

## Sudoku – napredne metode rješavanja (7.3)

Žarko Čulić<sup>1</sup>

Nastavljamo s naprednim metodama koje se rjeđe koriste. U ovom nastavku ćemo istražiti *petlje konjugiranih parova* (*Bilocation Graphs*) i *petlje polja parova* (*Bivalue Graphs*). To su napredne tehnike koje je razvio profesor David Eppstein s Univerziteta u Kaliforniji i koje zapravo pokazuju posebne varijante određenih naprednih metoda koje smo već obradili ili ćemo obraditi u narednim nastavcima.

U *Grafu konjugiranih parova* ručno izrađujemo dijagram polja koja sadrže kandidate smještene u samo dva polja u određenom povezanom retku, stupcu ili kvadratu. Takve parove u metodi bojanja zovemo *konjugirani parovi* (između njih je isključivo *jaka povezanost*), pa se čini logičnim da i njihov hrvatski naziv bude takav. Graf predstavlja ručno iscrtane pune linije iznad polja s konjugiranim parovima i na svakoj liniji je napisan broj tog para.

Postoje dvije varijante:

- *petlja konjugiranih parova bez ponavljanja* (*Nonrepetative Bilocation Cycle*)
- *petlja konjugiranih parova s ponavljanjem* (*Repetitive Bilocation Cycle*)

Postupak izrade *petlje konjugiranih parova bez ponavljanja*:

1. počinjemo u bilo kojem polju i krećemo se od jednog do drugog polja s *konjugiranim parom* (jedinim istim kandidatom u tom retku, stupcu ili kvadratu)
2. u tom novom polju odabiremo drugog kandidata i povezujemo ga s *konjugiranim parom* u novom polju
3. postupak ponavljamo dok se ne vratimo na početno polje i ako smo to uspjeli imamo *petlju konjugiranih parova bez ponavljanja*

Kao rezultat možemo eliminirati sve ostale kandidate iz pojedinih polja koji ne čine *konjugirane parove*.

Postupak izrade *petlje konjugiranih parova s ponavljanjem*:

1. sve je isto kao i u prethodnom slučaju osim što postoji točno jedno polje (tzv. čvor u petlji) u koje ulazi i izlazi isti broj *konjugiranog para* i upravo je taj broj rješenje tog polja.

Pogledajmo primjer na slici 1.

Povezujemo polja kandidata koji čine *konjugirane parove*: u retku F povezujemo broj 6 u poljima F1 i F6, u stupcu 6 povezujemo broj 7 u poljima F6 i G6, u retku G povezujemo broj 6 u poljima G6 i G4 te broj 9 u poljima G4 i G1 i konačno u stupcu 1 povezujemo broj 4 u poljima G1 i F1 čime smo dobili zatvorenu petlju s različitim *konjugiranim parovima* u svim čvorovima, odnosno ***petlju konjugiranih parova bez ponavljanja***. U tih 5 polja: F1, F6, G6, G4 i G1 su moguća samo 2 rješenja: 4-6-7-6-9 ili 6-7-6-9-4. Dakle, u G1 su mogući samo brojevi 4 ili 9, tako da možemo eliminirati 5 i 7 iz G1. Vidjet ćemo u kasnijim nastavcima da se ovdje radi zapravo o posebnom slučaju *neprekinute petlje* (*Continuous Nice Loop*) u kojoj su čvorovi povezani *konjugiranim parovima*.

<sup>1</sup> Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5 6	5 6 8	3 9	7	5 6 9	1	2	8 9	4
B	1	7	6 4	2	6 9	8	5	7 9	3
C	5	5 8	2	5 9	3	4	6	1	7 8
D	2	1 3 4	8	5 3 4 5	9	7	6	1 5	
E		1 3 6	3 6	3 5 6	8	2	9	4	1 5
F	4 6 4	9	5	1	4 7 7	6	8	3	2
G	4 5 7	4 5 9	1	6 9	2	6	3	5 8 7 8	
H	3	2 9 7	6	8	1 6 7 9	5	4	7 2	9
I	8	2 5		4		3	1	2 5	6

Slika 1.

Na slici 2 imamo primjer *petlje konjugiranih parova s ponavljanjem*.

Opet povezujemo polja kandidata koji čine *konjugirane parove* (broj na liniji označava broj *konjugiranog para*): broj 2 u poljima A2 i A7, broj 5 između A7 i E7, broj 2 između E7 i E4, broj 1 između E4 i E6, broj 8 između E6 i F6, broj 5 između F6 i F2 te broj 2 između F2 i A2. Dakle dobili smo petlju s neposredno različitim *konjugiranim parovima* osim u polju A2 gdje je i ulazni i izlazni broj 2. Time smo dobili ***petlju konjugiranih parova s ponavljanjem*** i možemo utvrditi da je upravo broj 2 rješenje polja A2.

Analiza: ako broj 2 nije točan u A2, tada mora biti točan u A7 i F2, tada su točni brojevi 5 u E7 i F6, E4 je 2, a E6 je 8. Na taj način smo došli do kontradikcije jer nemamo gdje staviti broj 1 (i E4 i E6 su zauzeti), a to znači da je početna premisa pogrešna i da je upravo broj 2 rješenje polja A2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8	2 5	3	4 7	1	4 7	2 5	6	9
B	5 9	4	2 9	8	6	3	7	2 5	1
C	7	6	1	5	2	9	8	3	4
D	2 3	1	6	2 7	4 2	5 7	9	2 5	8
E	5 9	7	8 9	1	3	1 5	2 5	4	6
F	4	2 5	2 8	6	9	5 8	8	1	7 3
G	2	3	7	5 9	8	6	4	1	5
H	1	9	4	3	5	2	6	8	7
I	6	8	5	1 4	7	1 4	3	9	2

Slika 2.

U ovom primjeru se zapravo radi o posebnom slučaju *petlje s diskontinuitetom* (*Discontinuous Nice Loop*) u kojoj su čvorovi povezani *konjugiranim parovima*, a koju ćemo na drugačiji način obraditi u kasnijim nastavcima.

Na slici 3 imamo primjer **petlje polja parova**. Njih je mnogo lakše pronaći jer je to petlja povezanih polja u kojima se nalaze samo 2 kandidata, a da bi takva petlja bila od pomoći, nužno je bude bez ponavljanja (ulazni i izlazni brojevi u polja petlje moraju biti različiti).

U primjeru se **petlja polja parova** nalazi između polja  $D3 = \{4, 5\}$ ,  $D7 = \{5, 6\}$ ,  $F7 = \{6, 9\}$  i  $F3 = \{9, 4\}$ . Rješenje petlje počinjući od D3 glasi: ili 5-6-9-4 ili 4-5-6-9. U oba slučaja broj 4 je u poljima petlje u stupcu 3, broj 5 je u retku D, broj 6 je u stupcu 7 i broj 9 je u retku F i analogno tome te brojeve možemo eliminirati iz povezanih polja koja nisu u petlji. Konkretno, možemo eliminirati broj 4 iz I3 i DEF1, broj 6 iz A7 i DEF9 te broj 9 iz F1 i F9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5	2	1	7 8	4 7 8	9	6 8	3	4 6 8
B	3	9	8	1 5	6	4	2	7	4 5
C	7	4	6	5 8	2 5	3	1	5 9	5 8 9
D	4 6 8	1	4 5	9	3	4 7 8	5 6	4	7 6
E	4 6 8 9	5 4 8	7	1 2 8	1 6 4 8	1 2 4 8	3 6	2 1 5 6 9	
F	4 6 9	3	4 9	1 7	2 6 4 7	1 5	8 9	8	1 6 7 9
G	1 8	5 8	2	4	9 9	6	7	5	3
H	1 9	7	3 9	1 2 8	3 5	1 2 8	4	6	1 8 9
I	1 4	6	4 5 9	3 7 8	1 3 7 8	1 7 8	5 8 9	1 9	2

Slika 3.

Ako pogledate pažljivije, vidjet ćete da se radi o četiri posebna slučaja jednostavnog **XY-lanca** u 4 ista polja, gdje se početni i završni broj 4 nalazi u stupcu 3 i kvadratu IV, broj 5 u retku D, broj 6 u stupcu 7 i kvadratu VI i broj 9 u retku F.

U sljedećem nastavku počinjemo s obradom kompleksnih lanaca.

Zadatak za vježbu s rješenjem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A				5			2		
B			3	9		8			
C		4				7			9
D			1	5	2				
E	9			3		8			4
F					7	6	3		
G	1			2					6
H			5		3		2		
I		7			8				

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	7	9	6	8	5	3	4	2	1
B	5	1	3	4	9	2	8	7	6
C	2	4	8	1	6	7	5	3	9
D	6	3	1	5	2	4	9	8	7
E	9	2	7	3	1	8	6	5	4
F	8	5	4	9	7	6	3	1	2
G	1	8	9	2	4	5	7	6	3
H	4	6	5	7	3	1	2	9	8
I	3	7	2	6	8	9	1	4	5