Pitagorine četvorke

Predrag Lončar[1]

Uvod

U ovom članku ćemo opisati kako naći rješenja x, y, z i t diofantske jednadžbe:

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2, \tag{1}$$

pri čemu su x, y, z i t prirodni (u širem smislu cijeli) brojevi. Ovaj problem potječe iz geometrije: naći kvadar kojemu su sve stranice, kao i prostorna dijagonala, prirodni brojevi. To je problem nalaženja Pitagorinih četvorki $(x, y, z; t)$ tako da vrijedi 1, ili problem *Pitagorinih kutija*.

Zadatak 1. *Provjerite ova tri jednostavna načina za dobivanje četvorki.*

a) Neka je N prirodni broj. Tada vrijedi identitet:

$$N^2 + (N+1)^2 + (N \cdot (N+1))^2 = (N \cdot (N+1) + 1)^2.$$

Npr. za $N = 2$ dobijemo četvorku $(2, 3, 6; 7)$.

b) Neka je Q proizvoljni parni broj. Neka je $\dfrac{Q^2}{2} = m \cdot n$. Stavimo li $x = m$, $y = Q = \sqrt{2mn}$, $z = n$ i $t = m + n$, tada je $(x, y, z; t)$ Pitagorina četvorka. Neka je $Q = 4$, i $\dfrac{Q^2}{2} = 8 = 1 \cdot 8$, dakle $m = 1$, $n = 8$. Dobili smo četvorku $(1, 4, 8; 9)$.

c) Umetnimo jednu Pitagorinu trojku u drugu Pitagorinu trojku. Tako je npr. $5^2 + 12^2 = 13^2$ i $3^2 + 4^2 = 5^2$, pa imamo $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$. Isto tako je $20^2 + 21^2 = 29^2$ i $12^2 + 16^2 = 20^2$, pa odatle $12^2 + 16^2 + 21^2 = 29^2$.

Ni na jedan od tri načina opisanih u zadatku (1) ne možemo dobiti četvorku $(4, 4, 7; 9)$.

Racionalne točke na jediničnoj sferi

Uzmimo da su u jednadžbi (1) x, y, z i t cijeli brojevi. Zapišimo problem (1) ovako:

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2 + \left(\frac{z}{t}\right)^2 = 1.$$

Vidimo da trojka pozitivnih racionalnih brojeva $X = \left|\dfrac{x}{t}\right|$, $Y = \left|\dfrac{y}{t}\right|$ i $Z = \left|\dfrac{z}{t}\right|$ leži na jediničnoj sferi. Nađimo parametrizaciju od X, Y i Z. Uočimo da je točka $(0, 0, -1)$ na jediničnoj sferi, pa povucimo tom točkom bilo koji pravac s racionalnim koeficijentima smjera. To je pravac:

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{n} = \frac{Z+1}{m}, \tag{2}$$

gdje su p, m, n relativno prosti prirodni brojevi, koji nisu svi 0. Uzmimo $m \neq 0$ i potražimo drugu točku u kojoj taj pravac siječe jediničnu sferu. Trebamo riješiti

[1] Autor je viši predavač na Geotehničkom fakultetu u Varaždinu; e-pošta: `ploncar@gfv.hr`

kvadratnu jednadžbu:

$$\frac{p^2}{m^2}(Z+1)^2+\frac{n^2}{m^2}(Z+1)^2+Z^2=1,$$

tj.

$$\frac{m^2+n^2+p^2}{m^2}\cdot Z^2+2\cdot\frac{n^2+p^2}{m^2}\cdot Z+\frac{n^2+p^2-m^2}{m^2}=0.$$

Jedno rješenje je $z=-1$, a drugo je, po Vièteovim formulama, $Z=\dfrac{m^2-n^2-p^2}{m^2+n^2+p^2}$. Iz (2) sada lako dobijemo sve racionalne točke na jediničnoj sferi:

$$\left(\frac{2mp}{m^2+n^2+p^2},\frac{2mn}{m^2+n^2+p^2},\frac{m^2-n^2-p^2}{m^2+n^2+p^2}\right) \tag{3}$$

Ujedno imamo ovaj rezultat:

Teorem 1. *Za svaku Pitagorinu četvorku $(x,y,z;t)$ sa $t\neq 0$, postoje relativno prosti prirodni brojevi m, n i p tako da vrijedi:*

$$\left|\frac{x}{t}\right|=\frac{2mp}{m^2+n^2+p^2},\quad \left|\frac{y}{t}\right|=\frac{2mn}{m^2+n^2+p^2},\quad \left|\frac{z}{t}\right|=\frac{\left|m^2-n^2-p^2\right|}{m^2+n^2+p^2}. \tag{4}$$

Pretpostavimo da je četvorka $(x,y,z;t)$ *primitivna*, tj. da je najveća zajednička mjera od x, y, z i t jednaka 1, odnosno zbog (1), da x, y, z nemaju zajedničkog djelitelja. Tada iz racionalne parametrizacije (3) točaka na jediničnoj sferi, slijedi ovo djelomično rješenje problema (1):

$$|x|=2mp,\ |y|=2mn,\quad |z|=\left|m^2-n^2-p^2\right|,\quad |t|=m^2+n^2+p^2. \tag{5}$$

Ako je četvorka $(x,y,z;t)$ primitivna, onda su prirodni brojevi m, n i p relativno prosti i jedan ili tri od brojeva m, n i p su neparni. Parametrizacija (3) daje ovaj identitet:

$$(2mp)^2+(2mn)^2+(m^2-n^2-p^2)^2=(m^2+n^2+p^2)^2 \tag{6}$$

Tako npr. za $m=5$, $n=3$ i $p=1$ imamo četvorku $(10,30,15;35)=(5\cdot 2,5\cdot 6,5\cdot 3;5\cdot 7)$ tj. primitivnu četvorku $(2,6,3;7)$ i racionalnu točku $\left(\frac{2}{7},\frac{6}{7},\frac{3}{7}\right)$ na jediničnoj sferi.

Zapis u (6) nije opće rješenje problema (1), jer $m^2+n^2+p^2$ ne mora biti relativno prost s $2mp$, s $2mn$ i s $\left|m^2-n^2-p^2\right|$.

Zadatak 2. *Pokažite da se Pitagorina četvorka $(3,8,36;37)$ ne može dobiti ni za koje vrijednosti parametra m, n i p u rješenju (5).*

Primitivnu četvorku $(4,4,7;9)$, koju nismo mogli dobiti u zadatku 1, možemo sada dobiti ako u formule (5) stavimo $m=1$, $n=2$ i $p=2$.

U daljnjem ćemo trebati neke činjenice iz elementarne teorije brojeva o rastavu prirodnih brojeva u obliku sume dva kvadrata, koje potječu još iz vremena matematičara Pierre de Fermata (1601. – 1665.), pa i Leonharda Eulera (1707. – 1783.). U sljedećem odjeljku one su nabrojane bez dokaza. Dokazi nekih od njih mogu se naći u [2].

Fermatov teorem o zbroju dva kvadrata

Lema 1. *Svaki prost broj oblika* $4n+1$ *može se prikazati kao suma dva kvadrata prirodnih brojeva i to na jedinstven način, do na poredak pribrojnika.*

Lema 2. *Prost broj oblika* $4m+3$ *ne može se prikazati kao zbroj dva kvadrata prirodnih brojeva.*

Lema 3. *Neka je* T *prirodni broj. Tada broj* T^2+1 *ima u svom rastavu na proste faktore samo proste brojeve oblika* $4n+1$ *i broj* 2*, a nema nijedan prost faktor oblika* $4m+3$*. Nadalje,* T^2+1 *nije djeljivo s* 4*.*

Lema 4. *Ako je prirodni broj oblika* y^2+z^2 *djeljiv s prostim brojem* P *oblika* $4m+3$*, tada su i* y *i* z *djeljivi s* P*, a* y^2+z^2 *tada mora biti djeljiv s* P^2*. Ako je prirodni broj oblika* y^2+z^2 *djeljiv s* 4*, tada su* y *i* z *oba parni brojevi.*

Lema 5. *Neka je* M *prirodni broj oblika* $M=\alpha^2+\beta^2$ *i* P *jedan njegov prosti djelitelj oblika* $4n+1$*. Neka je* $P=a^2+b^2$*. Tada je i prirodni broj* $\frac{M}{P}$ *zbroj dvaju kvadrata:*

$$\frac{M}{P}=\Big(\frac{\alpha a\pm\beta b}{a^2+b^2}\Big)^2+\Big(\frac{\alpha b\mp\beta a}{a^2+b^2}\Big)^2.$$

Lema 5 ima ovu važnu posljedicu:

Korolar 1. *Neka je* h *složen prirodni broj koji u svom rastavu na proste faktore ne sadrži, kao djelitelj, nijedan prost broj oblika* $4m+3$*. Neka je* h *rastavljen kao* $h=h_1\cdot h_2$*, gdje su* h_1 *i* h_2 *prirodni brojevi. Svi zapisi od* h *kao zbroja dva kvadrata, dobivaju se tako da se uzmu svi mogući zapisi od* h_1 *i* h_2 *kao zbroja dva kvadrata, recimo* $h_1=a^2+b^2$ *i* $h_2=c^2+d^2$*, i potom se primijeni Lagrangeov identitet:*

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2 \tag{7}$$

Koristeći ovaj identitet, zbroj dvaju kvadrata možemo prikazati kao produkt prostih brojeva oblika $4n+1$ i broja 2, čak i ako se neki od njih ponavljaju. Tako npr. ako je $N=c^2+d^2$, tada je $2N=(1^2+1^2)\cdot(c^2+d^2)=(c+d)^2+(c-d)^2$ i $N^2=(c^2-d^2)^2+(2cd)^2$.

Teorem 2. *Prirodni broj* N *može se prikazati kao zbroj dva cjelobrojna kvadrata ako i samo ako u rastavu broja* N *na proste faktore svaki prosti faktor oblika* $4m+3$ *dolazi s parnom potencijom, ili ekvivalentno, prirodni broj* N *ima rastav oblika* $N=u^2+v^2$*;* $u,\ v\in\mathbb{Z}$ *onda i samo onda kada je njegov kvadratno slobodni dio produkt različitih prostih brojeva oblika* $4k+1$ *i prostog broja* 2*.*

Dokaz gornjeg teorema, koji je prvi dokazao P. Fermat, možete naći u [2], teorem 4.7., str. 43.

Nalaženje Pitagorinih četvorki

Prijeđimo sada na problem nalaženja primitivnih Pitagorinih četvorki. U daljnjem slijedimo knjigu [1]. Zbog primitivnosti barem jedan od cijelih brojeva x, y, z, t je neparan. Pokažimo da je t sigurno neparan. Pretpostavimo suprotno, tj. da je t paran. Tada je i jedan od x, y, z paran, recimo x. Odavde slijedi da je $y^2+z^2=(t-x)\cdot(t+x)$ djeljivo s 4, a to je moguće jedino ako su y i z oba parna. No tada su x, y, z i t

svi parni, suprotno pretpostavljenoj primitivnosti četvorke. Time je dokazano da je t neparan. Odavde slijedi, zbog (1), da je barem jedan od x, y, z neparan, uzmimo u daljnjem da je to x. Odavde opet slijedi da je y^2+z^2 djeljivo s 4 što, po lemi (4) povlači da su y i z oba parna. Neka je, u daljnjem $y=2Y$ i $z=2Z$ za neke prirodne brojeve Y i Z. Kako su t i x neparni, njihovi kvadrati su oblika $8k+1$, pa $8 \mid t^2-x^2$, tj. $8 \mid y^2+z^2$, pa je Y^2+Z^2 parno. Odatle slijedi da su Y i Z oba parna ili oba neparna, tj. y i z su oba djeljiva s 4 ili su oba oblika $4l+2$. Kratko možemo reći da $4 \mid y-z$ ili da $2 \mid Y-Z$. Napomenimo još da broj t^2-x^2 ne može nikad biti oblika $4l+2$, što se vidi gledajući ostatke pri dijeljenju s 4 (vidi [2], teorem 4.8., str. 43.). Opišimo sada načine kako naći Pitagorine četvorke.

Prvi način. Napišimo (1) za primitivnu četvorku ovako: $x^2+y^2=t^2-z^2=(t-z)(t+z)=d\cdot D$, pri čemu će biti $d=t-z$ i $D=t+z$, $d<D$, x neparan, y paran. Pokažimo prvo da $t-z$ i $t+z$ ne mogu imati zajednički prosti djelitelj oblika $P=4m+3$. Ako bi $t-z$ i $t+z$ imali zajednički prosti djelitelj oblika $P=4m+3$, tada bi P bio faktor i od $t-z+t+z$ i od $t+z-(t-z)$, tj. i od t i z. Iz $P \mid (x^2+y^2)$, imali bi po lemi 4 da $P \mid x$ i $P \mid y$, što bi povlačilo da četvorka x, y, z i t nije primitivna, protivno našoj pretpostavci. Tu smo zapravo napisali neparan broj x^2+y^2 u obliku $d\cdot D$, $d<D$, na sve načine da d i D nemaju zajednički prosti djelitelj oblika $P=4m+3$ i koristili identitet:

$$d\cdot D=\left(\frac{D+d}{2}\right)^2-\left(\frac{D-d}{2}\right)^2. \tag{8}$$

Sada stavimo $z=\dfrac{D-d}{2}$ i $t=\dfrac{D+d}{2}$. Rezimirajmo prvi način. Odaberemo proizvoljan neparan x i paran y te uzmemo djelitelj d od x^2+y^2 takav da je $d^2<x^2+y^2$ i da d i $D=\dfrac{x^2+y^2}{d}$ nemaju zajednički prosti djelitelj oblika $4m+3$. Nadalje, $z=\dfrac{D-d}{2}=\dfrac{x^2+y^2-d^2}{2d}$ i $t=\dfrac{D+d}{2}=\dfrac{x^2+y^2+d^2}{2d}$. Time je $(x,y,z;t)$ Pitagorina četvorka. Ako je npr. $x=13$, $y=6$, tada je $13^2+6^2=205=5\cdot 41$. Uzmemo li $d=5$ i $D=41$, izlazi $z=18$ i $t=23$, pa imamo četvorku $(6,13,18;23)$.

Drugi način. Jednakost (1) za primitivnu četvorku napišimo sada ovako:

$$y^2+z^2=(t-x)\cdot(t+x). \tag{9}$$

Kako su i $t-x$ i $t+x$ parni, vrijedi $t-x=2d$ i $t+x=2D$, gdje su $2d$ i $2D$ djelitelji broja y^2+z^2 i $y^2+z^2=2d\cdot 2D$ i $d<D$. Sada vrijedi $(2d)^2<y^2+z^2$, $2D=\dfrac{y^2+z^2}{(2d)}=t+x$, $2d=t-x$. Konačno imamo: $x=D-d=\dfrac{y^2+z^2-(2d)^2}{2\cdot(2d)}$ i $t=D+d=\dfrac{y^2+z^2+(2d)^2}{2\cdot(2d)}$. Rezimirajmo ovaj način za nalaženje primitivnih Pitagorinih četvorki [3].

Odaberemo y i z oba parna po volji, ali tako da $4 \mid (y-z)$. Neka je $2d$ djelitelj od y^2+z^2 takav da je $(2d)^2<y^2+z^2$. Tada je: $x=\dfrac{y^2+z^2-(2d)^2}{2\cdot(2d)}$, $t=\dfrac{y^2+z^2+(2d)^2}{2\cdot(2d)}$ i $(x,y,z;t)$ je Pitagorina četvorka. Ovaj način proizvodi sve četvorke sa zadanim parnim brojevima y i z točno jednom za svaki dobar izbor od $2d$. Tako za $y=4$, $z=8$ imamo $y^2+z^2=80=2\cdot 40=4\cdot 20=8\cdot 10$, pa možemo uzeti $2d=2$, 4 ili 8. Dobili smo četvorke $(4,8,19;21)$, $(4,8,8;12)=4\cdot(1,2,2;3)$ i $(1,4,8;9)$.

Treći način. Primijetimo da su za primitivne četvorke brojevi x^2+y^2 i x^2+z^2 neparni, a broj y^2+z^2 je djeljiv s 8. Zadajmo po volji jedan Fermatov neparan broj N, tj. broj koji ispunjava uvjete Fermatovog teorema 2, i napišimo ga kao zbroj $N=x^2+y^2$ i kao razliku $N=t^2-z^2$ dvaju kvadrata. Dobili smo četvorku $(x,y,z;t)$. Da napišemo N kao x^2+y^2, treba ga faktorizirati kao produkt prostih brojeva, svaki od prostih faktora oblika $4n+1$ napisati kao zbroj kvadrata i primijeniti Lagrangeov identitet (7) više puta i potom pomnožiti x i y produktom prostih brojeva oblika $4m+3$ (vidjeti teorem 2). Time dobijemo N kao zbroj dva kvadrata na više načina. Da napišemo N kao t^2-z^2, treba ga faktorizirati kao produkt prostih brojeva, grupirati ih u dvije grupe, tj. dva faktora, ali tako da prva i druga grupa nemaju zajednički prost broj oblika $4m+3$, koji se pojavio u rastavu od N na proste faktore. Manji od dva faktora je $t-z$, a veći $t+z$. Odatle lako dobijemo t i z ili koristimo odmah identitet (8). Tako dobivamo Pitagorine četvorke $(x,y,z;t)$.

Neka je npr. $N=85$. Sada je: $85=5\cdot 17=(2^2+1^2)\cdot(4^2+1^2)=9^2+2^2=7^2+6^2$, po Lagrangeovom identitetu (7). Nadalje, po identitetu (8) je $85=5\cdot 17=11^2-6^2$ i $85=1\cdot 85=43^2-42^2$, pa imamo četvorke $(2,6,9;11)$, $(2,9,42;43)$, $(6,6,7;11)$ i $(6,7,42;43)$.

U posljednjem odjeljku upoznat ćemo i četvrti način dobivanja Pitagorinih četvorki.

Parametrizacija primitivnih četvorki

Jednakost (1) za primitivnu četvorku napišimo u obliku (9), kao u prethodnom odjeljku. Dokažimo da brojevi $t-x$ i $t+x$ zadovoljavaju uvjete Fermatovog teorema 2. To je očito ako y^2+z^2 nema u svom rastavu na proste brojeve nijedan prost broj oblika $4m+3$. Ako u rastavu postoji takav prost broj P oblika $4m+3$, onda su po lemi 4 y i z djeljivi s P, i u rastavu od y^2+z^2 na proste faktore P dolazi s parnom potencijom, kažimo $2g$. Kako po prije dokazanom u prethodnom odjeljku (prvi način) brojevi $t-x$ i $t+x$ ne mogu imati zajednički prosti djelitelj oblika $4m+3$, točno jedan od brojeva $t-x$ i $t+x$ sadrži P^{2g}, dok onaj drugi od njih nije djeljiv s P. Dakle, $t-x$ i $t+x$ zadovoljavaju uvjete Fermatovog teorema 2 i kako su oba parna, možemo pisati:

$$t+x=2(m^2+q^2) \tag{10}$$

i

$$t-x=2(n^2+p^2) \tag{11}$$

za neke cijele brojeve m, q, p i n. Sada (9) možemo pisati:

$$Y^2+Z^2=(m^2+q^2)(n^2+p^2). \tag{12}$$

Iz korolara 1 primijenjenog na (12) slijedi da su cjelobrojna rješenja od (12) oblika $Y=mn+pq$ i $Z=mp-nq$, pa je:

$$y=2(mn+pq) \tag{13}$$

$$z=2(mp-nq). \tag{14}$$

Iz formula (10) i (11) imamo:

$$x=m^2-n^2-p^2+q^2 \tag{15}$$

$$t=m^2+n^2+p^2+q^2 \tag{16}$$

Iz formule (16) i iz neparnosti od t, vidi se da je jedan od brojeva m^2+q^2 i n^2+p^2 paran, a drugi neparan. Neka su Y i Z oba parna. Tada $4\mid Y^2+Z^2$, i parni od brojeva m^2+q^2, p^2+n^2 je djeljiv s 4. Neka je npr. p^2+n^2 djeljivo s 4, a m^2+q^2 neparan.

Tada su p i n parni, a od m i q jedan je paran, drugi neparan. Dakle od brojeva m, n, p i q je točno jedan neparan. Neka su Y i Z oba neparna. Tada $2 \mid Y^2 + Z^2$, no $4 \nmid Y^2 + Z^2$ i parni od brojeva $m^2 + q^2$, $p^2 + n^2$ je djeljiv s 2, ali ne i s 4. Neka je npr. $m^2 + q^2$ djeljivo s 2, ali ne i s 4, a $p^2 + n^2$ je neparan. U tom slučaju su m i q neparni, a od brojeva n i p jedan je paran, drugi neparan. Od brojeva m, n, p i q sada su točno tri neparna. Dobili smo da u svakom slučaju vrijedi $m + n + p + q \equiv 1 \pmod 2$. Zbog primitivnosti četvorke imamo $nzm(m, n, p, q) = 1$. Time smo dokazali ovaj teorem:

Teorem 3. ([1], [3]) *Neka je $(x, y, z; t)$ primitivna Pitagorina četvorka za koju vrijedi (1). Tada postoje cijeli brojevi m, q, n i p takvi da je $nzm(m, q, n, p) = 1$, da su jedan ili tri od cijelih brojeva m, q, n i p neparni, i da vrijede formule (13), (14), (15) i (16).*

Sada nam (1) i teorem 3 daju *Lebesgueov* identitet:

$$(m^2 - n^2 - p^2 + q^2)^2 + (2mn + 2pq)^2 + (2mp - 2nq)^2 = (m^2 + n^2 + p^2 + q^2)^2. \quad (17)$$

Napomena 1. Neka su $w_1 = m + qi$ i $w_2 = n + pi$ dva kompleksna broja s cjelobrojnim realnim i imaginarnim dijelovima. Sada formule (13), (14), (15) i (16) za primitivne četvorke možemo pisati i pamtiti ovako: $y = 2\mathrm{Re}\,(\overline{w_1} \cdot w_2)$; $z = 2\mathrm{Im}\,(\overline{w_1} \cdot w_2)$; $x = |w_1|^2 - |w_2|^2$ i $t = |w_1|^2 + |w_2|^2$.

Napomena 2. Uvedimo dva vektora $\overrightarrow{v_1} = m\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{v_2} = n\overrightarrow{i} + p\overrightarrow{j}$ s cjelobrojnim komponentama. Sada formule (13), (14), (15) i (16) za primitivne četvorke možemo pisati i pamtiti i ovako: $y = 2\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$; $z = 2\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$; $x = |\overrightarrow{v_1}|^2 - |\overrightarrow{v_2}|^2$ i $t = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2$, pri čemu je $\cdot$ skalarni, a $\times$ vektorski produkt vektora.

Kako je svaka Pitagorina četvorka višekratnik neke primitivne četvorke, teorem 3 povlači teorem:

Teorem 4. *Neka je $(x, y, z; t)$ opća Pitagorina četvorka takva da vrijedi (1). Tada postoje cijeli brojevi m, q, n, p i r tako da $r \mid nzm(x, y, z)$ i da vrijede formule:*

$$y = r \cdot (2mn + 2pq) \quad (18)$$

$$z = r \cdot (2mp - 2nq) \quad (19)$$

$$x = r \cdot (m^2 - n^2 - p^2 + q^2) \quad (20)$$

$$t = r \cdot (m^2 + n^2 + p^2 + q^2). \quad (21)$$

Napomena 3. Pitagorine četvorke kojima su svi članovi prirodni brojevi, dobiju se tako da primijenimo teorem 3 ili teorem 4 pazeći da je $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $z \neq 0$ i potom uzmemo četvorku $(|x|, |y|, |z|, |t|)$ ili četvorku $(|x|, |z|, |y|, |t|)$. Tako se četvorka $(8, 36, 3; 37)$ iz zadatka 2 dobiva ako uzmemo $m = 4$, $q = 2$, $n = 4$, $p = 1$ u teoremu 3.

Primjeri

Teorem 3 omogućuje nam dobivanje Pitagorinih četvorki. Evo liste od 21 primitivnih četvorki za koje je $t \leq 23$, ([3]):

$(1, 2, 2; 3)$ $(2, 3, 6; 7)$ $(1, 4, 8; 9)$ $(4, 4, 7; 9)$ $(2, 6, 9; 11)$ $(6, 6, 7; 11)$

$(3, 4, 12; 13)$ $(2, 5, 14; 15)$ $(2, 10, 11; 15)$ $(1, 12, 12; 17)$ $(8, 9, 12; 17)$

$(1,6,18;19)$ $(6,6,17;19)$ $(6,10,15;19)$ $(4,5,20;21)$ $(4,8,19;21)$

$(4,13,16;21)$ $(8,11,16;21)$ $(3,6,22;23)$ $(3,14,18;23)$ $(6,13,18;23)$

Četvrti način nalaženja četvorki. Pokažimo kako dobiti sve primitivne četvorke s gornje liste za koje je zadan prirodan broj t u jednakosti (1). To je u vezi s *Lagrangeovim teoremom o prikazu svakog broja kao sume od najviše četiri kvadrata [4]*, dokazanom 1770. U dokazu tog rastava ključnu ulogu odigrao je Eulerov identitet o četiri kvadrata [5]. Euler je svojim identitetom o četiri kvadrata dokazao da je produkt dva broja, koja su oba suma četiri kvadrata, opet broj koji je suma neka četiri kvadrata. Ako t prikažemo kao sumu četiri ili tri kvadrata prirodnih brojeva kao u formuli (16), onda formule (13), (14), (15) iz teorema 3 daju jednu četvorku. K. F. Gauss 1801., i A. M. Legendre 1798. pokazali su da se brojevi koji nisu oblika $4^u \cdot (8v+7)$, $u \in N$ i $v \in N \cup \{0\}$, mogu prikazati kao suma od najviše tri kvadrata prirodnih brojeva, *dok se brojevi oblika* $4^u \cdot (8v+7)$, *prikazuju samo kao suma od četiri kvadrata prirodnih brojeva*. Prvi prirodni brojevi oblika $4^u \cdot (8v+7)$ su 7, 15, 23, 28, 31, 39 i 47. Oni se ne mogu prikazati kao suma od tri ili manje kvadrata prirodnih brojeva.

Po četvrtom načinu t možemo prikazati kao sumu od četiri kvadrata i naći m, q, n i p i potom koristiti formule (13), (14), (15) iz teorema 3. Permutiramo li jedan rastav od t na četiri kvadrata, imamo najviše 6 mogućnosti za m, q, n i p, i time najviše 6 četvorki. Tako postupimo za svaki novi rastav od t na sumu četiri ili manje kvadrata i dobivamo sve četvorke s istim t.

Nađimo na četvrti način one četvorke za koje je $t = 23$. Kako je $t = 23 = 8 \cdot 2 + 7$, i 23 je prost broj, to je 23 suma četiri kvadrata na jedan jedini način, $23 = 3^2+3^2+2^2+1^2$. Imamo ove tri mogućnosti:

a) $m = 3$, $q = 3$, $n = 1$ i $p = 2$, što daje $x = 13$, $y = 6$, $z = 18$,

b) $m = 3$, $q = 2$, $n = 3$ i $p = 1$, što daje $x = 3$, $y = 14$, $z = 18$,

c) $m = 3$, $q = 2$, $n = 1$ i $p = 3$, što daje $x = 3$, $y = 6$, $z = 22$,

sve po formulama (13), (14), (15) iz teorema 3. Ostale permutacije ne daju nove četvorke, pa smo dobili sve tri četvorke s liste u kojima je $t = 23$. Zanimljivo je da se broj $14 = 2 \cdot 7$ po teoremu 2 ne može prikazati kao suma dva cjelobrojna kvadrata, no može se prikazati kao suma od četiri cjelobrojna kvadrata samo na jedan način: $14 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2$. Za $t = 14$ imamo $m = 3$, $q = 0$, $n = 2$ i $p = 1$, pa se formule (13), (14) i (15) iz teorema 3 svode na formulu (5), uz zamjenu x i z. Po tim formulama dobijemo jednu neprimitivnu četvorku $(4,6,12;14) = 2 \cdot (2,3,6;7)$. Ostale permutacije, kao npr. $m = 2$, $q = 0$, $n = 3$ i $p = 1$ daju opet istu četvorku $(4,6,12;14)$.

Literatura

[1] R. D. Carmichael, *Diophantine Analysis*, Wiley 1915., Chpt II, Section 10.

[2] Andrej Dujella, *Uvod u teoriju brojeva* (skripta), PMF, Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu na linku `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf`

[3] `http://en.wikipedia.org/wiki/:Pythagorean_quadruple`

[4] `http://en.wikipedia.org/wiki/:Lagrangeś four-square theorem`

[5] `http://en.wikipedia.org/wiki/:Eulerś four square identity`