Matematika kroz igru domino

Ljerka Jukić*

Sažetak. *Domino pločice nisu namijenjene samo za igru. One se mogu koristiti kao sredstvo za savladavanje raznih matematičkih pojmova i razvoj logičkog mišljenja.*

Ključne riječi: *domino, teorija grafova, magični kvadrati, domino sudoku, šahovska ploča*

Mathematics through the game of dominos

Abstract. *Domino tiles are not made just for play. One can use them as a mean for learning mathematical concepts and developing logical thinking.*

Key words: *domino, graph theory, magic squares, domino sudoku, chessboard*

1. Uvod

Domino pločice pojavile su se u Kini davne 1120. godine. Smatra se da su pločice izvedene iz igraće kocke, koja je u Kinu donešena iz Indije u dalekoj prošlosti. Svaka domino pločica predstavlja jedan od 21 mogućih rezultata dobivenih bacanjem dvije igraće kocke. Jedna polovica domino pločice na sebi ima udubljenja koja predstavljaju rezultat dobiven bacanjem prve kocke, a druga ima udubljenja koja predstavljaju rezultat dobiven bacanjem druge kocke.

Kineske domino pločice duže su od tradicionalnih europskih pločica. Kineski set domino pločica u sebi sadrži i duplikate nekih bacanja, a to upravo dijeli domino pločice na dva tipa: vojni i civilni. Vojni set ne sadrži duplikate. Civilni set sastoji se od 21 domino pločice, a 11 pločica ima svoje duplikate, pa je ukupan broj pločica 32.

Tijekom 18. stoljeća igra domino stigla je u Europu, pojavivši se najprije u Italiji. Originalna kineska igra domino izmijenjena je i upravo se u tom izmijenjenom obliku zadržala do danas. Europski set domino pločica ne sadrži duplikate, ali sadrži sedam dodatnih pločica. Šest dodatnih pločica izgledaju tako da jedna polovica predstavlja rezultat bacanja jedne kockice, a druga polovica je prazna. Sedma pločica ima obje polovice prazne.

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, email: `ljukic@mathos.hr`

2. Svojstva domino pločica

Domino pločicu s brojevima m i n označimo s $[m-n]$, a set domino pločica sa svim mogućim parovima vrijednosti između $[0-0]$ i $[n-n]$ definirajmo s $(n-n)$. Prazna polovica domino pločice predstavlja 0. Tradicionalni setovi su $(6-6)$, $(9-9)$, i $(12-12)$. Broj pločica u setu $(n-n)$ može se izračunati prema formuli $\frac{n^2+3n+2}{2}$.

Vrsta seta	Broj pločica
$(0-0)$	1
$(1-1)$	3
$(2-2$	6
$(3-3)$	10
$(4-4)$	15
$(5-5)$	21
$(6-6)$	28
$(7-7)$	36
$(8-8)$	45

Svaki broj k takav da je $0 \leq k \leq n$, u setu $(n-n)$ pojavit će se $n+2$ puta na pločicama. Ovo svojstvo je važno igraču koji želi blokirati drugog igrača: brzim prebrojavanjem igrač može utvrditi koliko se puta pojavio neki broj u igri. Ako je broj pojavljivanja nekog broja jednak $n+2$, tada niti jedan igrač nema par za taj broj.

2.1. Grafovi

Ako imamo set $(n-n)$ domino pločica, možemo li napraviti jednostavnu ravnu vrpcu? Jednostavnu ravnu vrpcu čine domine poredane tako da susjedni krajevi pločica imaju isti broj. Iznimka su rubne domino pločice kod kojih je jedna polovica pločice slobodna.

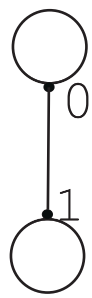
Možemo li set domino pločica poslagati u kružnu vrpcu? Kružna vrpca je zapravo zatvorena vrpca kod koje se krajevi prve i zadnje pločice podudaraju. Ako možemo napraviti kružnu vrpcu, očito je da se ona na bilo kojem mjestu može prekinuti i dati ravnu vrpcu.

Korištenjem seta $(0-0)$ moguće je napraviti ravnu vrpcu koju čini sama ta pločica. Međutim, ne možemo napraviti kružnu vrpcu jer se jedna domino pločica ne može saviti tako da joj se krajevi dotiču.

Pogledajmo set $(1-1)$ domino pločica. On se sastoji od pločica $[0-0], [0-1]$ i $[1-1]$. Pločice u danom poretku čine jednostavnu vrpcu, ali ni kojem poretku ne mogu činiti kružnu vrpcu.

Kako se vrijednost n povećava, tako raste i broj pločica u domino setu $(n-n)$. Metodom pokušaja i pogrešaka nećemo jednostavno doći do odgovora na gornja pitanja. Umjesto toga, promotrimo pristup preko teorije grafova.

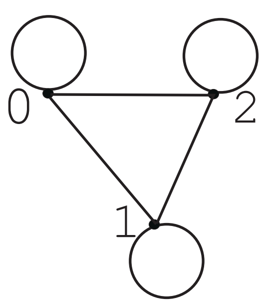
Graf je matematička struktura koju čine bridovi i vrhovi. Broj bridova koji izlazi iz nekog vrha je stupanj tog vrha. Neka vrhovi predstavljaju brojeve od 0 do n, a bridovi među njima neka predstavljaju domino pločice u setu $(n-n)$. Domino pločicu s dvostrukim brojem npr. pločicu $[1-1]$ prikazujemo kao petlju. Ovakvi grafovi imat će onoliko bridova koliko ima domino pločica u nekom setu $(n - n)$.



Slika 2.1. *Set* $(1-1)$

Pogledajmo primjer grafa za set $(1 - 1)$. Brid koji ide od 0 do 1 odgovara $[0 - 1]$ domino pločici. Broj načina na koji tri domino pločice iz seta $(1 - 1)$ možemo posložiti u vrpcu jednak je broju putova kojima ovaj graf možemo obići tako da svakim bridom prođemo samo jednom. Jednostavno možemo uočiti da postoje samo dva takva puta, $(0 \to 0 \to 1 \to 1)$ i $(1 \to 1 \to 0 \to 0)$.

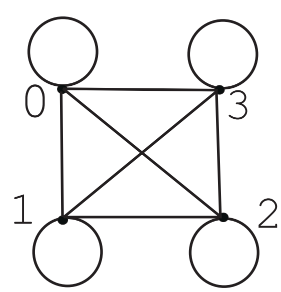
Problem pronalaženja jednostavne vrpce za dani set domino pločica možemo pretvoriti u problem obilaska grafa tj. pronalaženja puta u grafu koji preko svih bridova prolazi točno jednom. Problem kružne vrpce postaje problem pronalaženja puta u grafu koji preko svih bridova prolazi točno jednom i vraća se u vrh iz kojega je krenuo.
Problem obilaska grafova i pronalaženja puta u grafu razmatrao je Leonhard Euler prije nekoliko stotina godina u analizi problema kako obići sedam mostova grada Königsberga, a da se preko svakog mosta prijeđe točno jednom: Ako su svi vrhovi parnog stupnja ili postoje točno dva vrha s neparnim stupnjem, tada je u grafu moguće naći put koji svakim bridom prelazi samo jednom. U prvom slučaju put je uvijek zatvoren: završava u vrhu iz kojega je počeo. U drugom slučaju put mora započeti u vrhu neparnog stupnja i završiti u drugom vrhu neparnog stupnja.



Slika 2.2. *Set* $(2-2)$

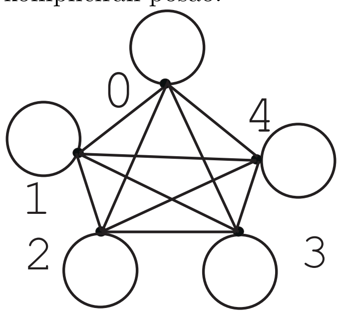
Pogledajmo graf izgrađen od $(2-2)$ domino seta u kojem se nalazi 6 domino pločica. Moguće je izgraditi kružnu vrpcu koja se na šest mjesta može prekinuti i formirati ravnu vrpcu. Dakle, postoji šest načina na koji možemo dobiti ravnu vrpcu, odnosno 12 ako brojimo i obrnute smjerove.

Od $(3-3)$ domino seta ne može se napraviti niti ravna vrpca niti kružna vrpca jer su svi čvorovi stupnja 5.
U grafu ovog domino seta ne postoji put kojim bi mogli obići sve vrhove, a da svakim bridom prođemo točno jednom.



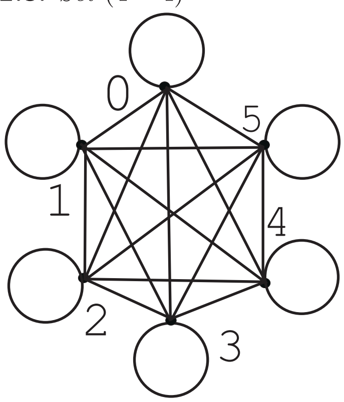
Slika 2.3. *Set* $(3-3)$

Graf s pet vrhova, međusobno povezanih bridovima odgovara $(4-4)$ domino setu koji ima 15 domino pločica. Takav graf ima oblik pentagrama. Kako su svi vrhovi parnog stupnja, možemo naći jednostavan zatvoreni put. Takav put daje nam kružnu vrpcu. Određivanje broja takvih putova tj. kružnih vrpci relativno je kompliciran posao.



Slika 2.3. *Set* $(4-4)$

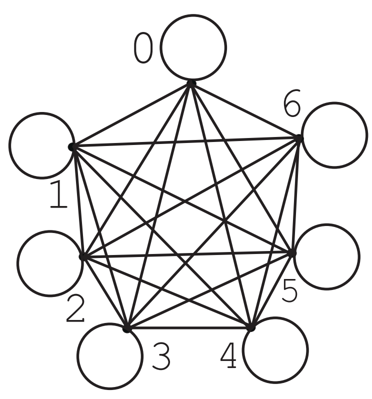
Graf u obliku pentagrama, bez povratnih bridova (koji počinju u i završavaju u istom čvoru) može se obići na 264 načina. Pet domino pločica koje imaju isti broj na oba kraja mogu se u kružnu vrpcu umetnuti na $2^5 = 32$ načina, dajući $264 \times 32 = 8\,448$ kružnih vrpci. Svaka se kružna vrpca na 15 mjesta može prekinuti u ravnu vrpcu pa možemo dobiti $8\,448 \times 15 = 126\,720$ različitih ravnih vrpci uključujući i obratne.



Slika 2.4. *Set* $(5-5)$

Domino set $(5-5)$ daje nam graf u obliku heksagona. Svi vrhovi su neparnog stupnja, pa kao i kod $(3-3)$ domino seta ne možemo napraviti ravnu vrpcu.

Graf u obliku heptagona daje nam $(6-6)$ domino set. Možemo napraviti ravnu vrpcu jer su svi vrhovi stupnja 8, a broj takvih vrpci je $7\,959\,229\,931\,520$, računajući i obratne.

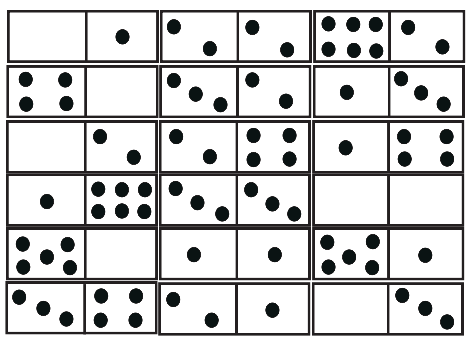


Slika 2.5. *Set* $(6-6)$

Uočimo da će stupanj vrhova grafa $(n-n)$ domino seta uvijek biti $n+2$, pa je vrlo jednostavno odgovoriti na pitanje može li se nekim domino setom napraviti kružna ili jednostavna ravna vrpca. Ako je n paran, tada postoji kružna vrpca za taj domino set, a ako je n neparan nemoguće je napraviti bilo kakvu vrpcu.

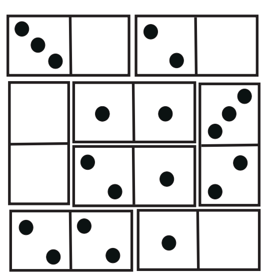
3. Magični kvadrati

Domino pločicama možemo formirati i magične kvadrate. Za kvadrat kažemo da je magični ako je suma elemenata u svakom retku, u svakom stupcu i na dvjema dijagonalama jednaka. Korištenjem $(6-6)$ domino seta, tj. seta koji ima 28 pločica moguće je formirati magične kvadrate samo parnog reda. Magični kvadrat neparnog reda ima neparan broj elemenata u svakom retku i stupcu, pa ga nije moguće formirati ikojim domino setom.
Da bi formirali magični kvadrat reda 6 potrebno nam je 18 domino pločica. Najmanja moguća suma u retku, stupcu i dvjema dijagonalama je 13, a najveća moguća 23. Magični kvadrat reda 6 s najmanjom konstantom 13 može se na jednostavan način preoblikovati u magični kvadrat s najvećom konstantom 23. Svaki se broj na domino pločici zamijeni brojem koji dobijemo kada od broja 6 oduzmemo taj broj. Za takva dva magična kvadrata kažemo da su komplementarni u odnosu na 6.



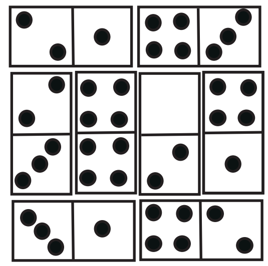
Slika 3.1. *Magični kvadrat reda* 6

Pogledajmo sada magični kvadrat reda 4. Da bi njega mogli formirati potrebno nam je 8 domino pločica. Najmanja i najveća moguća suma elemenata u retku, stupcu i dijagonalama su 5 i 19. Zamijenimo li broj s domino pločice brojem koji dobijemo kada od broja 6 oduzmemo taj broj, jednostavno preoblikujemo magični kvadrat reda 4 s konstantom 5 u magični kvadrat reda 4 s konstantom 19.



Slika 3.2. *Magični kvadrat reda* 4

Zadatak 1. *Pronađite kombinaciju domino pločica koja daje magični kvadrat reda* 4*, a suma elemenata u retku, stupcu i dvjema dijagonalama je točno* 10*?*
Rješenje: Jedno od rješenja dano je slikom 3.3.



Slika 3.3. *Magični kvadrat reda* 4

Pitanje je može li se konstruirati magični kvadrat reda 2? Takav kvadrat nije moguće konstruirati jer, i kad bi odbacili zahtjev da suma elemenata na dijagonalama mora biti jednaka sumi svakog retka i stupca, domino pločice bi morale biti jednake, a u domino setu nema duplikata.

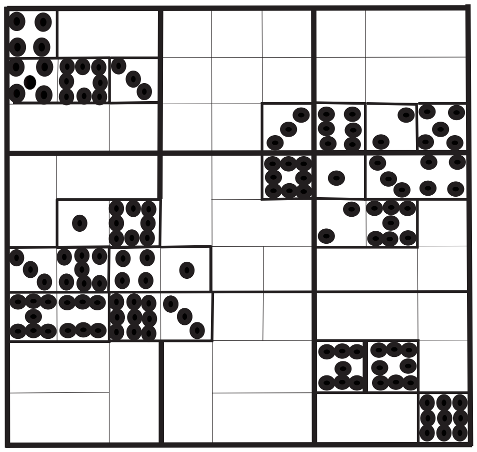
4. Domino sudoku

Latinski kvadrat reda n je matrica tipa $n \times n$ popunjena s n simbola tako da se nikoji simbol unutar matrice ne pojavi dva puta u istom retku ili stupcu. Takvi kvadrati potječu još iz razdoblja Srednjeg vijeka. Poznati matematičar Leonhard Euler proučavao je takve kvadrate i upravo ih je on nazvao latinskim kvadratima.

U današnje vrijeme vrlo je popularna igra koja se zasniva isključivo na logičkom zaključivanju, a zove se sudoku. Sudoku je oblik latinskog kvadrata reda 9. Kvadratna mreža 9×9 izgrađena je od 9 kvadrata, a svaki kvadrat ima 9 kvadratnih polja. Neka kvadratna polja sadrže upisane brojeve, a cilj ove igre je popuniti prazna polja u kvadratnoj mreži brojevima od 1 do 9, tako da se svaki broj u retku, stupcu, i unutar podkvadrata pojavi točno jednom.

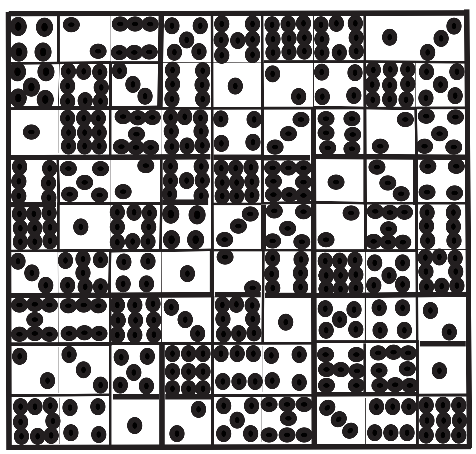
Sudoku možemo rješavati i primjenom domino pločica, uz malo modificirana pravila. Dopušteno je lomljenje pločica.

Primjer 1. *Riješimo dani sudoku tako da domino pločice naznačene na slici* 4.1. *razmjestimo na odgovarajuća mjesta u kvadratnoj mreži.*



Slika 4.1. *Domino sudoku*

Ukoliko su u mreži iscrtani rubovi domino pločica, tada postoji samo jedno rješenje. Više rješenja možemo dobiti ako rubovi pločica nisu naznačeni. Rješenje ovog problema prikazano je na slici 4.2.



Slika 4.2. *Rješenje*

5. Domino logika

Sljedeću igru može igrati više od dva igrača istovremeno. Dok se dio igrača nalazi izvan prostorije, jedan igrač promiješa 28 domino pločica (domino set $(6-6)$) okrenutih tako da im se ne vide brojevi (udubljenja), i posloži ih, recimo, u proizvoljan 7×8 pravokutnik. Zatim domino pločice okrene prema gore, i na jedan papir prenese njihove brojeve u pravokutnu mrežu, ne unoseći domino uzorak tj. bridove domino pločica, a na drugi papir prenese brojeve zajedno s bridovima domino pločica. Drugi papir može poslužiti kao dokaz da dani uzorak brojeva postoji. Preostali igrači trebaju naći bridove domina u mreži tako da bude jasno kako su domino pločice posložene. Postoji više od jednog rješenja pa nije nužno naći originalni uzorak, već bilo koji uzorak koji je rješenje danog problema.

Zadatak 2. *Ako je dana mreža kao na slici* 5.1., *kako pronaći neko od mogućih rješenja?*

4	1	3	4	3	5	3	3
5	0	4	1	1	5	0	2
0	1	2	0	2	1	6	2
2	5	1	0	6	4	0	0
5	3	5	6	6	6	5	3
6	4	3	0	2	1	5	6
6	2	3	2	4	1	4	4

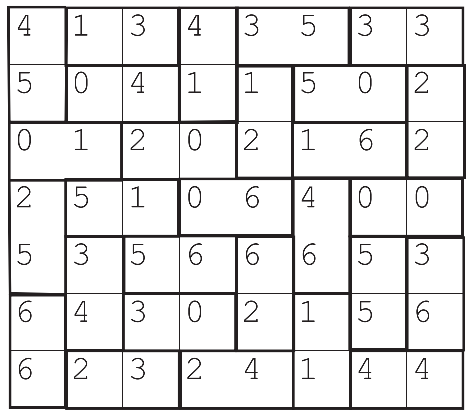
Slika 5.1.

Dobar način je prvo zapisati svih 28 postojećih parova na domino pločicama, i tada tražiti one parove koji mogu biti samo na jednom mjestu. U ovom primjeru parovi $[4-5], [2-2], [3-6]$ i $[4-4]$ moraju biti na istim mjestima kao na slici 5.2.

4	1	3	4	3	5	3	3
5	0	4	1	1	5	0	2
0	1	2	0	2	1	6	2
2	5	1	0	6	4	0	0
5	3	5	6	6	6	5	3
6	4	3	0	2	1	5	6
6	2	3	2	4	1	4	4

Slika 5.2.

Da bismo izbjegli rupe, možemo odmah dodati parove $[0-0]$ i $[3-3]$. Ovako smo se osigurali da se ovi parovi ne mogu pojaviti na nekom drugom mjestu pa u mreži (kao na slici 5.2.) stavimo dvije horizontalne crtice koje označavaju da domino pločica ne može preći niti jednu od te dvije crtice. Par $[2-5]$ može biti postavljen ili horizontalno ili vertikalno pa to označimo iscrtkanom crtom. Dodajmo par $[0-1]$, a zatim nam se otvara mogućnost za smještanje parova $[1-3]$ i $[0-4]$. Nastavljajući dalje na taj način doći ćemo do rješenja. Jedno od četiri moguća rješenja za ovaj problem dan je slikom 5.3.



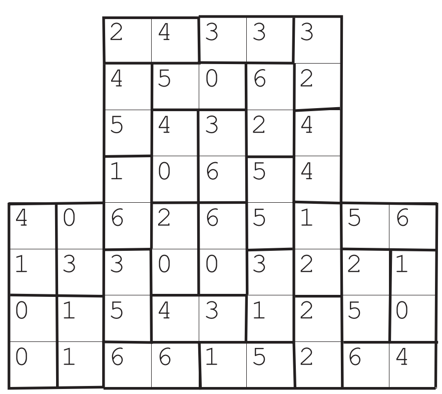
Slika 5.3.

Zadatak 3. *Za danu mrežu, pronađite odgovarajući položaj domino pločica.*

		2	4	3	3	3		
		4	5	0	6	2		
		5	4	3	2	4		
		1	0	6	5	4		
4	0	6	2	6	5	1	5	6
1	3	3	0	0	3	2	2	1
0	1	5	4	3	1	2	5	0
0	1	6	6	1	5	2	6	4

Slika 5.4.

Rješenje:

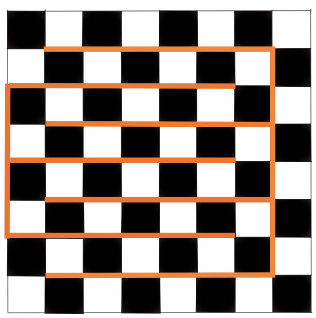


Slika 5.5.

6. "Osakaćena" šahovska ploča

Zadatak 4. *Ako izrežemo suprotne krajeve šahovske ploče, može li se ostatak ploče prekriti domino pločicama?* Šahovska ploča sastoji se od 64 polja: 32 crna i 32 bijela polja. Izrežemo li dva polja koja se nalaze na suprotnim krajevima ploče, ostane 62 polja. Ako pretpostavimo da rješenje ovog problema postoji, potrebna bi nam bila 31 domino pločica. Domino pločicu možemo postaviti vertikalno ili horizontalno, i to tako da pokriva točno dva polja. Bez obzira kako pločicu postavimo na šahovsku ploču, ona uvijek prekriva jedno crno i jedno bijelo polje. "Osakaćena" šahovska ploča ima 32 bijela polja i 30 crnih polja (ili obratno), stoga nikad ne možemo u potpunosti prekriti ploču domino pločicama.
Prekrijmo cijelu šahovsku ploču domino pločicama. Zatimo izrežimo dva kvadrata ispod jedne pločice. Preostali dio ploče bit će pokriven pločicama. Vidimo da u nekim slučajevima "osakaćenu" ploču možemo prekriti.

Zadatak 5. *Sa šahovske ploče izrežimo dva proizvoljna kvadrata različite boje. Može li se preostali dio šahovske ploče prekriti domino pločicama tako da svaka domino pločica prekriva točno dva kvadrata?*
Kako bi vidjeli da je to uvijek moguće pogledajmo sliku 6.1.



Slika 6.1.*Šahovska ploča*

Na njoj su nacrtane dvije "viljuške". One dijele šahovsku ploču u lanac izmjenjujućih crno-bijelih kvadrata. Izrežemo li dva proizvoljna kvadrata različitih boja, jednostavnom metodom pokušaja i pogrešaka možemo se uvjeriti da je lanac mogući obići tako da počnemo od bilo kojeg kvadrata i svaka dva kvadrata prekrivamo domino pločicom.

Literatura

[1] JEAN-PAUL DELAHYE, *The Science Behind Sudoku*, Sci. Amer. 294, 80-87, 2006.

[2] MARTIN GARDNER, *Mathematical Circus*, The Mathematical Association of America, Washington DC, 1992.

[3] http://www.pagat.com/tile/wdom/math.html

[4] http://www.mathematische-basteleien.de/dominos.htm

[5] http://www.nrich.maths.org/public/

[6] http://su.doku.es/2006/12/29/domino-sudoku/

[7] http://www.maa.org/editorial/mathgames