugu zanemarive mase, učvršćenu na strop gornjim krajem. Kuglicu rotiramo u horizontalnoj ravnini, tako da se duljina opruge ne mijenja. Vrtnja pri kutovima otklona 20° i 30° ima jednak period rotacije, iznosa 1.4 sekunde. Odredi duljinu opruge u oba slučaja, te konstantu elastičnosti opruge.

1641. Koliki otpor mora imati otpornik R u sredini sheme da bi kroz njega tekla struja 1.25 A? Kolika je tada ukupna struja iz izvora?



1642. Na čavao zabijen u zid obješen je tanak metalni prsten radijusa 4 cm. Odredi period malih oscilacija prstena (oko čavla, u ravnini prstena) oko ravnotežnog položaja.

1643. Za energiju nuklearne reakcije koriste se drugačije mjerne jedinice od energije kemijskih reakcija. Tako za fuzijsku reakciju imamo oslobođenu energiju Q po reakciji (u elektronvoltima):

$$^2\mathrm{H} + ^3\mathrm{He} \to ^1\mathrm{H} + ^4\mathrm{He}, \quad Q = 28\,295\,673 \text{ eV},$$

dok za gorenje metana imamo molarnu entalpiju S (po molu metana):

$$CH_4 + 2O_2 \to CO_2 + 2H_2O, \quad S = 891 \text{ kJ/mol}.$$

Odredi molarnu entalpiju nuklearne reakcije, a zatim Q-vrijednost kemijske reakcije. Koliki je omjer tih dviju energija (po reakciji ili po molu)?

C) Rješenja iz matematike

3539. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} + \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 9.$$

Rješenje. Ako stavimo $t = 3x^2 - 4x - 11$ jednadžba postaje:

$$\sqrt{t + 45} + \sqrt{t} = 9 \implies \sqrt{t + 45} = 9 - \sqrt{t}.$$

Kvadriranjem slijedi

$$t + 45 = 81 - 18\sqrt{t} + t \implies \sqrt{t} = 2$$

$$\implies t = 4 \implies 3x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$\implies x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Zlatko Petolas (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3540. *Ako je*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$

dokaži

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

Rješenje. Množenjem polazne jednakosti redom s a, b, c dobivamo

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{ab}{c+a}+\frac{ac}{a+b}=a,$$

$$\frac{ab}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{bc}{a+b}=b,$$

$$\frac{ac}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=c.$$

Sumiranjem sve tri jednakosti

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\\&\quad+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{ab+bc}{c+a}+\frac{ac+bc}{a+b}\\&\quad=a+b+c\\&\Longrightarrow\ \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+a+b+c\\&\quad=a+b+c\\&\Longrightarrow\ \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.\end{aligned}$$

Danica Petolas (8),
Osnovna škola, Jakovlje

3541. *Dokaži da za svaki prirodan broj $n\geq 1$ vrijedi jednakost*

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

Prvo rješenje. Označimo

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}.$$

Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije. Za $n=1$ tvrdnja je točna jer

$$S_1=\frac{1}{2}=2-\frac{1+2}{2}.$$

Pretpostavimo da je $S_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$. Tada je

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=S_n+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\\&=2-\frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}}=2-\frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Time smo, po principu matematičke indukcije, pokazali da identitet vrijedi za sve $n\in\mathbf{N}$.

Danica Petolas (8), Jakovlje

Drugo rješenje. Zapišimo lijevu stranu preko dvostruke sume, a zatim zamijenimo poredak sumiranja

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2^k}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{2^k}\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}\,\frac{1-\dfrac{1}{2^{n-j+1}}}{\dfrac{1}{2}}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{j-1}}-\frac{1}{2^n}\right)\\&=\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3542. *Ako su a, b, c duljine stranica i t_a, t_b, t_c duljine težišnica trokuta, dokaži nejednakost*

$$\frac{t_a^2}{b^2+c^2}+\frac{t_b^2}{c^2+a^2}+\frac{t_c^2}{a^2+b^2}\leq\frac{9}{8}.$$

Rješenje. Koristimo poznate jednakosti

$$t_a^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4},$$

$$t_b^2=\frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4},$$

$$t_c^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}.$$

Slijedi,

$$\begin{aligned}&\frac{t_a^2}{b^2+c^2}+\frac{t_b^2}{c^2+a^2}+\frac{t_c^2}{a^2+b^2}\\&=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right).\end{aligned}\qquad(*)$$

Pokazat ćemo

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geq\frac{3}{2}.$$

Transformiranjem lijeve strane prethodne nejednakosti i primjenom A-H nejednakosti

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\\&=\left(a^2+b^2+c^2\right)\\&\cdot\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)-3\\&\overset{\text{(A-H)}}{\geq}\left(a^2+b^2+c^2\right)\\&\cdot\frac{9}{b^2+c^2+c^2+a^2+a^2+b^2}-3\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Zajedno sa $(*)$ imamo

$$\begin{aligned}&\frac{t_a^2}{b^2+c^2}+\frac{t_b^2}{c^2+a^2}+\frac{t_c^2}{a^2+b^2}\\&\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}.\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3543. *Riješi nejednadžbu*

$$\log_2^3(x-1)-\log_{0.5}(x-1)>5-\log_2(x-1)^3,$$

za $x>1$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}&\log_2^3(x-1)-\log_{0.5}(x-1)>5-\log_2(x-1)^3\\&\log_2^3(x-1)+\log_2(x-1)>5-3\log_2(x-1)\\&\log_2^3(x-1)+4\log_2(x-1)-5>0\\&(\log_2(x-1)-1)(\log_2^2(x-1)+\log_2(x-1)+5)>0\\&(\log_2(x-1)-1)\left(\left(\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}\right)>0\\&\Longrightarrow\ \log_2(x-1)>1\\&\qquad x-1>2\\&\qquad x>3.\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3544. *Nađi parametar* λ *za koji sustav linearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned}4x+2y-3z&=-8\\2x-3y+z&=1\\6x-9y+3z&=\lambda\end{aligned}$$

ima rješenje.

Rješenje. Množenjem druge jednadžbe s 3 i oduzimanjem treće slijedi $0=3-\lambda$ tj. $\lambda=3$. Time sustav postaje

$$\begin{aligned}4x+2y-3z&=-8\\2x-3y+z&=1\end{aligned}$$

Ako stavimo $z=t$, sva rješenja sustava su

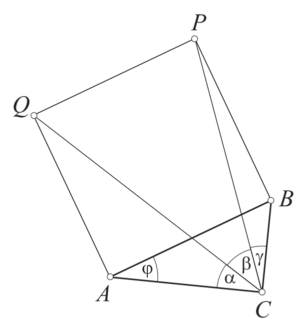
$$(x,y,z)=\left(\frac{7t-22}{16},\frac{5t-10}{8},t\right),\quad t\in\mathbf{R}.$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3545. *Na hipotenuzi* $\overline{AB}$ *pravokutnog trokuta* ABC *s vanjske strane je konstruiran kvadrat* $ABPQ$. *Neka je* $\alpha=\measuredangle ACQ$, $\beta=\measuredangle QCP$, $\gamma=\measuredangle PCB$. *Dokaži* $\cos\beta=\cos\alpha\cos\gamma$.

Rješenje. Iz uvjeta zadatka $|QA|=|AB|=|PB|=c$ i sinusovog poučka za trokut ACQ imamo

$$\begin{aligned}&\frac{\sin\alpha}{c}=\frac{\sin(180^\circ-90^\circ-\varphi-\alpha)}{|AC|}\\&\Longrightarrow\ \frac{\sin\alpha}{c}=\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{c\cos\varphi}\\&\Longrightarrow\ \sin\alpha\cos\varphi=\cos(\varphi+\alpha)\\&\qquad=\cos\varphi\cos\alpha-\sin\varphi\sin\alpha\\&\Longrightarrow\ 1=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\varphi\ \Longrightarrow\ \operatorname{ctg}\alpha=1+\operatorname{tg}\varphi.\end{aligned}$$



Posve analogno, iz trokuta CBP, dobivamo

$$\operatorname{ctg}\gamma = 1 + \operatorname{ctg}\varphi.$$

Sada slijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma &= \frac{1}{1+\operatorname{tg}\varphi} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}\varphi} \\ &= \frac{1}{1+\operatorname{tg}\varphi} + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi} = 1.\end{aligned}$$

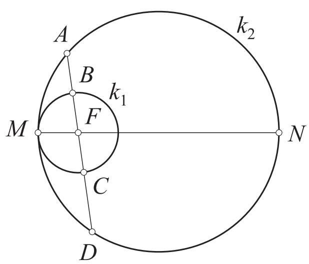
Sada imamo niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = 1 \\ \iff &\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = 1 \iff \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha\cos\gamma} = 1 \\ \iff &\frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\cos\alpha\cos\gamma} = 1 \iff \frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\gamma} = 1 \\ \iff &\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma.\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3546. *Kružnica k_1 dodiruje k_2 iznutra. Pravac prolazi kroz središte manje kružnice i siječe veliku u točkama A i D, a manju u B i C. Odredi omjer polumjera veće i manje kružnice ako je $|AB| : |BC| : |CD| = 2 : 4 : 3$.*

Rješenje.



Označimo, redom, radijuse manje i veće kružnice s r i R te s F središte manje kružnice. Iz uvjeta zadatka je $|BC| = 2r$ pa je $|AB| = r$ i $|CD| = \frac{3}{2}r$. Povucimo pravac središtima kružnica koji siječe veću kružnicu u točkama M i N. Iz potencije točke F s obzirom na kružnicu k_2 slijedi

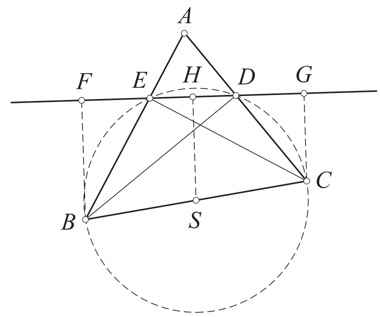
$$\begin{aligned}&|FA| \cdot |FD| = |FM||FN| \\ \Longrightarrow\ &2r \cdot \frac{5}{2}r = r \cdot (2R - r) \\ \Longrightarrow\ &R = 3r.\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3547. *Dužine $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ su visine šiljastokutnog trokuta ABC. Ako su F i G nožišta okomica iz vrhova B i C na pravac DE, dokaži jednakost $|DG| = |EF|$.*

Rješenje. Po Talesu, točke E i D nalaze se na kružnici s dijametrom $\overline{BC}$. Neka je H nožiste okomice iz S na pravac DE. Kako je trokut SDE jednakokračan to je

$$|EH| = |HD|.$$



S druge strane, $\overline{SH}$ je srednjica trapeza $FBCG$ pa je

$$|FH| = |HG|.$$

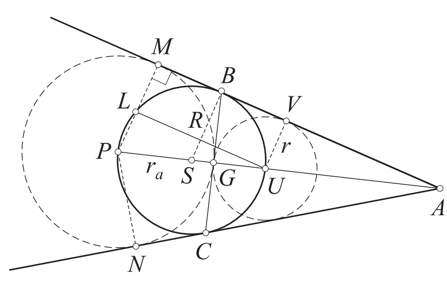
Sada je

$$|DG| = |HG| - |HD| = |FH| - |EH| = |EF|.$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3548. *Iz točke A izvan kružnice polumjera R povučene su tangente AB i AC, gdje su B i C točke dodira. Neka je $|BC| = a$. Dokaži jednakost $4R^2 = r^2 + r_a^2 + \frac{a^2}{2}$, gdje su r i r_a polumjeri upisane i pripisane kružnice trokuta ABC.*

Rješenje. Na osnovu odnosa obodnog i središnjeg kuta središte pripisane kružnice leži na kružnici radijusa R.



$$\sphericalangle BPC = 2\sphericalangle GPB = \sphericalangle ASB = \frac{1}{2}\sphericalangle CSB.$$

Slično,

$$\sphericalangle CUB = 2\sphericalangle GUB = \sphericalangle GUV = 180^\circ - \sphericalangle AUV$$
$$= 180^\circ - \sphericalangle ASB = 180^\circ - \sphericalangle BPC,$$

pa i središte upisane kružnice U leži na kružnici radijusa R. Dakle, $2R = r + r_a \Longrightarrow$

$$4R^2 = r^2 + r_a^2 + 2rr_a. \qquad (*)$$

S druge strane, iz pravokutnog trokuta PUL, uz $|LU| = |MV| = |BC| = a$ slijedi

$$a^2 + (r_a - r)^2 = (r_a + r)^2 \implies 4rr_a = a^2.$$

Sada zajedno sa $(*)$

$$4R^2 = r^2 + r_a^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3549. *U trokutu ABC je $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ i $2\sphericalangle ACB = 3\sphericalangle BAC$. Dokaži da vrijedi*

$$a^2b^2 = (c^2 - a^2)(bc + c^2 - a^2).$$

Rješenje. Koristimo

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R},$$
$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y).$$

Sada redom imamo:

$$(c^2 - a^2)(bc + c^2 - a^2)$$
$$= 16R^4(\sin^2\gamma - \sin^2\alpha)$$
$$\cdot [\sin\beta\sin\gamma + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha]$$
$$= 16R^4\sin(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)$$
$$\cdot [\sin(\gamma+\alpha)\sin\gamma + \sin(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)]$$
$$= 16R^4\sin^2(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)$$
$$\cdot [\sin\gamma + \sin(\gamma-\alpha)]$$
$$= 16R^4\sin^2(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)$$
$$\cdot 2\sin\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\left(\text{uvrstimo} \quad \gamma = \frac{3\alpha}{2}\right)$$
$$= 32R^4\sin^2(\gamma+\alpha)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 16R^4\sin^2(\gamma+\alpha)\sin^2\alpha = 16R^4\sin^2\beta\sin^2\alpha$$
$$= a^2b^2.$$

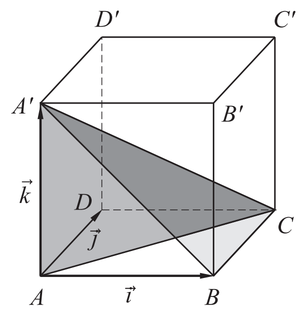
Zlatko Petolas (4), Zagreb

3550. *Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$. Odredi kut između ravnina ACA' i $A'BC$.*

Rješenje. Smjestimo kocku u trodimenzionalni koordinatni sustav tako da

$$A = (0,0,0), \quad B = (a,0,0),$$
$$C = (a,a,0), \quad D = (0,a,0),$$
$$A' = (0,0,a), \quad B' = (a,0,a),$$
$$C' = (a,a,a), \quad D' = (0,a,a).$$

Traženi kut odgovara kutu između normala ravnina ACA' i $A'BC$.



Za ravninu ACA' normala je

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AA'} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2(\vec{\imath} + \vec{\jmath});$$

za ravninu $A'BC$ normala je

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{A'B} \times \overrightarrow{A'C} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & 0 & -a \\ a & a & -a \end{vmatrix} = a^2(\vec{\imath} + \vec{k}).$$

$$\cos\varphi(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{a^4}{a^4\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$
$$\varphi = 60^\circ.$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3551. *Dokaži da je funkcija $f(x)$ zadana s*

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{3}f(x)$$

periodička.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
3f(x) &= \sqrt{3}\sqrt{3}f(x)\\
&= \sqrt{3}(f(x+1)+f(x-1))\\
&= f(x+2)+f(x)+f(x)+f(x-2)\\
f(x) &= f(x+2)+f(x-2)\\
f(x) &= (f(x+4)+f(x))+f(x-2)\\
f(x-2) &= -f(x+4)\\
f(x) &= -f(x+6) = -(-f(x+12))\\
&= f(x+12).
\end{aligned}$$

Dakle f je periodička s periodom 12.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3552. *U ravnini je dano 25 točaka pri čemu između svake tri postoje dvije koje su na udaljenosti manjoj od 1. Dokaži da postoji krug radijusa 1 koji sadrži barem 13 danih točaka.*

Rješenje. Prvi slučaj. Ako ne postoje dvije točke čija je međusobna udaljenost veća ili jednaka 1, tada možemo fiksirati jednu točku, pa budući da znamo da su sve druge točke od nje udaljene za manje od 1, sve se nalaze unutar kružnice radijusa 1 sa središtem u fiksiranoj točki.

Drugi slučaj. Ako postoje dvije točke čija je međusobna udaljenost veća ili jednaka 1. Fiksirajmo te dvije točke i promatrajmo kružnice radijusa 1 kojima su te dvije točke središta. Sada se zbog uvjeta zadatka svaka od preostale 23 točke nalazi unutar jedne ili druge kružnice. Zato se u jednoj od kružnica nalazi barem 12 točaka pa je to sa središtem ukupno 13 točaka.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 410. *U odrasloj životnoj dobi udio vode u ljudskom tijelu iznosi oko 60 posto. Koliko je kilograma vodika u vodi sadržanoj u čovjeku mase 70 kilograma? Masa jedne molekule vode je* $2.99\cdot10^{-26}$ *kg, a masa jednog atoma kisika* $2.657\cdot10^{-26}$ *kg. Molekula vode ima jedan atom kisika i dva atoma vodika.*

Rješenje.

Udio vode u čovjeku $= 60\% = 0.6$

$m_{\text{čovjek}} = 70$ kg

$m_{\text{molekula voda}} = 2.99\cdot10^{-26}$ kg

$\underline{m_{\text{atom kisik}} = 2.657\cdot10^{-26}\ \text{kg}}$

$m_{\text{vodik}} = ?$

$m_{\text{voda}} = m_{\text{čovjek}}\cdot 0.6 = 70\ \text{kg}\cdot 0.6 = 42$ kg

$$\begin{aligned}
2m_{\text{atom vodika}} &= m_{\text{molekula vode}} - m_{\text{atom kisika}}\\
&= 2.99\cdot10^{-26}\ \text{kg} - 2.657\cdot10^{-26}\ \text{kg}\\
&= 0.333\cdot10^{-26}\ \text{kg}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{\text{vodik}} &= \frac{m_{\text{voda}}}{m_{\text{molekula vode}}}\cdot 2m_{\text{atom vodika}}\\
&= \frac{42\ \text{kg}}{2.99\cdot10^{-26}\ \text{kg}}\cdot 0.333\cdot10^{-26}\ \text{kg}\\
&= 14\cdot 0.333\ \text{kg} = 4.678\ \text{kg}.
\end{aligned}$$

Irena Antol (8), OŠ "Ljudevit Gaj", Krapina, PŠ Donja Šemnica

OŠ – 411. *Učenici žele napraviti paralelan spoj tri otpornika u kojem će ukupan otpor biti 5 oma. Imaju otpornike od* 10 Ω *i* 15 Ω. *Koliki mora biti otpor trećeg otpornika? Ako s tom paralelom učenici serijski spoje žarulju snage 5 vata za koju je maksimalna struja 0.5 ampera, koliki smije biti najveći napon izvora?*

Rješenje.

$R = 5\ \Omega$

$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 15\ \Omega$

$P = 5$ W

$\underline{I = 0.5\ \text{A}}$

$U = ?$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{5\ \Omega} = \frac{1}{10\ \Omega}+\frac{1}{15\ \Omega}+\frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{5\ \Omega} = \frac{3}{30\ \Omega}+\frac{2}{30\ \Omega}+\frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{5\ \Omega} = \frac{5}{30\ \Omega}+\frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_3}=\frac{1}{5\ \Omega}-\frac{5}{30\ \Omega}$$
$$\frac{1}{R_3}=\frac{6-5}{30\ \Omega}=\frac{1}{30\ \Omega}$$
$$R_3=30\ \Omega$$
$$P=U\cdot I$$
$$U_{\check{z}}=\frac{P}{I}=\frac{5\ \mathrm{W}}{0.5\ \mathrm{A}}=10\ \mathrm{V}$$
$$U_{\mathrm{p}}=I\cdot R=0.5\ \mathrm{A}\cdot 5\ \Omega=2.5\ \mathrm{V}$$
$$U=U_{\mathrm{p}}+U_{\check{z}}$$
$$U=2.5\ \mathrm{V}+10\ \mathrm{V}=12.5\ \mathrm{V}.$$

Borna Cesarec (7),
OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 412. *Koliko kockica leda brida 2 centimetra treba uzeti da se dobije 200 cm^3 vode? Gustoća leda je 900 kg/m^3, a gustoća vode 1000 kg/m^3.*

Rješenje.

$$a=2\ \mathrm{cm}$$
$$V_{\mathrm{vode}}=200\ \mathrm{cm}^3$$
$$\rho_{\mathrm{led}}=900\ \mathrm{kg/m^3}=0.9\ \mathrm{g/cm^3}$$
$$\underline{\rho_{\mathrm{voda}}=1000\ \mathrm{kg/m^3}=1\ \mathrm{g/cm^3}}$$
$$n=?$$

Obujam jedne kockice leda jednak je

$$V_1=a\cdot a\cdot a$$
$$=2\ \mathrm{cm}\cdot 2\ \mathrm{cm}\cdot 2\ \mathrm{m}=8\ \mathrm{cm}^3.$$

Masa n kockica leda jednaka je masi vode. Kako je masa vode

$$m=\rho_{\mathrm{voda}}\cdot V_{\mathrm{voda}}$$
$$=1\ \mathrm{g/cm^3}\cdot 200\ \mathrm{cm^3}=200\ \mathrm{g},$$

masa leda je 200 g.

$$V_{\mathrm{led}}=\frac{m}{\rho_{\mathrm{led}}}$$
$$=\frac{200\ \mathrm{g}}{0.9\ \mathrm{g/cm^3}}=222.2\ \mathrm{cm}^3$$
$$n=\frac{V_{\mathrm{led}}}{V_1}=\frac{222.2\ \mathrm{cm}}{8\ \mathrm{cm}^3}=27.77.$$

Treba uzeti približno 28 kockica leda.

Borna Cesarec (7), Krapina

OŠ – 413. *Saturnov je polumjer oko 8.55 puta veći od Zemljinog, a njegova je masa 95.15 puta veća od Zemljine. Prosječna gustoća Zemlje je 5515 kg/m^3. Kolika je prosječna gustoća Saturna? Pretpostavite da su ova tijela u obliku kugle.*

Rješenje.

$$R_{\mathrm{S}}=8.55R_{\mathrm{Z}}$$
$$m_{\mathrm{S}}=95.15m_{\mathrm{Z}}$$
$$\underline{\rho_{\mathrm{Z}}=5515\ \mathrm{kg/m^3}}$$
$$\rho_{\mathrm{S}}=?$$
$$\rho_{\mathrm{S}}=\frac{m_{\mathrm{S}}}{V_S}$$
$$V_{\mathrm{K}}=\frac{4}{3}R^3\pi$$
$$\rho_{\mathrm{S}}=\frac{95.15m_{\mathrm{Z}}}{\frac{4}{3}\cdot 8.55^3\cdot R_{\mathrm{Z}}^3}$$
$$\rho_{\mathrm{S}}=95.15\cdot\frac{\rho_{\mathrm{Z}}}{8.55^3}=0.152\cdot\rho_{\mathrm{Z}}$$
$$\rho_{\mathrm{S}}=0.152\cdot 5515\ \mathrm{kg/m^3}=838.28\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Napomena uredništva. Dani omjer polumjera se odnosi na polarne polumjere, omjer ekvatorijalnih polumjera je veći jer je Saturn spljošteniji od Zemlje. Zbog toga je stvarna gustoća Saturna oko dvadeset posto manja od dobivenog rezultata i iznosi oko 687 $\mathrm{kg/m^3}$.

Josip Matanić (8),
OŠ Horvati, Zagreb

1623. *Pri kosom hicu tijelo padne na tlo brzinom 21% većom od brzine izbačaja, te 12 metara niže od visine izbačaja. Ako je vrijeme leta 3.2 sekunde, odredi brzinu i kut izbačaja, te domet.*

Rješenje. Ako brzinu izbačaja označimo s v_0, a brzinu pada na tlo s v, iz zakona očuvanja energije imamo

$$v^2=v_0^2+2g\Delta h,$$

što uz $v=1.21v_0$ i $\Delta h=12$ m i $g=10\ \mathrm{m/s^2}$ daje

$$1.21^2v_0^2=v_0^2+2\cdot 10\cdot 12,$$

odakle je $v_0=22.74$ m/s. Za vertikalnu komponentu gibanja vrijedi

$$y(t)=v_0\sin(\alpha)t-\frac{g}{2}t^2,$$

ako uvrstimo $y = -12$ m i $t = 3.2$ s, dobivamo

$$-12 = 22.74\sin(\alpha)\cdot 3.2 - 5\cdot 3.2^2,$$

$$\sin(\alpha) = 0.5387, \qquad \alpha = 32^\circ 36'.$$

Konačno, uvrštavanjem v_0, α i t u jednadžbu horizontalne komponente gibanja dobivamo domet D:

$$D = v_0\cos(\alpha)\cdot t = 22.74\cdot 0.8425\cdot 3.2$$

što iznosi $D = 61.31$ m.

Ur.

1624. *Matematičkom njihalu mase 0.4 kg energija njihanja iznosi 0.08 J. Ako je period njihanja 1.2 sekunde, odredi kut maksimalnog otklona i akceleraciju njihala pri tom kutu.*

Rješenje. Pri maksimalnom otklonu njihala, energija njihanja jednaka je potencijalnoj energiji, $E = mgh_m$, pa maksimalna visina njihala iznosi

$$h_m = \frac{E}{mg} = \frac{0.08}{0.4\cdot 9.81} = 0.020387 \text{ m}.$$

Pripadni kut otklona odredimo iz izraza

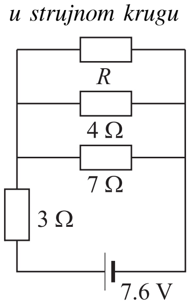
$$h_m = l(1-\cos(\alpha_m)),$$

gdje je $l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = 0.35783$ m duljina njihala, izračunata iz perioda malih oscilacija. Uvrštavanjem dobijemo za kut maksimalnog otklona $\alpha_m = 19^\circ 26' 2''$. Akceleracija tada iznosi

$$a_m = g\sin(\alpha_m) = 3.264 \text{ m/s}^2.$$

Ur.

1625. *Odredi otpor R na shemi ako je ukupna struja u strujnom krugu 1.6 A.*



Rješenje. Kako je napon izvora 7.6 V, a ukupna struja 1.6 A, iz Ohmovog zakona je ukupan otpor

$$R_{uk} = \frac{U}{I} = \frac{7.6}{1.6} = 4.75\ \Omega.$$

Iz sheme vidimo da je otpornik 3 Ω spojen serijski s paralelnim sklopom triju otpornika, pa zaključujemo da je otpor paralelnog sklopa $(4.75-3)\ \Omega = 1.75\ \Omega$. Iz izraza za paralelan spoj dobivamo

$$\frac{1}{1.75} = \frac{1}{R} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}.$$

Rješavanjem po R dobijemo $R = 5.6\ \Omega$.

Ur.

1626. *Bakar ima dva stabilna izotopa, ^{63}Cu i ^{65}Cu, s masama i učestalostima zadanim tablicom. Ako je gustoća prirodnog bakra 8.96 g/cm^3, kolika je gustoća izotopski čistog ^{65}Cu?*

I	*M*	*P*
^{63}Cu	62.929601	69.17%
^{65}Cu	64.927794	30.83%

Rješenje. Iz zadanih podataka slijedi da je prosječna atomska masa prirodnog bakra jednaka

$$M = 0.6917\cdot 62.929601 + 0.3083\cdot 64.927794$$
$$= 63.545644 \text{ g/mol}.$$

Kako izotopski sastav ne utječe na kemijske veze, pa ni na raspored atoma u uzorku, omjer masa prirodnog i izotopski čistog bakra jednak je omjeru gustoća:

$$\frac{63.545644}{64.927794} = \frac{8.96}{\rho_{65}}.$$

Odatle je gustoća izotopski čistog bakra 65 $\rho_{65} = 9.155$ g/cm^3.

Ur.

1627. *Zbog otpora atmosfere međunarodna svemirska postaja (ISS) u niskoj orbiti oko Zemlje u 15 dana izgubi prosječno 1 kilometar visine. Uzmimo da je početna orbita kružna, radijusa 6774 km, te da je masa postaje 450 tona. Odredi snagu kojom atmosfera djeluje na postaju. Objasni zašto otpor povećava brzinu satelita.*

Rješenje. Izračunajmo promjenu energije između kružnih orbita radijusa 6774 km i 6773 km. Energija kruženja za radijus r je

$$E(r) = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r},$$

uz $GM = 4 \cdot 10^{14}$ kgm^3/s^2, umnožak gravitacijske konstante i mase Zemlje, uz uvjet kruženja

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}.$$

Uvrštavanjem mv^2 slijedi da je energija kruženja $E(r)$ jednaka

$$E(r) = \frac{-GMm}{2r},$$

pa imamo

$$\begin{aligned} &E(6774 \text{ km}) - E(6773 \text{ km}) \\ &= -\frac{1.8 \cdot 10^{20}}{2 \cdot 6\,774\,000} + \frac{1.8 \cdot 10^{20}}{2 \cdot 6\,773\,000} \\ &= 1.962 \cdot 10^9 \text{ J}. \end{aligned}$$

Prosječna snaga kojom atmosfera djeluje na postaju je omjer izračunate energije i vremena (15 dana). Dakle

$$P = \frac{E}{t} = \frac{1.962 \cdot 10^9 \text{ J}}{1\,296\,000 \text{ s}} = 1514 \text{ W}.$$

S obzirom da otpor zraka smanjuje ukupnu energiju postaje, a uvjet kruženja za manju (više negativnu) ukupnu energiju daje veću brzinu, otpor snižava visinu postaje istovremeno povećavajući njenu brzinu.

Ur.

1628. *Pripremljeni radioaktivni uzorak sadrži samo izotop silicij 32 (^{32}Si). Taj se silicij beta raspadom raspada u fosfor 32 (^{32}P), a on ponovo beta raspadom u sumpor 32 (^{32}S). Godinu dana nakon izrade uzorka, omjer izotopa je sljedeći:*

^{32}Si	99.539%
^{32}P	0.026%
^{32}S	0.435%

Odredi vrijeme poluživota ^{32}Si i ^{32}P. Sumpor 32 (^{32}S) je stabilan.

Rješenje. Iz preostalog udjela silicija lako odredimo njegovo vrijeme poluraspada direktno iz zakona radioaktivnog raspada:

$$0.99539 = 2^{-t/T(\text{Si})}.$$

Uvrstimo $t = 1$ godinu i riješimo po $T(\text{Si})$:

$$T(\text{Si}) = -1 \text{ god} \cdot \frac{\log 2}{\log 0.99539} = 150.01 \text{ god}.$$

S obzirom da se fosfor brže raspada (što vidimo iz omjera fosfora i sumpora), možemo pretpostaviti da se jednaka količina fosfora stvara (raspadom silicija) i raspada (u stabilan sumpor). Ta nam jednakost (zove se sekularna ravnoteža) daje:

$$\frac{N(\text{Si})}{T(\text{Si})} = \frac{N(\text{P})}{T(\text{P})},$$

dakle

$$\begin{aligned} T(\text{P}) &= 150 \text{ god} \cdot \frac{0.00026}{0.99539} \\ &= 0.03918 \text{ god} = 14.3 \text{ dana}. \end{aligned}$$

Ur.

1629. *Izotropni izvor svjetlosti snage 60 W nalazi se 60 cm iznad ravnog stola. Točno ispod izvora na stolu osvijetljenost vidljivom svjetlosti iznosi 4.5 W/m^2. Odredi efikasnost izvora, tj. postotak snage koji otpada na vidljivu svjetlost.*

Rješenje. Zamislimo sferu sa središtem u izvoru svjetlosti koja dira stol (radijus je dakle 60 cm). Sve točke te sfere jednako su osvijetljene (izvor je izotropan) vidljivim svjetlom 4.5 W/m^2. Površina sfere je

$$S = 4\pi r^2 = 1.44\pi = 4.524 \text{ m}^2.$$

Ukupan tok vidljive svjetlosti kroz sferu je

$$P' = S \cdot E = 4.524 \cdot 4.5 = 20.357 \text{ W}.$$

Efikasnost izvora je tada

$$\eta = \frac{P'}{P} = \frac{20.357}{60} = 33.93\%.$$

Ur.