Nešto više o Eulerovoj[1] nejednakosti za trokut

Šefket Arslanagić[2]

Poznato je da se u matematičkoj literaturi važna nejednakost

$$R \geqslant 2r, \tag{1}$$

gdje su R i r radijusi opisane i upisane kružnice trokuta, naziva *Eulerova nejednakost*. Ustvari, za trokut vrijedi jednakost

$$|IO|^2 = R^2 - 2Rr, \tag{2}$$

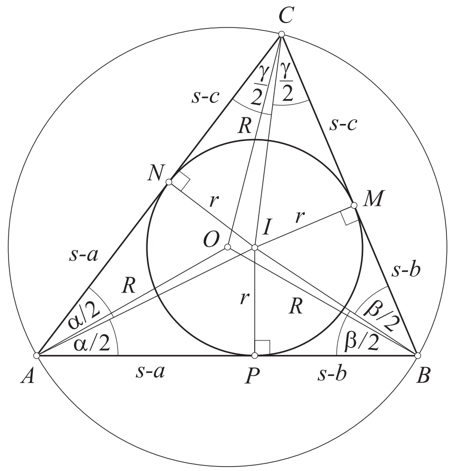
gdje su točke I i O središta upisane i opisane kružnice trokuta ABC i da nejednakost (1), zbog $|IO|^2 \geqslant 0$, neposredno slijedi iz (2). Dva dokaza jednakosti (2) nalaze se u [1], str. 432–434, te još jedan u [2], str. 79–80. Jednakost u [1] vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Sada ćemo dokazati sljedeću nejednakost

$$2Rr \geqslant \frac{|IA|\cdot|IB| + |IB|\cdot|IC| + |IC|\cdot|IA|}{3} \geqslant 4r^2. \tag{3}$$

Primjećujemo odmah da je nejednakost $2Rr \geqslant 4r^2$ ekvivalentna nejednakosti (1).

1° Dokažimo najprije lijevu stranu ove nejednakosti.



Neka su točke M, N i P nožišta okomica iz točke I na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Tada je

$$|AP| = |AN| = s - a, \quad |BP| = |BM| = s - b \quad \text{i} \quad |CM| = |CN| = s - c,$$

gdje je $s = \dfrac{|AB| + |BC| + |AC|}{2} = \dfrac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta ABC.

[1] Leonhard Euler (1707.–1783.), najpoznatiji švicarski matematičar.

[2] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu; e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Koristit ćemo poznate izraze

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\\
\sin\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.
\end{aligned}\tag{4}$$

Iz pravokutnog trokuta AIP imamo

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|IP|}{|IA|} = \frac{r}{|IA|},$$

a odavde

$$|IA| = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.\tag{5}$$

Iz (5) i (4) dobijemo

$$|IA| = \frac{r\sqrt{bc}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}.\tag{6}$$

Iz poučka o sinusima iz (6) imamo

$$|IA| = \frac{r\sqrt{2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}} = \frac{2Rr\sqrt{\sin\beta\sin\gamma}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}},$$

tj.

$$|IA| = \frac{4rR}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}\sqrt{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.\tag{7}$$

Kako iz pravokutnih trokuta BIP i CIM imamo

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{s-b}{|IB|} \quad \text{i} \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{s-c}{|IC|},$$

zbog $|IB| = \dfrac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}$ i $|IC| = \dfrac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ (iz pravokutnih trokuta BIP i CIM) je

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{(s-b)\sin\frac{\beta}{2}}{r} \quad \text{i} \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-c)\sin\frac{\gamma}{2}}{r},$$

iz (7) dobijemo

$$|IA| = 4R\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\tag{8}$$

kao i analogne izraze:

$$|IB| = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \quad \text{i} \quad |IC| = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.\tag{9}$$

Iz (8) i (9) imamo

$$|IA|\cdot|IB|+|IB|\cdot|IC|+|IC|\cdot|IA| = 16R^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\Big(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\Big).\tag{10}$$

Iz (4) dobijemo

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc},$$

a odavde, zbog $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Heronova formula), $P=rs$ i $abc=4RP$,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\frac{P^2}{s}}{4RP}=\frac{P}{4sR}=\frac{rs}{4sR}=\frac{r}{4R}. \tag{11}$$

Vrijedi nejednakost 2.9. iz [3] koja glasi

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{3}{2}. \tag{12}$$

Konačno iz (10), (11) i (12) imamo

$$\frac{|IA|\cdot|IB|+|IB|\cdot|IC|+|IC|\cdot|IA|}{3}\leqslant\frac{1}{3}\cdot16R^2\cdot\frac{r}{4R}\cdot\frac{3}{2},$$

tj.

$$\frac{|IA|\cdot|IB|+|IB|\cdot|IC|+|IC|\cdot|IA|}{3}\leqslant 2Rr.$$

2° Da dokažemo desnu stranu nejednakosti (3), koristit ćemo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}},$$

a odavde zbog (11)

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{r}{4R}}. \tag{13}$$

Najzad, iz (10), (11) i (13) dobivamo

$$\frac{|IA|\cdot|IB|+|IB|\cdot|IC|+|IC|\cdot|IA|}{3}\geqslant16R^2\cdot\frac{r}{4R}\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{4R}}=4Rr\cdot\sqrt[3]{\frac{r}{4R}}=2r\cdot\sqrt[3]{\frac{8R^3r}{4R}}$$

$$\overset{(1)}{\geqslant}2r\sqrt[3]{2\cdot4r^2\cdot r}=4r^2.$$

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[3] O. Bottema, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (Netherlands), 1969.