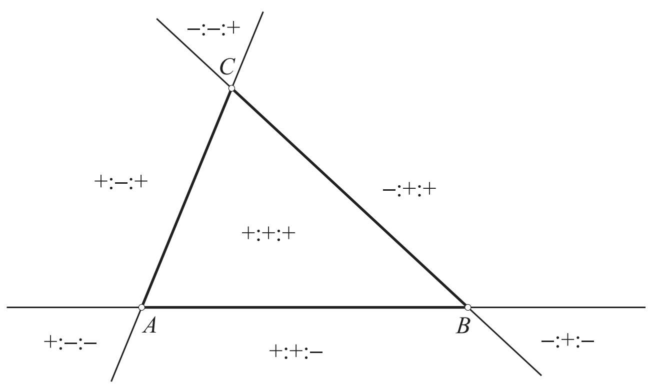
Trilinearne koordinate točaka u ravnini

Maja Starčević[1]

U radu ćemo se upoznati s trilinearnim koordinatama, nešto manje standardnim zapisom koordinata točaka u ravnini. Za razliku od zapisa točke u klasičnim pravokutnim koordinatama, za ovakav zapis su nam potrebne tri koordinate i prikaz uz to nije jedinstven. Zapis točaka u trilinearnim koordinatama koristan je npr. kod dokaza konkurentnosti pravaca (za pravce kažemo da su konkurentni ako prolaze kroz istu točku).

Neka su zadane tri nekolinearne točke A, B i C te neka je T točka u ravnini trokuta ABC. Trilinearne koordinate točke T u odnosu na pravce BC, CA, AB uređena su trojka realnih brojeva koja pokazuje omjere udaljenosti točke T do spomenutih pravaca. Preciznije, ako su trilinearne koordinate točke T jednake $x : y : z$, onda je omjer udaljenosti točke T redom do pravaca BC, CA i AB jednak $|x| : |y| : |z|$. Ako je neka od koordinata jednaka nula točka se nalazi na pripadnom pravcu. Pri određivanju koordinata bitno je postaviti i predznak svake koordinate. Konkretno, sve koordinate točke T su pozitivne ako je točka unutar trokuta ABC. Ako točka prijeđe na drugu stranu nekog od zadanih pravaca, onda joj pripadna koordinata promijeni predznak. Dakle, koordinate su orijentirane u odnosu na pravce. Pregled predznaka koordinata može se vidjeti na slici 1. Primijetimo, $|x|$, $|y|$ i $|z|$ mogu, ali i ne moraju biti točne udaljenosti do zadanih pravaca. Kako je kod trilinearnih koordinata bitan samo međusobni omjer koordinata, i koordinate oblika $kx : ky : kz$, gdje je $k > 0$, također su trilinearne koordinate zadane točke T. Ponekad je korisnije zapisati omjere u obliku koji ne odgovara točnim udaljenostima.



Slika 1.

Opišimo sad postupak određivanja položaja točke na temelju zadanih trilinearnih koordinata. Pritom ćemo odrediti koje su od trojki koordinata uopće moguće s obzirom na prethodnu definiciju. Npr. očito je sa slike 1 da ne postoji točka kojoj su sve koordinate negativne. Također, očito je da su vrhovi trokuta ABC jedine točke kojima su dvije koordinate jednake nula, s tim da im preostala koordinata može biti proizvoljan

[1] Autorica je docentica na Zavodu za primijenjenu matematiku Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `mstarcev@math.hr`

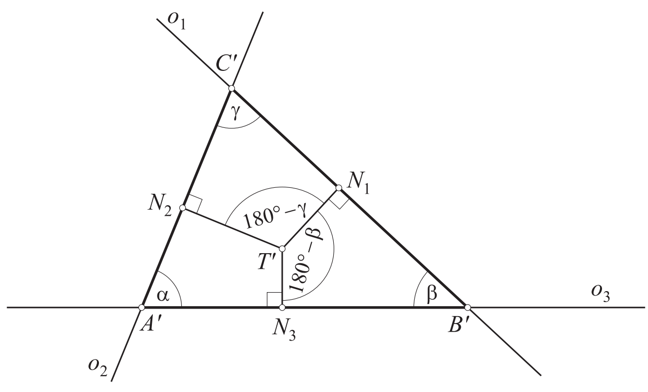
pozitivan broj. Lako je i uočiti da ne postoji točka kojoj su sve koordinate jednake nula. Nadalje, točke na pravcima BC, CA i AB, koje nisu jednake vrhovima trokuta ABC, imaju jednu koordinatu jednaku nuli, dok su ostale istog predznaka (pozitivne) samo za točke koje se nalaze na stranicama trokuta ABC. Dobiveni rezultati kod konstrukcija točke sa zadanim trilinearnim koordinatama omogućit će nam da definiciju trilinearnih koordinata ipak proširimo i na neke naizgled nemoguće slučajeve. Pri konstrukciji točke sa zadanim koordinatama razlikovat ćemo nekoliko slučajeva:

1. Sve koordinate su pozitivne;
2. Sve koordinate su različite od nule, a točno dvije od njih su istog predznaka;
3. Jedna koordinata je jednaka nuli, a ostale su pozitivnog predznaka;
4. Jedna koordinata je nula, a ostale su suprotnog predznaka.

Ako je zadana točka T s koordinatama $x:y:z$ u odnosu na trokut ABC, konstrukciju točke T u svim slučajevima ćemo provesti tako da konstruiramo trokut $A'B'C'$ i točku T' tako da je trokut $A'B'C'$ sličan trokutu ABC te da su trilinearne koordinate točke T' u odnosu na trokut $A'B'C'$ također $x:y:z$, s tim da su $|x|$, $|y|$ i $|z|$ prave udaljenosti točke T' do pravaca $B'C'$, $C'A'$ i $A'B'$ redom. Točka T tada ima analogan položaj u odnosu na trokut ABC kao i točka T' u odnosu na trokut $A'B'C'$ te ju je stoga sasvim jednostavno konstruirati. U nastavku ćemo označavati kutove trokuta ABC s $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle CBA=\beta$ i $\sphericalangle ACB=\gamma$.

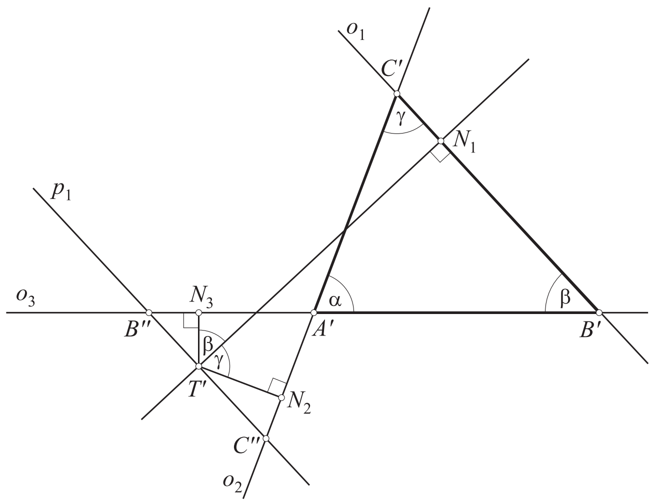
Konstrukciju točke u navedenim slučajevima provodimo na sljedeći način:

1. Neka je zadana točka T s koordinatama $x:y:z$, pri čemu je $x,\ y,\ z>0$. Uzmimo za početak bilo koju točku T'. Konstruiramo bilo koju dužinu $\overline{T'N_1}$ za koju je $|T'N_1|=x$. Zatim konstruiramo točke N_2 i N_3 tako da je $|T'N_2|=y$ i $|T'N_3|=z$ te je $\sphericalangle N_1T'N_2=180^\circ-\gamma$ i $\sphericalangle N_3T'N_1=180^\circ-\beta$ (slika 2). U točkama N_i, $i=1,2,3$ povučemo okomice o_i redom na dužine $\overline{T'N_i}$. U presjeku okomica dobivamo točke koje tvore trokut $A'B'C'$ koji je sličan trokutu ABC. Preciznije, imamo $A'=o_2\cap o_3$, $B'=o_1\cap o_3$, $C'=o_1\cap o_2$. Primjećujemo da je konstrukcija trokuta $A'B'C'$ uvijek moguća, za sve $x,\ y,\ z>0$.



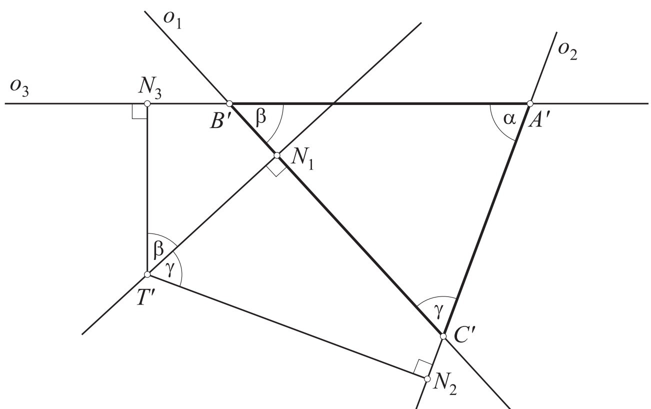
Slika 2.

2. U ovom slučaju su dvije koordinate točke T istog, a preostala suprotnog predznaka. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x>0$, dok su $y,\ z<0$. Sad opet krećemo od bilo koje točke T' i konstruiramo bilo koju dužinu $\overline{T'N_1}$ takvu da je $|T'N_1|=x$. Zatim konstruiramo točke N_2 i N_3 takve da je $\sphericalangle N_2T'N_1=\gamma$ i $\sphericalangle N_1T'N_3=\beta$ te je $|T'N_2|=|y|$ i $|T'N_3|=|z|$ (slika 3).



Slika 3.

Povučemo okomice na dužine $\overline{T'N_i}$, u točkama N_i, $i = 1, 2, 3$ te ih označimo s o_i. Kao i u prvom slučaju konstruiramo točke A', B', C'. Međutim, tada primjećujemo da ovisno o zadanim veličinama koordinata ta konstrukcija ponekad i nije moguća. Moguće je naime dobiti situaciju u kojoj se okomice o_i, $i = 1, 2, 3$ sijeku u istoj točki, odnosno ne tvore trokut $A'B'C'$. S druge strane, moguće je dobiti trokut $A'B'C'$ za koji točka T' zapravo ima koordinate $-x : -y : -z$ (slika 4). Drugim riječima, dobivamo točku sa zadanim omjerima udaljenosti, ali s orijentacijama koje su suprotne zadanima. Time dolazimo do zaključka da ako postoji točka sa zadanim koordinatama $x : y : z$, onda ne postoji točka s koordinatama $-x : -y : -z$ i obratno.



Slika 4.

Pogledajmo još kad je moguće izvesti konstrukciju točke s koordinatama $x : y : z$ takvima da je $x > 0$, $y, z < 0$, odnosno izračunajmo pripadni uvjet na duljine koordinata. Kroz T' povucimo pravac p_1 paralelan o_1 (slika 3). Neka je $p_1 \cap o_3 = B''$ i $p_1 \cap o_2 = C''$. Kutovi u trokutu $A'B''C''$ uz vrhove A', B'' i C'' su redom jednaki

α, β i γ. Tada lako vidimo da je

$$|B''C''| = |B''T'| + |T'C''| = \frac{|T'N_3|}{\sin\beta} + \frac{|T'N_2|}{\sin\gamma} = \frac{|z|}{\sin\beta} + \frac{|y|}{\sin\gamma} .$$

Iz poučka o sinusima dobivamo $|A'C''| = |B''C''|\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ i $|A'B''| = |B''C''|\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Površina trokuta $A'B''C''$ je jednaka $P(A'B''C'') = \dfrac{1}{2}|A'B''||A'C''|\sin\alpha$. Visina u tom trokutu iz vrha A' je duljine

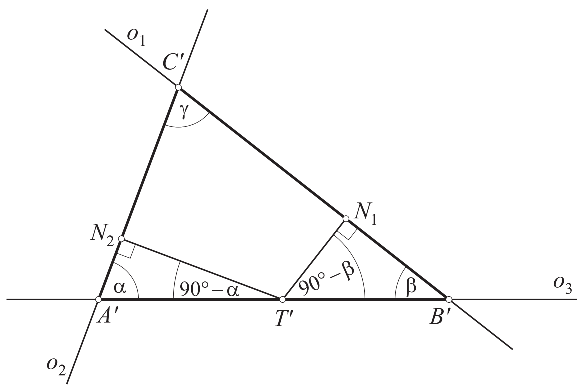
$$v = \frac{2P(A'B''C'')}{|B''C''|} = \frac{|A'B''||A'C''|\sin\alpha}{|B''C''|} = \frac{|y|\sin\beta + |z|\sin\gamma}{\sin\alpha} .$$

Da bismo dobili točku T' za koju je $x > 0$, y, $z < 0$, mora vrijediti $|x| > v$, odnosno

$$|x|\sin\alpha > |y|\sin\beta + |z|\sin\gamma .$$

Ako je $|x| < v$, onda istom konstrukcijom dobivamo točku s koordinatama $x : y : z$, gdje je $x < 0$, y, $z > 0$. U slučaju da je $|x| = v$, ne postoji točka T', niti takva da je $x > 0$, y, $z < 0$, niti takva da je $x < 0$, y, $z > 0$.

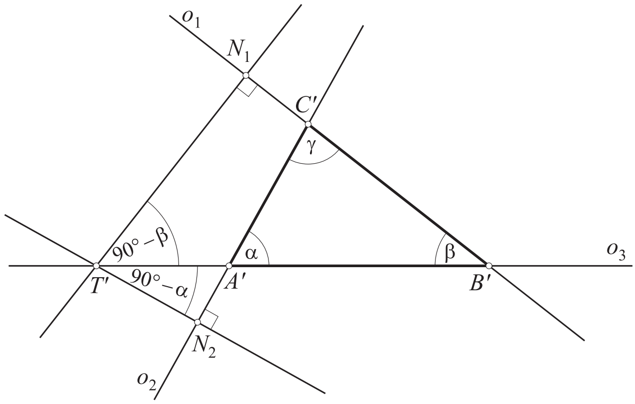
3. Pretpostavimo npr. da za koordinate vrijedi x, $y > 0$ i $z = 0$. Tada uzmimo bilo koju točku T' te konstruiramo proizvoljan pravac o_3 kroz tu točku (slika 5). Nadalje, konstruiramo točke N_1 i N_2 takve da je $|T'N_1| = x$ i $|T'N_2| = y$ te da pravci $T'N_1$ i $T'N_2$ s pravcem o_3 čine redom kutove $90^\circ - \beta$ i $90^\circ - \alpha$ (ako je npr. kut $\alpha > 90^\circ$, onda crtamo točku N_2 sa suprotne strane pravca o_3 tako da $T'N_2$ i o_3 čine kut $\alpha - 90^\circ$). Kroz N_1 i N_2 nacrtamo okomice o_1 i o_2 na dužine $\overline{T'N_1}$ i $\overline{T'N_2}$ redom. Kao i u prethodnim slučajevima pravci o_i, $i = 1, 2, 3$, formiraju trokut $A'B'C'$. Primijetimo da je ovu konstrukciju uvijek moguće izvesti.



Slika 5.

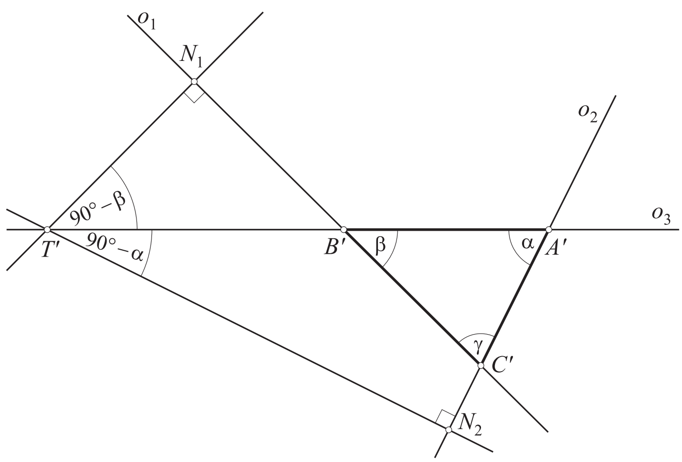
4. Krenimo npr. od pretpostavke da točka ima koordinate $x : y : 0$, gdje je $x > 0$ i $y < 0$. Tada uzmimo neku točku T' i kroz nju povucimo bilo koji pravac o_3 (slika 6). Konstruirajmo točke N_1 i N_2 takve da je $|T'N_1| = x$ i $|T'N_2| = |y|$ i da pravci $T'N_1$ i $T'N_2$ s pravcem o_3 čine kutove $90^\circ - \beta$ i $90^\circ - \alpha$ redom (ako je npr. kut $\alpha > 90^\circ$, onda opet crtamo točku N_2 sa suprotne strane pravca o_3 tako da $T'N_2$ i o_3 čine kut $\alpha - 90^\circ$). Kroz N_1 i N_2 povucimo okomice o_1 i o_2 na dužine $\overline{T'N_1}$ i $\overline{T'N_2}$. Ti pravci zajedno s pravcem o_3 u presjeku daju, kao i prije, točke A', B' i C'. Da bi konstrukcija imala rješenje, treba vrijediti $|T'A'| < |T'B'|$, odnosno $|x|\sin\alpha > |y|\sin\beta$.

Ako je $|x|\sin\alpha < |y|\sin\beta$, onda smo zapravo dobili točku koja odgovara slučaju kad je $x < 0$ i $y > 0$ (slika 7).



Slika 6.

Dakle, postojanje točke sa zadanim koordinatama $x : y : 0$ opet isključuje postojanje točke s koordinatama $-x : -y : 0$, i obratno. Također, ako je $|x|\sin\alpha = |y|\sin\beta$, ne možemo dobiti točku kojoj je treća koordinata jednaka nuli, a prve dvije su suprotnog predznaka.



Slika 7.

Iz prethodnih rasprava možemo zaključiti sljedeće. Ako su sve zadane koordinate točke strogo pozitivne, takva točka uvijek postoji, a ne postoji točka kojoj su sve koordinate negativne. Znamo i da ne postoji točka kojoj su sve koordinate jednake nula. Točke kojima su dvije koordinate jednake nula, a treća je pozitivna, vrhovi su zadanog trokuta. S druge strane, ne postoje točke kojima su dvije koordinate jednake nula, a treća koordinata je negativna. Ako su dvije koordinate strogo pozitivne, a treća jednaka nula takva točka postoji, ali ne postoji točka kojoj su dvije koordinate strogo negativne, dok je treća jednaka nula. Što se tiče preostalih slučajeva, ako je zadan omjer udaljenosti $|x| : |y| : |z|$ za koji vrijedi $|x|\sin\alpha \neq |y|\sin\beta + |z|\sin\gamma$, postoji ili točka s koordinatama $|x| : -|y| : -|z|$ ili točka s koordinatama $-|x| : |y| : |z|$. Analogan zaključak donosimo i u slučaju kad je $|y|\sin\beta \neq |x|\sin\alpha + |z|\sin\gamma$. Tada postoji ili točka s koordinatama $-|x| : |y| : -|z|$ ili točka s koordinatama $|x| : -|y| : |z|$. Konačno, ako je $|z|\sin\gamma \neq |x|\sin\alpha + |y|\sin\beta$, imamo ili točku s koordinatama $-|x| : -|y| : |z|$ ili točku s koordinatama $|x| : |y| : -|z|$. U ostalim slučajevima ne možemo pronaći odgovarajuću točku.

Ukratko možemo sažeti za sve slučajeve, ako postoji točka s koordinatama $x : y : z$, ne postoji točka s koordinatama $-x : -y : -z$. To zapravo znači da točku $x : y : z$ možemo poistovjetiti s bilo kojom trojkom koordinata $kx : ky : kz$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Drugim riječima, u skup trilinearnih koordinata možemo uvesti relaciju ekvivalencije pri čemu je $x_1 : y_1 : z_1 \sim x_2 : y_2 : z_2$ ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $x_2 = kx_1$, $y_2 = ky_1$, $z_2 = kz_1$.

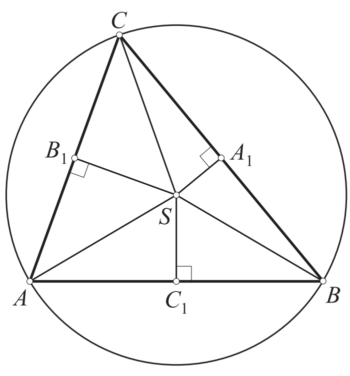
Primjer 1. *Odrediti trilinearne koordinate središta trokutu ABC upisane kružnice, u odnosu na pravce BC, CA i AB.*

Rješenje. Za ove koordinate bismo mogli reći da ih je najlakše odrediti. Naime, središte zadane kružnice se nalazi u sjecištu simetrala kutova trokuta ABC, odnosno na svakoj od simetrala kutova pa mu je udaljenost do svake stranice trokuta jednaka. Ta udaljenost je naravno radijus r upisane kružnice. Dakle, možemo zapisati trilinearne koordinate središta u obliku $r : r : r$. Međutim, kako možemo uzeti i skraćeni oblik omjera, trilinearne koordinate se mogu pisati i kao $1 : 1 : 1$.

Primijetimo još da se središte trokutu upisane kružnice uvijek nalazi unutar trokuta pa su mu sve trilinearne koordinate u odnosu na zadane pravce pozitivne (ili su sve negativne). To nije uvijek slučaj sa središtem trokutu opisane kružnice jer se ono nalazi unutar trokuta samo u slučaju kad je trokut šiljastokutan.

Primjer 2. *Odrediti trilinearne koordinate središta trokutu ABC opisane kružnice, u odnosu na pravce BC, CA i AB.*

Rješenje.

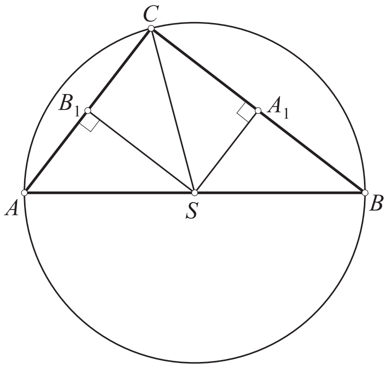


Slika 8.

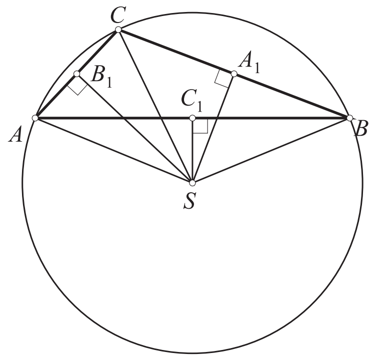
Neka je S središte trokutu ABC opisane kružnice, a R njezin radijus. Označimo s A_1, B_1, C_1 nožišta okomica iz S redom na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, odnosno polovišta odgovarajućih stranica.

Pretpostavimo za početak da je trokut ABC šiljastokutan (slika 8). Tada je točka S unutar trokuta pa su joj sve trilinearne koordinate istog predznaka. Imamo $\sphericalangle BSA_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle BSC = \sphericalangle BAC = \alpha$ pa je $|SA_1| = R\cos\alpha$. Analogno je i $|SB_1| = R\cos\beta$ i $|SC_1| = R\cos\gamma$. Prema tome, trilinearne koordinate točke S su $|SA_1| : |SB_1| : |SC_1| \sim \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.

Neka je sada trokut ABC pravokutan, s hipotenuzom $\overline{AB}$ (slika 9). Točka S se tada nalazi u središtu hipotenuze. Kako je $\sphericalangle BSA_1 = \alpha$ i $\sphericalangle B_1SA = \beta$, vrijedi $|SA_1| = R\cos\alpha$, $|SB_1| = R\cos\beta$ pa su trilinearne koordinate točke S jednake $\cos\alpha : \cos\beta : 0$. Analogno dobivamo koordinate $\cos\alpha : 0 : \cos\gamma$ i $0 : \cos\beta : \cos\gamma$ u slučajevima kad je pravi kut trokuta u vrhu B, odnosno u vrhu A.



Slika 9.



Slika 10.

Konačno, neka je trokut ABC tupokutan, s tupim kutom u vrhu C (slika 10). Tada je $\sphericalangle BSA_1 = \alpha$, $\sphericalangle B_1SA = \beta$, $\sphericalangle C_1SA = 180^\circ - \gamma$ pa imamo $|SA_1| = R\cos\alpha$, $|SB_1| = R\cos\beta$ i $|SC_1| = R\cos(180^\circ - \gamma) = -R\cos\gamma$. Kako se točka S nalazi sa suprotne strane pravca AB u odnosu na trokut ABC, a s iste strane pravaca BC i CA kao i trokut ABC, prve dvije trilinearne koordinate su jednakog, a treća suprotnog predznaka. Stoga su trilinearne koordinate točke S jednake $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$. Do istog rezultata dolazimo i ako je tupi kut u nekom od drugih vrhova trokuta.

Promatranjem svih rezultata, uočavamo da u svim slučajevima trilinearne koordinate točke S možemo pisati u obliku $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.

I kod određivanja trilinearnih koordinata ortocentra moramo promatrati više slučajeva.

Primjer 3. *Odrediti trilinearne koordinate ortocentra trokuta ABC, u odnosu na pravce BC, CA i AB.*

Rješenje. Neka je H ortocentar trokuta ABC i neka su A_2, B_2 i C_2 nožišta visina iz vrhova A, B i C redom. Ako je trokut ABC pravokutan, onda se ortocentar podudara s vrhom kod pravog kuta pa su mu trilinearne koordinate jednake $1 : 0 : 0$, $0 : 1 : 0$ ili $0 : 0 : 1$, ovisno o tome je li mu vrh kod pravoga kuta jednak A, B ili C.

Uzmimo šiljastokutan trokut (slika 11). Primijetimo da je $\sphericalangle A_2HC = \beta$ i $\sphericalangle CHB_2 = \alpha$. Tada je $|HA_2| = |HC|\cos\beta$ i $|HB_2| = |HC|\cos\alpha$ te imamo

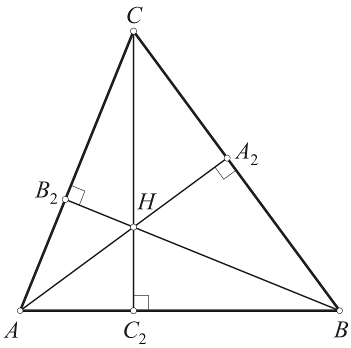
$$|HB_2| = |HA_2|\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\,. \tag{1}$$

Analogno dobivamo

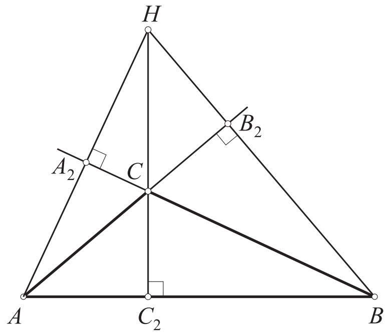
$$|HC_2| = |HA_2|\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,. \tag{2}$$

Sve trilinearne koordinate ortocentra su istog predznaka pa su zbog (1) i (2) stoga jednake

$$|HA_2| : |HB_2| : |HC_2| \sim 1 : \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} : \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \sim \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma}\,.$$



Slika 11.



Slika 12.

U nastavku tražimo trilinearne koordinate za tupokutan trokut ABC. Pretpostavimo da je tupi kut u vrhu C (slika 12). Imamo prvo $\sphericalangle CHB_2 = \alpha$ i $\sphericalangle A_2HC = \beta$. Iz trokuta HA_2C i B_2HC dobivamo

$$|HA_2| = |HC|\cos\beta\ , \qquad |HB_2| = |HC|\cos\alpha\ . \tag{3}$$

Prema tome

$$|HB_2| = |HA_2|\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\ . \tag{4}$$

Zatim iz trokuta CAC_2, A_2AC i HA_2C imamo redom

$$|CC_2| = |AC|\sin\alpha\ , \qquad |CA_2| = |AC|\cos(\alpha+\beta)\ , \qquad |CA_2| = |HA_2|\operatorname{tg}\beta$$

te iz tih jednakosti dobivamo

$$|CC_2| = \frac{\operatorname{tg}\beta\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}|HA_2|. \tag{5}$$

Iz (3) i (5) imamo

$$\begin{aligned} |HC_2| &= |HC| + |CC_2| = \frac{1}{\cos\beta}|HA_2| + \frac{\operatorname{tg}\beta\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}|HA_2| \\ &= \frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}|HA_2| = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}|HA_2|\ . \end{aligned} \tag{6}$$

Dakle, prema (4) i (6), uzimajući u obzir da su prve dvije koordinate ortocentra H istog, a treća suprotnog predznaka, dobivamo trilinearne koordinate ortocentra

$$|HA_2| : |HB_2| : -|HC_2| \sim 1 : \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} : \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \sim \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma}\ .$$

Konačno zaključujemo da se za sve vrste trokuta trilinearne koordinate ortocentra mogu zapisati u obliku

$$\cos\beta\cos\gamma : \cos\alpha\cos\gamma : \cos\alpha\cos\beta\ .$$