



Originalni učenici u XV. gimnaziji u Zagrebu

U trećem razredu srednje škole se proučavaju trigonometrijske formule pretvorbe. Profesorica matematike, Nevenka Antončić u XV. gimnaziji u Zagrebu zadala je učenicima jedan poznati zadatak: dokazati trigonometrijsku jednakost

$$\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

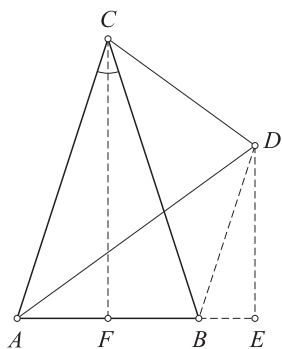
Obično je predviđeno je da se dokazuje na klasičan način i tu ima dosta posla. U [1] na str. 206 dokazano je

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Međutim, dvoje njezinih učenika je zadatak riješilo originalno, geometrijski pomoću trokuta. To joj se osobito svidalo, i napisali su priloženi prilog za MFL.

Uz dva rješenja ovog zadatka imamo i rješenje još jednog.

Prvo rješenje prvog zadatka.



Trokut ABC je jednakokračan s kutovima α , 2α , 2α . Očito je $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

Neka je $|AC| = |BC| = 1$, a točka D na simetrali kuta CAB tako da je $|AD| = 1$. Iz trokuta ABC je $|AB| = 2 \cos 2\alpha$, a iz trokuta AED , $|AE| = \cos \alpha$, pa je

$$|BE| = \cos \alpha - 2 \cos 2\alpha. \quad (1)$$

Jer je $\triangle DCA \cong \triangle ABC$ imamo $|CD| = 2 \cos 2\alpha$ i $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CBD = \alpha$. Sada je

$$\sphericalangle DBE = \pi - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBD = \pi - 2\alpha - \alpha = 2\alpha.$$

Zato je $|BD| = |CD| = 2 \cos 2\alpha$, a iz $\triangle BED$ je $|BE| = |BD| \cos 2\alpha$, tj.

$$|BE| = 2 \cos^2 2\alpha. \quad (2)$$

Iz kosinusovog poučka je:

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |BC|^2 + |CA|^2 - 2|BC| \cdot |CA| \cos \alpha \\ 2 \cos^2 2\alpha &= 1 - \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Usporedimo li izraze (1) i (2) dobivamo $\cos \alpha - 2 \cos 2\alpha = 2 \cos^2 2\alpha$. Uvrstimo li (3) imamo $\cos \alpha - 2 \cos 2\alpha = 1 - \cos \alpha$, tj. $\cos \alpha - \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$.

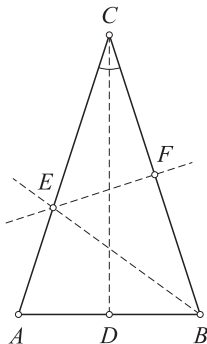
Tadej Petar Tukara, 3.E

Drugo rješenje prvog zadatka.

Trokut ABC je jednakokračan s kutovima α , 2α , 2α i $\alpha = \frac{\pi}{5}$. Neka je

$$|AB| = 1, \quad |AC| = |BC| = x. \quad (1)$$

Neka je D točka u kojoj simetrala kuta BCA siječe stranicu \overline{AB} , E presjek simetrale kuta ABC i stranice \overline{AC} , i F presjek simetrale kuta CEB i stranice \overline{BC} .



Kako je ABC jednakokračan trokut, $|AC| = |BC|$, i simetrala CD kuta BCA raspolavlja stranicu \overline{AB} , tj.

$$2|AD| = |AB|. \quad (2)$$

Kako je $\sphericalangle EBC = \sphericalangle BCE = \alpha$, trokut BCE je jednakokračan i

$$|CE| = |BE| \quad (3)$$

pa simetrala EF kuta CEB raspolavlja stranicu \overline{BC} . Zato je

$$2|BF| = |BC|. \quad (4)$$

Nadalje, $\sphericalangle BEA = \pi - \sphericalangle EAB - \sphericalangle ABE = \pi - 2\alpha - \alpha = 2\alpha$ pa je trokut EAB jednakokračan,

$$|AB| = |BE| = 1. \quad (5)$$

Iz (1), (3) i (5) je

$$|EA| = x - 1. \quad (6)$$

Iz $\sphericalangle BEA = \sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ABC$ slijedi

$$\triangle ABC \sim \triangle EAB. \quad (7)$$

Oдавде je $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|EA|}$ tj. $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$. Iz kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$ je

$$x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad \text{jer je } x > 0. \quad (8)$$

Sada je

$$\cos 2\alpha = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad \cos \alpha = \frac{|BF|}{|BE|} = \frac{|BC|}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

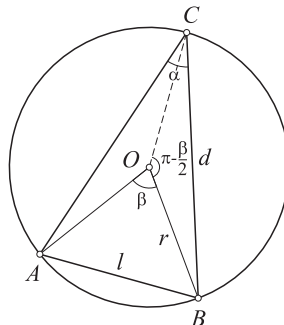
i konačno

$$\cos \alpha - \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} - \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Petar Nizić-Nikolac, 3.E

Također ima nekoliko učenika koji vole dokazivati poznate tvrdnje i na druge načine. Inače, često dobivamo njihove ideje za neki matematički problem, i to na posve originalni način. Ovdje je jedan dokaz poznate tvrdnje na malo drugačiji način. Učenik *Tomislav Miškić, 4.B razred*, dokazao je da je obodni kut dvostuko manji od pripadnog središnjeg kuta (ako su s iste strane zajedničke tetive, a vrijedi i u općem slučaju).

Neka je jednakokračan trokut ABC , $|AC| = |BC|$, upisan u kružnicu i označimo kutove $\alpha = \sphericalangle BCA$, $\beta = \sphericalangle BOA$. Dokažimo da je $\beta = 2\alpha$.



Iz kosinusovog poučka, prema oznakama na slici, za trokute ABO , ABC , BCO , imamo:

$$l^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \beta \quad (1)$$

$$l^2 = 2d^2 - 2d^2 \cos \alpha \quad (2)$$

$$d^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \left(\pi - \frac{\beta}{2} \right). \quad (3)$$

Sada redom dobivamo:

$$2r^2(1 - \cos \beta) = 2r^2 \left(2 + 2 \cos \frac{\beta}{2} \right) - 2r^2 \left(2 \cos \alpha + 2 \cos \frac{\beta}{2} \cos \alpha \right)$$

$$1 - \cos \beta = 2 + 2 \cos \frac{\beta}{2} - 2 \cos \alpha - 2 \cos \alpha \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 + \cos \beta + 2 \cos \frac{\beta}{2}}{2 + 2 \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{2 \cos \frac{\beta}{2} \left(\cos \frac{\beta}{2} + 1 \right)}{2 \left(1 + \cos \frac{\beta}{2} \right)} = \cos \frac{\beta}{2},$$

a kako su α i β kutovi trokuta, $\beta = 2\alpha$.

Literatura

- [1] STJEPAN MINTAKOVIĆ, MIRKO FRANIĆ, *Trigonometrija, vježbenica za srednje škole*, Element, Zagreb, 1999.

5. Znanstveni piknik

Pod sloganom “Znanost je zabavna!” od 23. – 25. rujna 2016. godine održan je peti po redu Znanstveni piknik u organizaciji Udruge profesor Baltazar i partnera Hrvatske akademske i istraživačke mreže – CARNet, Instituta Ruđera Boškovića, Mreže popularizatora znanosti, Instituta za fiziku i Hrvatske zajednice tehničke kulture. Od petka do nedjelje u prostorima Jadran filma u zagrebačkoj Dubravi više od 30 000 posjetitelja mogli su uživati u sadržajima iz brojnih područja – od prirodnih znanosti, medicine, preko robotike i 3D printa, do živih slika kostima i automobila iz hrvatskih filmova. Posebna atrakcija za djecu bio je hodajući dinosaur T-Rex u prirodnoj veličini, a za tinejdžere električni automobil Tesla i simulator leta u MIG-u u organizaciji Ministarstva obrane.

Tema ovogodišnjeg Znanstvenog piknika, na kojemu je sudjelovalo preko 150 izlagača edukatora iz Hrvatske i inozemstva, bila je spoj znanosti i umjetnosti. Zemlja partner bila je Slovenija, a pikniku su se priključili gosti iz još sedam zemalja Europe. Koliko je djece i mladih zainteresirano za znanost govori i činjenica kako je zabilježen rekordan broj organiziranih posjeta osnovnih i srednjih škola iz Hrvatske i Slovenije.

Ovogodišnji piknik održan je pod visokim pokroviteljstvom predsjednice Republike Hrvatske gospođe Kolinde Grabar-Kitarović, Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta i Grada Zagreba, uz podršku brojnih društveno odgovornih tvrtki i pojedinaca iz poslovnog sektora.

Berti Erjavec