# ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2019. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/277.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

## A) Zadatci iz matematike

**3679.** Riješi sustav jednadžbi

$$x^2+y^2+x+y=22$$
$$xy=4.$$

**3680.** Nađi sve trojke pozitivnih cijelih brojeva $(a,b,c)$ takvih da vrijedi

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2.$$

**3681.** Odredi sva cjelobrojna rješenja $x$, $y$, $z$ jednadžbe

$$(x-y-1)^3+(y-z-2)^3+(z-x+3)^3=18.$$

**3682.** Dokaži da za pozitivne brojeve $a$, $b$, $c$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca.$$

**3683.** Odredi sve susjedne proste brojeve $p$ i $q$ takve da je $p^2-pq+q^2$, također, prosti broj. (Prosti brojevi $p$ i $q$ su susjedni ako je $|p-q|=2$.)

**3684.** Dani su brojevi $a_1, \ldots, a_n \in [2,3]$. Dokaži nejednakost

$$\log_{a_1}(5a_2-6)+\ldots+\log_{a_{n-1}}(5a_n-6) + \log_{a_n}(5a_1-6)\geq 2n.$$

**3685.** Romb $ADEF$ je upisan u trokut $ABC$ tako da imaju zajednički vrh $A$ i točka $E$ dijeli stranicu $\overline{BC}$ na dužine čije su duljine u omjeru $|EC|:|BE|=2:3$. Odredi duljine stranica trokuta koje imaju zajednički vrh $A$ ako su duljine dijagonala romba $m$ i $n$.

**3686.** U ravnini su dana dva jednakoorijentirana kvadrata $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$. Neka su $P$, $Q$, $R$, $S$ polovišta dužina $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$. Dokaži da je $PQRS$ kvadrat.

**3687.** Dani su jednakostranični trokuti $ABC$ i $BPQ$ takvi da stranica $\overline{PQ}$ sadrži vrh $C$. Dokaži jednakost

$$|BP|^2=|AB|^2+|PC|\cdot|QC|.$$

**3688.** Dane su točke $A$ i $B$ na promjeru kružnice sa središtem $C$, tako da je $|CA|=|CB|=t$. Tetiva $\overline{DE}$ kružnice sadrži točku $A$. Dokaži da je zbroj kvadrata duljina stranica trokuta $BDE$ jednak $6R^2+2t^2$, gdje je $R$ polumjer kružnice.

**3689.** Ako su $a$, $b$, $c$ duljine stranica trokuta i $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nasuprotni im kutovi, dokaži nejednakost

$$\left(1-\frac{a}{b+c}\right)\left(1-\frac{b}{c+a}\right)\left(1-\frac{c}{a+b}\right) \leq \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Kada vrijedi jednakost?

**3690.** Dokaži da za svaki realan broj $x$ vrijedi jednakost

$$\sin 3x=4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).$$

**3691.** Nađi sva rješenja sustava jednadžbi

$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}=\ldots=\frac{x_{1010}}{x_{1010}+2019}$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_{1010}=2020.$$

**3692.** Neka su $ABCD$ i $FGHE$ nasuprotne strane kocke i $\overline{AF}$ je njezin brid duljine $|AF|=2$.

a) Ako su $M$ i $N$ polovišta bridova $\overline{BC}$ i $\overline{EF}$, kolika je površina četverokuta $AMHN$.

b) Neka su $P$ i $Q$ polovišta od $\overline{AB}$ i $\overline{HE}$. Pravci $AM$ i $CP$, te $HN$ i $FQ$ sijeku se redom u točkama $X$ i $Y$. Izračunaj duljinu dužine $\overline{XY}$.

## B) Zadatci iz fizike

**OŠ – 450.** Strijela mase 120 grama je izbačena iz luka na visini $h$. Njena je ukupna energija u trenutku izlijetanja iznosila 151.8 džula. Meta se nalazi na visini $2h$. Tijekom leta strijela izgubi 20 posto svoje kinetičke energije. Na kojoj se visini nalazi meta ako je strijela u nju udarila s ukupnom energijom od 123.6 džula? Koliko je meta udaljena od strijelca ako strijela po metru udaljenosti gubi 0.6 džula kinetičke energije?

**OŠ – 451.** Radiovalovi putuju brzinom $3 \cdot 10^8$ m/s. Radiopostaja je od slušatelja udaljena 120 kilometara. Koliko puta brže dođe signal iz nje do prijemnika nego zvuk iz njega do uha slušatelja koji je od aparata udaljen 3 metra? Brzina zvuka je 340 m/s. Na kojoj bi udaljenosti od prijemnika morao biti slušatelj da ta vremena budu jednaka?

**OŠ – 452.** Strujni krug se sastoji od 4 jednake žarulje i izvora. Jedna je od žarulja spojena serijski na izvor napona, a preostale tri su spojene u paralelu, ali tako da je u jednoj grani jedna žaruljica, a u drugoj dvije. Izračunaj koliki je napon izvora ako je napon na jednoj od žarulja u grani s dvije žarulje 5 V.

**OŠ – 453.** Martin ima naočale s divergentnom lećom jakosti 1 dpt. Na kojoj se udaljenosti od optičkog središta leće mora nalaziti ploča da ju Martin kroz svoju leću vidi dvostruko manju nego u stvarnoj veličini?

*(Zadatke 452 i 453 je poslao Filip Vučić (8), OŠ Trnsko, Zagreb.)*

**1693.** Na tečaju ronjenja podučava se da gledanjem pod vodom kroz masku ravnog stakla predmete vidimo 33 % uvećane i 25 % približene. Dokaži to. Indeks loma vode je 4/3, indeks loma stakla je 1.5, a za zrak iznosi 1.

**1694.** Ciljana putanja sonde *Parker Solar Probe* približava se do 0.046 a.j. središtu Sunca (a.j. = astronomska jedinica = $1.496 \cdot 10^{11}$ m) i udaljava se do 0.73 a.j. od Sunca. Odredi ophodno vrijeme sonde i brzine kojima se sonda giba u odnosu na Sunce u krajnjim točkama putanje.

**1695.** Matematičko njihalo duljine $l$ ima period njihanja $T$. Povećanjem duljine njihala za 21 %, period njihanja se poveća za 0.34 s. Odredi $l$ i $T$.

**1696.** Na homogenu kuglu mase 1.9 kg i radijusa 10 cm djelule moment sile 0.012 Nm tako da *zaustavlja* njenu rotaciju. U nekom trenutku $(t = 0)$ kutna brzina rotacije kugle iznosi 7.5 rad/s.

a) Odredi vrijeme potrebno da se kugla zaustavi.

b) Odredi vrijeme potrebno za prvi okret oko svoje osi.

**1697.** Kugla mase 1.95 kg udara brzinom 1.1 m/s centralno i elastično u drugu kuglu koja je dotad mirovala. Nakon sudara se druga kugla giba trostruko brže od prve, u istom smjeru. Odredi masu druge kugle. Koliki se postotak kinetičke energije prenio na drugu kuglu?

**1698.** Balon je napunjen plinom 41 % manje gustoće od zraka. Masa praznog balona je 18 grama, a okolni zrak je gustoće 1.2 kg/m$^3$. Izračunaj volumen balona ako je uzgon točno jednak težini sklopa. Volumen praznog balona je zanemariv.

**1699.** Kolica mase 2.7 kg gibaju se jednoliko niz kosinu nagiba 25°, tako da snaga sile trenja iznosi 32 W. Kojom se brzinom gibaju kolica? Koliki je koeficijent trenja? Koliku visinsku razliku pređu u 3.5 s gibanja?

## C) Rješenja iz matematike

**3651.** *Riješi sustav linearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6 && (J_1)\\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2 && (J_2)\\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6 && (J_3)\\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7 && (J_4) \end{aligned}$$

*Rješenje.* Imamo iz $(J_1)$:

$$x_1 = 6 - x_2 + 6x_3 + 4x_4. \qquad (1)$$

Uvrštavajući (1) u $(J_2)$, $(J_3)$ i $(J_4)$ dobivamo sljedeći sustav:

$$-x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4 \qquad (2)$$

$$x_2 + 21x_3 + 10x_4 = -6 \qquad (3)$$

$$-x_2 + 21x_3 + 20x_4 = -25. \qquad (4)$$

Zbrajanjem jednadžbi (2) i (3), odnosno (3) i (4) dobivamo:

$$24x_3 + 12x_4 = -10$$

$$42x_3 + 30x_4 = -31.$$

Odavde lako dobivamo $x_3 = \dfrac{1}{3}$ i $x_4 = -\dfrac{3}{2}$. Sada je iz (2) $x_2 = 2$, a iz (1) $x_1 = 0$. Dakle, rješenje danog sustava je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, 2, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right).$$

*Ajla Midžić (2),*
*Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH*

**3652.** *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$$

*u skupu cijelih brojeva različitih od nule.*

*Rješenje.* Sređivanjem jednadžbi dobivamo

$$x^3 + x^2y^2 + xy + y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$2y^2 + (x^2 - 3x)y + 3x^2 + x = 0. \qquad (*)$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu po nepoznanici $y$. Računamo njenu diskriminantu:

$$\begin{aligned} D &= (x^2 - 3x)^2 - 8(3x^2 + x) \\ &= x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 24x^2 - 8x \\ &= x(x+1)^2(x-8). \end{aligned}$$

Naša jednadžba ima cjelobrojna rješenje ako i samo ako je diskriminanta potpun kvadrat. U ovom slučaju to znači:

$$\begin{aligned} & x(x-8) = k^2 \\ \Longrightarrow\ & x^2 - 8x = k^2 \\ \Longrightarrow\ & x^2 - 8x + 16 - k^2 = 16 \\ \Longrightarrow\ & (x-4)^2 - k^2 = 16 \\ \Longrightarrow\ & (x-k-4)(x+k-4) = 16. \end{aligned}$$

Mogućnosti su:

$$\left.\begin{aligned} x-k-4 &= 16 \\ x+k-4 &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{aligned} x-k-4 &= 1 \\ x+k-4 &= 16 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{aligned} x-k-4 &= 8 \\ x+k-4 &= 2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 9$$

$$\left.\begin{aligned} x-k-4 &= 2 \\ x+k-4 &= 8 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 9$$

$$\left.\begin{aligned} x-k-4 &= -16 \\ x+k-4 &= -1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{aligned} x-k-4 &= -1 \\ x+k-4 &= -16 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{aligned} x-k-4 &= -8 \\ x+k-4 &= -2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = -1$$

$$\left.\begin{aligned} x-k-4 &= -2 \\ x+k-4 &= -8 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = -1$$

$$\left.\begin{aligned} x-k-4 &= 4 \\ x+k-4 &= 4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 8$$

$$\left.\begin{aligned} x-k-4 &= -4 \\ x+k-4 &= -4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 0$$

Dakle, $x \in \{-1, 8, 9\}$, pa iz $(*)$ dobivamo: $(x, y) \in \{(-1, -1), (8, -10), (9, -6), (9, -21)\}$.

*Oliver Kukas (3),*
*Gimnazija A. G. Matoša, Zabok*

**3653.** *Neka je $x$ realan broj takav da je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj. Dokaži da je $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki prirodan broj $n$.*

*Rješenje.* Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom.

Za $n = 2$ je

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \in \mathbb{Z}.$$

Neka je $n \geqslant 2$.

Pretpostavimo da za sve prirodne brojeve $k \leqslant n$ vrijedi $x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$.

Dokažimo da je $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ također cijeli broj.

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$$
$$= \underbrace{\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)}_{\in\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{\in\mathbb{Z}} - \underbrace{\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)}_{\in\mathbb{Z}}.$$

Zbog ove očite jednakosti vrijedi tvrdnja zadatka.

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3654.** *Ako su $a$, $b$, $c$ pozitivni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$, dokaži nejednakost*

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

*Prvo rješenje.* Kako je $a+b+c=3$, postavljena nejednakost je ekvivalentna s

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3(a^2b+b^2c+c^2a).$$

Posljednja nejednakost je ekvivalentna redom s

$$\begin{aligned}
& a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2 \\
& \quad \geqslant 2(ba^2+cb^2+ac^2) \\
\Longleftrightarrow\ & (a^3-ba^2)+(b^3-cb^2)+(c^3-ac^2) \\
& \quad +(ab^2-ba^2)+(bc^2-cb^2) \\
& \quad +(ca^2-ac^2) \geqslant 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (a-b)(a^2-ab)+(b-c)(b^2-bc) \\
& \quad +(c-a)(c^2-ca) \geqslant 0 \\
\Longleftrightarrow\ & a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

što očigledno vrijedi.

*Arslan Smajević (2),*
*Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH*

*Drugo rješenje.* Za pozitivne brojeve $a$, $b$, $c$ očito vrijedi:

$$\begin{aligned}
& a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2 \geqslant 0 \\
\Longleftrightarrow\ & a^3-2a^2b+ab^2+b^3-2b^2c+bc^2 \\
& \quad +c^3-2ac^2+a^2c \geqslant 0 \\
\Longleftrightarrow\ & a^3+ab^2+ac^2+a^2b+b^3+bc^2 \\
& \quad +a^2c+b^2c+c^3 \\
& \quad \geqslant 3(a^2b+b^2c+ac^2) \\
\Longleftrightarrow\ & (a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \\
& \quad \geqslant 3(a^2b+b^2c+ac^2).
\end{aligned}$$

Zbog uvjeta zadatka to je ekvivalentno s

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant a^2b+b^2c+ac^2$$

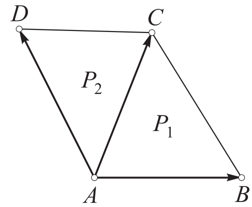
što se i tražilo.

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3655.** *Pokaži da sve ove točke* $A(1,0,2)$, $B(0,3,-1)$, $C(4,3,-1)$, $D(5,-2,4)$ *leže u istoj ravnini. Kolika je površina četverokuta* $ABCD$*?*

*Rješenje.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= -\vec\imath+3\vec\jmath-3\vec k \\
\overrightarrow{AC} &= 3\vec\imath+3\vec\jmath-3\vec k \\
\overrightarrow{AD} &= 4\vec\imath-2\vec\jmath+2\vec k
\end{aligned}$$




Ako postoje $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$, tada ove četiri točke leže u istoj ravnini.

$$\begin{aligned}
& 4\vec\imath-2\vec\jmath+2\vec k \\
&= -\alpha\vec\imath+3\alpha\vec\jmath-3\alpha\vec k+3\beta\vec\imath+3\beta\vec\jmath-3\beta\vec k \\
&= (-a+3\beta)\vec\imath+(3\alpha+3\beta)\vec\jmath-(3\alpha+3\beta)\vec k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\alpha+3\beta &= 4 \\
\underline{3\alpha+3\beta} &\underline{{}=-2} \\
\alpha=-\frac{3}{2},&\quad \beta=\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

tj. $\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$ pa točke $A$, $B$, $C$ i $D$ leže u istoj ravnini. Kako je četverokut konveksan imamo:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec\imath & \vec\imath & \vec k \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3\end{vmatrix}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(-12\vec\jmath-12\vec k)\right| = 6\sqrt{2} \\
P_2 &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}| \\
&= \frac{1}{2}|18\vec\jmath+18\vec k| = 9\sqrt{2}
\end{aligned}$$

pa je $P=P_1+P_2=15\sqrt{2}$.

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3656.** *Odredi sva realna rješenja jednadžbe*

$$\frac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\frac{7}{6}.$$

*Rješenje.* Sređivanjem dobivamo

$$\frac{(2^x+3^x)(4^x-6^x+9^x)}{6^x(2^x+3^x)}=\frac{7}{6}$$

$$(2^x+3^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R})$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x-1+\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{7}{6}.$$

Supstitucijom $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$ dobivamo

$$t+\frac{1}{t}=\frac{13}{6}\ /\ \cdot 6t$$

$$6t^2-13t+6=0$$

odakle je $t_1=\frac{2}{3}$, $t_2=\frac{3}{2}$.

Sada je

$1^\circ$ $t_1=\frac{2}{3} \implies \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3} \implies x_1=1$

$2^\circ$ $t_2=\frac{3}{2} \implies \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \implies x_2=-1.$

*Lana Kramar (3),*
*SŠ Zlatar, Zlatar*

**3657.** *Bez računala odredi veći od ova dva broja* 200! *i* $100^{200}$.

*Prvo rješenje.* Promatrajmo produkt

$$200!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 98\cdot 99\cdot 100\cdot 101\cdot\ldots\cdot 197\cdot 198\cdot 199\cdot 200.$$

Imamo sada sljedeći niz nejednakosti:

$$\begin{aligned}2\cdot 198&=(100-98)\cdot(100+98)\\&=100^2-98^2<100^2\\3\cdot 197&=(100-97)\cdot(100+97)\\&=100^2-97^2<100^2\\4\cdot 196&=(100-96)\cdot(100+96)\\&=100^2-96^2<100^2\\&\ldots\\98\cdot 102&=(100-2)\cdot(100+2)\\&=100^2-2^2<100^2\\99\cdot 101&=(100-1)\cdot(100+1)\\&=100^2-1^2<100^2.\end{aligned}$$

Množeći ove nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}&2\cdot 198\cdot 3\cdot 197\cdot\ldots\cdot 98\cdot 102\cdot 99\cdot 101\\&\quad<(100^2)^{98}=100^{196}.\end{aligned}\qquad(*)$$

Također vrijedi

$$199\cdot 1\cdot 100\cdot 200<100^4.\qquad(**)$$

Sada iz $(*)$ i $(**)$ zaključujemo:

$$200!<100^{196}\cdot 100^4=100^{200}$$

što znači da je broj 200! manji od broja $100^{200}$.

*Ilhana Agić (2),*
*Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH*

*Drugo rješenje.* Matematičkom indukcijom ćemo dokazati poopćenu tvrdnju: *Za* $n\geqslant 6$, $n\in\mathbb{N}$ *vrijedi* $n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

*Baza.* $6!=720$, $\left(\frac{6}{2}\right)^6=729$.

*Pretpostavka.* Neka je $n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n$ za neki $n\geqslant 6$.

*Korak.* Dokažimo da vrijedi

$$(n+1)!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

Polazimo od poznate nejednakosti $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$, što se lako provjeri npr. po binomnom poučku. Redom imamo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1$$

$$\frac{2^n}{2^{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>1$$

$$\frac{(n+1)^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^n}>1\ /\ \cdot(n+1)$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{2}{n}\right)^n>n+1\ \Big/\ \cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} > (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^{n}$$
$$> (n+1)n! = (n+1)!$$

pa je tvrdnja dokazana.

Za $n = 200$ je $200! < 100^{200}$.

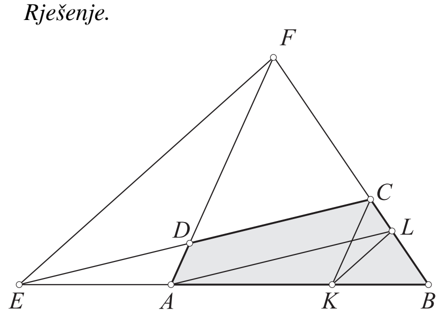
*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3658.** *Pravci na kojima leže nasuprotne stranice $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ sijeku se u točkama $E$ i $F$, tim redom. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ dane su točke $K$ i $L$ takve da je $AD \parallel CK$ i $CD \parallel AL$. Ako vrijedi jednakost*

$$\frac{|AE|\cdot|CE|}{|DE|\cdot|BE|} = \frac{|AF|\cdot|CF|}{|BF|\cdot|DF|},$$

*dokaži $EF \parallel KL$.*

*Rješenje.*




Zbog $AD \| CK$ i $CD \| AL$ imamo na osnovu Talesovog teorema:

$$\frac{|AE|}{|EK|} = \frac{|DE|}{|CE|},$$

odnosno

$$\frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|EK|}{|CE|},$$

tj.

$$\frac{|AE|\cdot|CE|}{|DE|\cdot|BE|} = \frac{|EK|\cdot|CE|}{|CE|\cdot|BE|} = \frac{|EK|}{|BE|} \qquad (1)$$

kao i:

$$\frac{|DF|}{|AF|} = \frac{|CF|}{|FL|},$$

odnosno

$$\frac{|AF|}{|DF|} = \frac{|FL|}{|CF|},$$

tj.

$$\frac{|AF|\cdot|CF|}{|BF|\cdot|DF|} = \frac{|FL|}{|CF|}\cdot\frac{|CF|}{|BF|} = \frac{|FL|}{|BF|}. \qquad (2)$$

Sada iz (1) i (2) danog uvjeta slijedi

$$\frac{|EK|}{|BE|} = \frac{|FL|}{|BF|},$$

a odavde zbog obrata Talesovog teorema dobivamo $EF \| KL$.

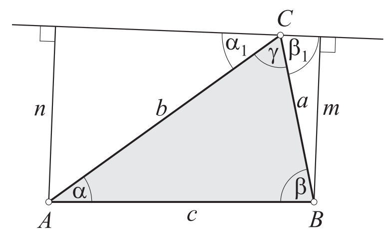
*Haris Hodžić (2),*
*Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH*

**3659.** *Neka su $n$ i $m$ udaljenosti točaka $A$ i $B$ trokuta $ABC$ od proizvoljnog pravca kroz vrh $C$. Dokaži jednakost*

$$a^2n^2 + b^2m^2 - 2abnm\cos\gamma = 4P^2,$$

*gdje je $P$ površina trokuta.*

*Prvo rješenje.* Uz oznake kao na slici imamo $n = b\sin\alpha_1$, $m = a\sin\beta_1$, $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta$, $P = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$.




Uvrštavanjem u danu jednakost dobivamo

$$\sin^2\alpha_1 + \sin^2\beta_1 - 2\sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\gamma = \sin^2\gamma.$$

Koristit ćemo trigonometrijski identitet

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta),$$

pa imamo

$$\sin^2\alpha_1 + \sin^2\beta_1 - [\cos(\alpha_1-\beta_1)$$
$$- \cos(\alpha_1+\beta_1)]\cos\gamma = \sin^2\gamma$$
$$\sin^2\alpha_1 + \sin^2\beta_1$$
$$- \cos(\alpha_1-\beta_1)(\cos(\pi-(\alpha_1-\beta_1)))$$
$$+ \cos(\pi-\gamma)\cos\gamma = \sin^2\gamma$$
$$\sin^2\alpha_1 + \sin^2\beta_1 + \cos(\alpha_1-\beta_1)\cos(\alpha_1+\beta_1)$$
$$- \cos^2\gamma - \sin^2\gamma = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\sin^2\alpha_1+\sin^2\beta_1+\cos^2\alpha_1\cos^2\beta_1\\
&\quad-\sin^2\alpha_1\sin^2\beta_1-1=0\\
&\sin^2\alpha_1+\sin^2\beta_1+(1-\sin^2\alpha_1)(1-\sin^2\beta_1)\\
&\quad-\sin^2\alpha_1\sin^2\beta_1-1=0\\
&\qquad\qquad 0=0.
\end{aligned}
$$

Kako je posljednja nejednakost istinita, takva je i polazna.

*Napomena.* Ovo je rješenje za slučaj kada dani pravac siječe $\triangle ABC$ samo u točki $C$. Kada on siječe i stranicu $\overline{AB}$, vrijedi ova jednakost

$$a^2n^2+b^2m^2+2abnm\cos\gamma=4P^2,$$

kako je to dokazao učenik Alen Hrbat.

*Ur.*

*Drugo rješenje.* Imamo:

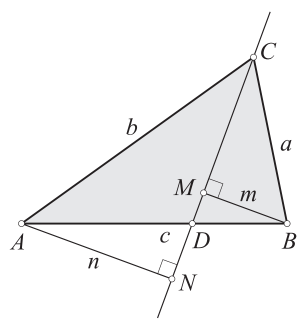
$$\triangle ADN\sim\triangle BDM \implies \frac{|AN|}{|BM|}=\frac{|AD|}{|BD|},$$

tj.

$$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{n}{m} \tag{1}$$

te

$$P=P_{\triangle ABC}=\frac{ab}{2}\sin\gamma. \tag{2}$$




Kao i

$$
\begin{aligned}
&P_{\triangle ACD}+P_{\triangle BCD}=P_{\triangle ABC}\\
&\frac{|CD|\cdot n}{2}+\frac{|CD|\cdot m}{2}=\frac{ab}{2}\sin\gamma \qquad (3)\\
&|CD|=\frac{ab\sin\gamma}{m+n}=\frac{2P}{m+n}.
\end{aligned}
$$

Na osnovu Stuartovog teorema imamo:

$$c(|CD|^2+|AD|\cdot|BD|)=a^2\cdot|AD|+b^2\cdot|BD|. \tag{4}$$

Kako je $c=|AD|+|BD|$, te iz (1)

$$
\begin{aligned}
&\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{n}{m}\iff\frac{|AD|}{|BD|}+1=\frac{n}{m}+1\\
&\iff\frac{|AD|+|BD|}{|BD|}=\frac{m+n}{m}\\
&\iff\frac{c}{|BD|}=\frac{m+n}{m}\\
&\iff|BD|=\frac{m\cdot c}{m+n}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

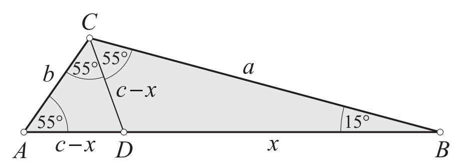
Sada iz (4) zbog (1), (2), (3) i (5) dobivamo

$$
\begin{aligned}
&|CD|^2=\frac{a^2\cdot|AD|+b^2\cdot|BD|}{c}-|AD|\cdot|BD|\\
&\iff\frac{4P^2}{(m+n)^2}=\frac{a^2\cdot\frac{n}{m}|BD|+b^2\cdot|BD|}{|AD|+|BD|}\\
&\qquad-\frac{n}{m}|BD|^2\;\Big/\cdot(m+n)^2\\
&\iff 4P^2=\left[\frac{|BD|\left(\frac{n}{m}a^2+b^2\right)}{\frac{n}{m}|BD|+|BD|}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{n}{m}\cdot\frac{m^2c^3}{(m+n)^2}\right](m+n)^2\\
&\iff 4P^2=(a^2n+b^2m)(m+n)\\
&\qquad-mn(a^2+b^2-2ab\cos\gamma)\\
&\iff 4P^2=a^2n^2+b^2m^2+2abmn\cos\gamma.
\end{aligned}
$$

*Alen Hrbat (2), Drugi gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH*

**3660.** *Nasuprot stranica $a$, $b$, $c$ trokuta su kutovi $55^\circ$, $15^\circ$, $110^\circ$. Dokaži jednakost $c^2-a^2=ab$.*

*Prvo rješenje.*



Sa slike je očito $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, odnosno

$$\frac{|BC|}{|AB|}=\frac{|BD|}{|BC|}=\frac{|CD|}{|AC|}$$

(jer je $CD$ simetrala kuta $\sphericalangle BCA$)

$$\Longrightarrow \frac{a}{c}=\frac{x}{a}=\frac{c-x}{b}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{a^2}{c} \quad \text{i} \quad xb=a(c-x)$$

$$\Longrightarrow \frac{a^2}{c}b=a\left(c-\frac{a^2}{c}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{a^2b}{c}=ac-\frac{a^3}{c} \Big/ \cdot\frac{c}{a}$$

$$\Longrightarrow ab=c^2-a^2$$

što se i tražilo.

*Oliver Kukas (3), Zabok*

*Drugo rješenje.* Koristeći poučak o sinusima imamo $a=2R\sin 55^\circ$, $b=2R\sin 15^\circ$, $c=2R\sin 110^\circ$, pa imamo:

$$c^2-a^2=4R^2(\sin^2 110^\circ-\sin^2 55^\circ)$$

$$=4R^2(\sin 110^\circ+\sin 55^\circ)(\sin 110^\circ-\sin 55^\circ)$$

$$=4R^2\cdot 2\sin\frac{165^\circ}{2}\cos\frac{55^\circ}{2}\cdot 2\sin\frac{55^\circ}{2}\cos\frac{165^\circ}{2}$$

$$=4R^2\left(2\sin\frac{55^\circ}{2}\cos\frac{55^\circ}{2}\cdot 2\sin\frac{165^\circ}{2}\cos\frac{165^\circ}{2}\right)$$

$$=4R^2\sin 55^\circ\sin 165^\circ,$$

te

$$ab=2R\sin 55^\circ\cdot 2R\sin 15^\circ$$

$$=4R^2\sin 55^\circ\sin 15^\circ,$$

a kako je

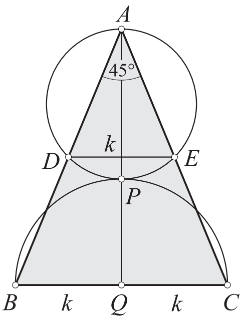
$$\sin 165^\circ=\sin(180^\circ-15^\circ)=\sin 15^\circ,$$

slijedi $c^2-a^2=ab$.

*Hamza Begić (4),*
*Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH*

**3661.** *Dan je jednakokračan trokut $ABC$, gdje je $|AB|=|AC|$ i $\sphericalangle A=45^\circ$. Točke $D$ i $E$ su polovišta bridova $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Dokaži da kružnica opisana trokutu $ADE$ dodiruje onu kojoj je $\overline{BC}$ promjer.*

*Rješenje.* Označimo $k=|DE|$. $\overline{AP}$ je dijametar kružnice opisane trokutu $ADE$.




Iz poučka os sinusima dobivamo

$$|AP|=2R=\frac{k}{\sin A} \Longrightarrow |AP|=k\sqrt{2}.$$

Kod trokuta $ABQ$ je $|BQ|=k$ i

$$\operatorname{tg} 22.5^\circ=\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{|BQ|}{|AQ|}$$

$$\Longrightarrow |AQ|=\frac{k}{\operatorname{tg} 22.5^\circ}=\frac{k}{\sqrt{2}-1}=k(\sqrt{2}+1).$$

Sada je

$$|PQ|=|AQ|-|AP|=k(\sqrt{2}+1)-k\sqrt{2}=k.$$

Dakle, kružnica sa središtem $Q$ polumjera $k$ dodiruje kružnicu opisanu trokutu $ADE$.

*Benjamin Kadić (2),*
*Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH*

**3662.** *Dokaži jednakost*

$$\cos^3\frac{x}{3}+\cos^3\frac{x+2\pi}{3}+\cos^3\frac{x+4\pi}{3}=\frac{3}{4}\cos x.$$

*Rješenje.* Koristimo poznatu formulu za kosinus trostrukog kuta

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Imamo

$$\cos^3\frac{x}{3}=\frac{1}{4}\cos x+\frac{3}{4}\cos\frac{x}{3}$$

$$\cos^3\frac{x+2\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{4}\cos(x+2\pi)+\frac{3}{4}\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cos x+\frac{3}{4}\left(\cos\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cos x+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cos x-\frac{3}{8}\cos\frac{x}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\sin\frac{x}{3}$$

$$\cos^3 \frac{x+4\pi}{3}$$
$$= \frac{1}{4}\cos(x+4\pi) + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cos x + \frac{3}{4}\left(\cos\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cos x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{8}\cos\frac{x}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\sin\frac{x}{3}.$$

Sada je lijeva strana jednakosti jednaka:

$$\cos^3\frac{x}{3} + \cos^3\frac{x+2\pi}{3} + \cos^3\frac{x+4\pi}{3}$$
$$\frac{3}{4}\cos x + \frac{3}{4}\cos\frac{x}{3} - \frac{3}{8}\cos\frac{x}{3} - \frac{3}{8}\cos\frac{x}{3}$$
$$= \frac{3}{4}\cos x + \frac{3}{4}\cos\frac{x}{3} - \frac{3}{4}\cos\frac{x}{3}$$
$$= \frac{3}{4}\cos x.$$

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3663.** *Za $n \geq 2$ dokaži jednakost*

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

*Rješenje.* Koristimo matematičku indukciju.

*Baza.* $n = 2$, $\binom{2}{2} = \binom{3}{3}$, što je točno.

*Pretpostavka.* Neka vrijedi tvrdnja za neki $n \geqslant 2$ i dokažimo da ona vrijedi za $n+1$:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}.$$

Redom imamo

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2}$$
$$\overset{\text{pretp.}}{=} \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$
$$= \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{2!(n-2)!}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n-1}\right)$$
$$= \frac{(n+1)!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{n+2}{3(n+1)}$$
$$= \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = \binom{n+2}{3}.$$

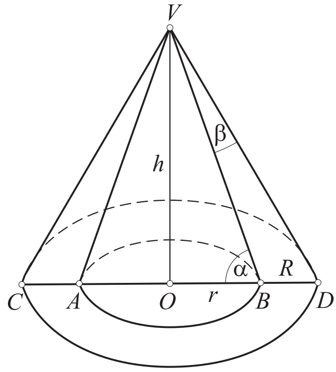
*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3664.** *Dva stošca imaju koncentrične baze i zajedničku visinu $h$. Razlika kutova između izvodnica i osi stošca jednaka je $\beta$, a kut između izvodnice unutarnjeg stošca i ravnine baze je $\alpha$. Odredi volumen prostora između bočnih ploha stožaca.*

*Rješenje.* Uz oznake kao na slici je

$$\sphericalangle OVB = 90^\circ - \alpha,$$
$$\sphericalangle OVD = 90^\circ - (\alpha - \beta)$$

i stavimo $|OB| = r$ i $|OD| = R$.




Iz $\triangle VOB$ i $\triangle VOD$ je

$$r = h\cdot\operatorname{ctg}\alpha \quad \text{i} \quad R = h\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\beta).$$

Sada je:

$$V_1 = R^2\pi\cdot\frac{h}{3} = \frac{h^3}{3}\pi\operatorname{ctg}^2(\alpha-\beta)$$
$$V_2 = r^2\pi\cdot\frac{h}{3} = \frac{h^3}{3}\pi\operatorname{ctg}^2\alpha$$

pa je traženi volumen jednak

$$V = V_1 - V_2 = \frac{h^3}{3}\pi(\operatorname{ctg}^2(\alpha-\beta) - \operatorname{ctg}^2\alpha)$$
$$= \frac{h^3}{3}\pi(\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) - \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) + \operatorname{ctg}\alpha)$$
$$= \left\{\begin{array}{c}\text{koristimo formulu:}\\ \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\end{array}\right\}$$
$$= \frac{h^3}{3}\cdot\frac{\sin(2\alpha-\beta)\cdot\sin\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2(\alpha-\beta)}\pi.$$

*Oliver Kukas (3), Zabok*

⋆ ⋆ ⋆

**Rješenje zadatka iz MFL 2018./2019. na str. 43.**

*Dokaži da sustav jednadžbi*

$$x + y = z^2$$

$$xy = \frac{z^4 - z}{3}$$

*nema nijedno rješenje u skupu pozitivnih cijelih brojeva.*

*Rješenje.* Pretpostavimo da sustav ima rješenje $x, y, z \in \mathbb{N}$. Imamo

$$z^4 = (x+y)^2 \geqslant 4xy = \frac{4}{3}(z^4 - z)$$

odakle je $4z \geqslant z^4$. Kako je $z > 0$ slijedi $z^3 \leqslant 4$. Jedina mogućnost je $z = 1$, no tada je $xy = 0$, što nije moguće prema uvjetu zadatka. Time smo dokazali tvrdnju zadatka.

*Oliver Kukas (3), Zabok*

## D) Rješenja iz fizike

**OŠ – 442.** *Bungee jumping skakač mase 90 kilograma skače s mosta visokog 50 metara. Duljina užeta za skok se prilagođava težini svakog skakača. Uže je elastično i zaustavlja skakača na visini 2 metra od vode. Njegova je konstanta elastičnosti 30 $N/m$. Koliko je to uže dugačko u neopterećenom stanju?*

*Rješenje.*

$$m = 90 \text{ kg}$$

$$h_1 = 50 \text{ m}$$

$$h' = 2 \text{ m}$$

$$\underline{k = 30 \text{ N/m}}$$

$$l_0 = ?$$

$$F = G = m \cdot g = 90 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 900 \text{ N}$$

$$l_0 + \Delta l = h_1 - h' = 48 \text{ m}$$

$$l_0 = 48 \text{ m} - \Delta l$$

$$\Delta l = \frac{F}{k}$$

$$l_0 = 48 \text{ m} - \frac{F}{\Delta l} = 48 \text{ m} - \frac{900 \text{ N}}{30 \text{ N/m}}$$

$$= 48 \text{ m} - 30 \text{ m} = 18 \text{ m}.$$

*Elena Mavretić (8),*
*OŠ Mate Lovraka, Zagreb*

**OŠ – 443.** *Učenik je vukao drveni kvadar mase 300 grama silom od 0.9 njutna. Kad je na njega zavezao kvadar iste mase utvrdio je da tako spojene kvadre može vući silom od 2.3 njutna. Koliko iznosi koeficijent trenja za prvi, a koliko za drugi kvadar?*

*Rješenje.*

$$m_1 = m_2 = 300 \text{ g} = 0.3 \text{ kg}$$

$$F_1 = 0.9 \text{ N}$$

$$\underline{F_2 = 2.3 \text{ N}}$$

$$\mu_1, \quad \mu_2 = ?$$

$$\mu_1 = \frac{F_1}{G_1}$$

$$G_1 = G_2 = G$$

$$G = m \cdot g = 0.3 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 3 \text{ N}$$

$$\mu_1 = \frac{0.9 \text{ N}}{3 \text{ N}} = 0.3$$

$$\mu_2 = \frac{F_2 - F_1}{G} = \frac{1.4 \text{ N}}{3 \text{ N}} = 0.47.$$

*Luka Raguž (8),*
*OŠ Horvati, Zagreb*

**OŠ – 444.** *Verona Rupes je najviša litica u Sunčevom sustavu i nalazi se na Uranovom mjesecu Mirandi. Visoka je oko 20 kilometara. Pad s nje bi trajao 11.86 minuta jer je ubrzanje sile teže na Mirandi jako maleno. S koje bi visine na Zemlji tijelo trebalo pasti da u tlo udari istom brzinom koju bi imalo da padne s vrha litice Verona Rupes?*

*Rješenje.*

$$h_M = 20 \text{ km} = s = 20\,000 \text{ m}$$

$$\underline{t_M = 11.86 \text{ min} = 711.6 \text{ s}}$$

$$h_z = ?$$

$$a_M = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 20\ 000 \text{ m}}{(711.6 \text{ s})^2} = 0.079 \text{ m/s}^2$$

$$v_M = a_M \cdot t_M = 0.079 \text{ m/s}^2 \cdot 711.6 \text{ s}$$

$$= 56.2 \text{ m/s} = v_Z$$

$$t_z = \frac{v_z}{g} = \frac{56.2 \text{ m/s}}{9.81 \text{ m/s}^2} = 5.73 \text{ s}$$

$$h_z = \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{9.81 \text{ m/s}^2 \cdot (5.73 \text{ s})^2}{2} = 161 \text{ m}.$$

*Andrija Adamović (8),*
*OŠ Mate Lovraka, Zagreb*

**OŠ – 445.** *Vaza u obliku kvadra je napravljena od stakla. Baza joj je kvadrat kojemu je stranica dugačka 10, a visina 30 centimetara. Debljina baze je 1 centimetar, a bočne su strane dvostruko tanje. Kolika je masa vaze? Gustoća stakla je* $2500\ kg/m^3$.

*Rješenje.*

$a = 10$ cm

$h = 30$ cm

$a' = 9$ cm

$h' = 29$ cm

$\underline{\rho = 2500 \text{ kg/ m}^3 = 2.5 \text{ g/cm}^3}$

$m = ?$

$m = \rho \cdot V$

$V = V_{\text{vanjski}} - V_{\text{unutarnji}} = a \cdot a \cdot h - a' \cdot a' \cdot h'$

$= 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} - 9 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} \cdot 29 \text{ cm}$

$= 3000 \text{ cm}^3 - 2349 \text{ cm}^3 = 651 \text{ cm}^3$

$m = 651 \text{ cm}^3 \cdot 2.5 \text{ g/cm}^3 = 1627.5 \text{ g}$

$= 1.6275$ kg.

*Filip Vučić (8),*
*OŠ Trnsko, Zagreb*

**1679.** *Na kojoj visini znad površine Zemlje treba kružiti satelit ako želimo da mu ophodno vrijeme iznosi točno dva sata? Uzmimo da je Zemlja kugla radijusa 6371 km i mase* $6 \cdot 10^{24}$ *kg.*

*Rješenje.* Omjer kuba radijusa kruženja i kvadrata ophodnog vremena ovisi samo o masi Zemlje, prema trećem Keplerovom zakonu:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_Z}{4\pi^2}.$$

Uvrštavanjem $T = 7200$ s, $G = 6674 \cdot 10^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$ i $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg dobivamo:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = 8\,071\,376 \text{ m}.$$

Odatle je visina kruženja $h = r - R_Z = 8\,071\,376 - 6\,371\,000 = 1\,700\,376$ m, dakle satelit treba kružiti na visini 1700 km nad površinom Zemlje.

*Borna Cesarec (1),*
*Srednja škola Krapina, Krapina*

**1680.** *Homogena kugla radijusa R pluta na površini tekućine, tako da je u ravnoteži kad je polovina volumena kugle uronjena u tekućinu. Odredi period malih oscilacija, gore-dolje oko položaja ravnoteže.*

*Rješenje.* Kako je kugla do pola uronjena u vodu, površina presjeka vodene linije je $R^2\pi$. Zamislimo da kuglu uronimo za $\Delta x$ dublje u vodu, dodatan uzgon će iznositi $\Delta F = -\rho_v R^2 \pi \Delta x \cdot g$. Minus označava smjer suprotan od pomaka $\Delta x$, pa je sila oblika $\Delta F = -k\Delta x$, i za period titranja možemo koristiti izraz

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_v R^2 \pi g}}.$$

Masu kugle određuje uvjet da je do pola uronjena u vodu dok je u ravnoteži:

$$m = \rho_v \cdot \frac{2}{3} R^3 \pi,$$

što uvrštavanjem daje $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{3g}}$.

*Ur.*

**1681.** *Element lutecij (Lu), među najrjeđim elementima u prirodi, sadrži dva izotopa, 97.41 %* $^{175}$*Lu i 2.59 %* $^{176}$*Lu. Teži izotop je radioaktivan, s vremenom poluraspada 38 milijardi godina. Odredi koliko će se raspada dogoditi u uzorku s 5 grama lutecija u intervalu od 10 sekundi.*

*Rješenje.* 5 grama lutecija znači množinu od $n = \dfrac{5 \text{ g}}{175 \text{ g/mol}}$. Od toga uzmemo 2.59 % i pomnožimo s Avogadrovim brojem da bi dobili broj radioaktivnih atoma:

$$N = N_A \cdot 0.0259 \cdot \frac{5}{175} = 4.456 \cdot 10^{20} \text{ atoma.}$$

Aktivnost je određena omjerom broja atoma i vremena poluraspada:

$$A = \frac{N \ln 2}{T} = \frac{4.456 \cdot 10^{20} \cdot 0.69315}{38 \cdot 10^9 \cdot 365.25 \cdot 24 \cdot 3600}$$
$$= 257.6 \text{ Bq}.$$

U intervalu 10 sekundi dogodit će se prosječno $10A$ raspada, uz očekivanu statističku devijaciju jednaku $\sqrt{10A}$, dakle

$$\Delta N = 2576 \pm 50 \text{ raspada.}$$

*Ur.*

**1682.** *Halleyev komet giba se po vrlo izduženoj elipsi oko Sunca. U perihelu, najbližoj točki Suncu, udaljenost je 0.586 a.j. (astronomska jedinica), a u ahelu, suprotnoj točki putanje, 35.082 a.j. Koristeći činjenicu da je ophodno vrijeme Zemlje oko Sunca definicija godine, a a.j. definirana kao srednja udaljenost Zemlje od Sunca, odredi period Halleyevog kometa (u godinama), te njegovu brzinu (u odnosu na Sunce) u perihelu i ahelu.*

*Rješenje.* Dvije zadane krajnje udaljenosti od Sunca nam određuju duljinu velike poluosi putanje $a$ i numerički ekscentricitet $\varepsilon$:

$$a = \frac{r_+ + r_-}{2} = 17.834 \text{ a.j.}$$
$$\varepsilon = \frac{r_+ - r_-}{2a} = 0.9671414$$

Iz duljine poluosi lako izračunamo ophodno vrijeme u godinama

$$T = a^{3/2} = 75.314 \text{ godina},$$

a odatle srednju brzinu putanje

$$\bar{v} = \frac{2a\pi}{T} = 1.4505 \text{ a.j./god.}$$

Brzina u perihelu (najveća na putanji) iznosi

$$v_+ = \bar{v} \cdot \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 11.512 \text{ a.j./god} = 54\,572.4 \text{ m/s},$$

a u ahelu (najmanja na putanji)

$$v_- = \bar{v} \cdot \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = 0.1923 \text{ a.j./god} = 911.6 \text{ m/s}.$$

Kao provjeru iskoristimo drugi Keplerov zakon i uvrštavanjem se uvjerimo da je

$$r_+ v_- = r_- v_+.$$

*Ur.*

**1683.** *Odredi indeks loma stakla od kojeg je načinjena plankonveksna leća kojoj je žarišna daljina 82 % veća od radijusa zakrivljenosti.*

*Rješenje.* Žarišnu daljinu određujemo izrazom

$$\frac{1}{f} = J = \frac{n-1}{R},$$

u koji uvrstimo uvjet zadatka $f = 1.82R$. Dobit ćemo

$$n = 1 + \frac{R}{f} = 1 + \frac{1}{1.82} = 1.54945.$$

*Ur.*

**1684.** *Odredi broj atoma u kovanici od dvije kune. Kovanica teži 6.2 grama, a sastav slitine je 65 % bakar, 23.2 % nikal i 11.8 % cink (maseni omjer).*

*Rješenje.* Odredimo množinu sva tri elementa, bakra (Cu), nikla (Ni) i cinka (Zn):

$$n(Cu) = \frac{m}{M} = \frac{0.65 \cdot 6.2}{63.546} = 0.063419 \text{ mol},$$
$$n(Ni) = \frac{0.232 \cdot 6.2}{58.69} = 0.024508 \text{ mol},$$
$$n(Zn) = \frac{0.118 \cdot 6.2}{65.39} = 0.011188 \text{ mol}.$$

Ukupan broj atoma dobijemo tako da zbrojimo množine tvari i pomnožimo s Avogadrovim brojem:

$$N = n \cdot N_A = 0.099115 \cdot 6.022 \cdot 10^{23}$$
$$= 5.9687 \cdot 10^{22} \text{ atoma}.$$

*Ur.*

**1685.** *Od stakla gustoće* 2500 $kg/m^3$ *načinjena je šuplja kugla debljine stakla 1 cm, vanjskog promjera 20 cm. Kolika je površina presjeka s vodenom plohom, ako kugla pluta na morskoj vodi, gustoće* 1030 $kg/m^3$ *? Masu zraka zanemarujemo.*

*Rješenje.* Dok kugla pluta na vodi, težina stakla je uravnotežena uzgonom istisnutog volumena vode, $V$.

$$m = \rho_{stakla} \cdot \frac{4}{3}\pi(10^3 - 9^3) = 2.8379 \text{ kg}.$$

Volumen istisnute vode iznosi

$$V = \frac{mg}{\rho_{vode} g} = 275.52 \text{ cm}^3.$$

Volumen sfernog odsječka (kalote) možemo izraziti pomoću radijusa $R = 10$ cm i visine $h$:

$$275.52 = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h).$$

Odatle je $h = 3.129$ cm, pa za presjek s vodenom plohom dobivamo krug radijusa

$$r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = 7.2656 \text{ cm}.$$

Površina kruga je

$$S = r^2 \pi = 165.8 \text{ cm}^2.$$

*Ur.*