

Nejednakosti s faktorijelima

ILIJA ILIŠEVIĆ*

Sažetak. *Opisane su tehnike kako se mogu dokazati nejednakosti koje sadrže faktorijele. Spomenute tehnike su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka koji su prilagođeni učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *faktorijeli, nejednakosti*

Inequalities with Factorials

Abstract. *The methods for proving inequalities with factorials are described. Those methods are demonstrated on a number of interesting exercises which have been adapted to high school pupils.*

Key words: *factorial, inequalities*

Umnožak svih prirodnih brojeva od 1 do n označava se s $n!$ i čita “ n faktorijel”. Dakle,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Također se definira da je $0! = 1$ i $1! = 1$.

Umnožak prvih n parnih prirodnih brojeva označava se sa $(2n)!!$ i čita “ $2n$ dvostruki faktorijel”, tj.

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n,$$

a umnožak prvih n neparnih prirodnih brojeva se označava sa $(2n-1)!!$ i čita “ $2n-1$ dvostruki faktorijel”, dakle

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1).$$

Također se definira da je $0!! = 1$ i $1!! = 1$. Jasno je da je

$$((2n)!)! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n))! \neq (2n)!!$$

te da je

$$((2n-1)!)! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1))! \neq (2n-1)!!.$$

Riješimo sada nekoliko zadataka o nejednakostima s faktorijelima. Pritom nam je potrebno, poglavito, poznavanje aritmetičko-geometrijske nejednakosti i metode matematičke indukcije.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Zadatak 1. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{2007}{2008!} < 1.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{2007}{2008!} \\ &= \left(\frac{2}{2!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} \right) + \cdots + \left(\frac{2008}{2008!} - \frac{1}{2008!} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2007!} - \frac{1}{2008!} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2008!} < 1. \end{aligned}$$

Zadatak 2. Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi nejednakost

$$\left(2 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{3}{n} \right) \left(2 - \frac{5}{n} \right) \cdots \left(2 - \frac{2n-1}{n} \right) > \frac{1}{n!}.$$

Rješenje. Kako je

$$2 - \frac{2k-1}{n} - \frac{1}{k} = \frac{2nk - 2k^2 + k - n}{nk} = \frac{(2k-1)(n-k)}{nk} \geq 0$$

za $1 \leq k \leq n$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $k = n$, to je

$$2 - \frac{2k-1}{n} \geq \frac{1}{k}$$

(za $k = 1$ vrijedi stroga nejednakost). Uvrštavanjem u ovu nejednakost $k = 1, 2, \dots, n$ dobivamo, redom,

$$2 - \frac{2 \cdot 1 - 1}{n} > \frac{1}{1}, \quad 2 - \frac{2 \cdot 2 - 1}{n} \geq \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad 2 - \frac{2n-1}{n} \geq \frac{1}{n},$$

a odatle

$$\left(2 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{3}{n} \right) \cdots \left(2 - \frac{2n-1}{n} \right) > \frac{1}{n!}.$$

Zadatak 3. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$2^n \cdot n! < (n+1)^n.$$

Rješenje. Dana nejednakost ekvivalentna je sa

$$2 \cdot \sqrt[n]{n!} < n+1, \quad \text{tj. sa} \quad \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}.$$

Dokažimo ovu nejednakost. Kako je prema aritmetičko-geometrijskoj (AG) nejednakosti

$$\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} > \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n},$$

to je

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} > \sqrt[n]{n!}, \quad \text{pa je} \quad \frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}.$$

Zadatak 4. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6} \geq (n!)^{\frac{2}{n}}.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned} (n!)^{\frac{2}{n}} &= \left((1 \cdot 2 \cdots n)^{\frac{1}{n}} \right)^2 \leq \left(\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} \right)^2 \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{n^2 + 2n + 1}{4} = \frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6} - \frac{n^2}{12} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6} - \frac{n^2 - 1}{12} \leq \frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$.

Zadatak 5. Dokažite da za svaki prirodni broj $n \geq 2$ vrijedi nejednakost

$$(n!)^2 \geq n^n.$$

Rješenje. Lijevu stranu nejednakosti napišimo u obliku

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n)^2 \\ &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n) \cdot (n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1) \\ &= (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdots (n \cdot 1). \end{aligned}$$

Sada dokažimo da za $k \in \mathbb{N}$ i $1 \leq k \leq n$ vrijedi $k(n - (k-1)) \geq n$:

$$\begin{aligned} k(n - (k-1)) \geq n &\iff nk - k(k-1) - n \geq 0 \\ \iff n(k-1) - k(k-1) \geq 0 &\iff (n-k)(k-1) \geq 0. \end{aligned}$$

Kako je posljednja nejednakost točna, to je $k(n - (k-1)) \geq n$. Ako u ovu nejednakost uvrstimo $k = 1, 2, 3, \dots, n$ dobivamo, redom, $1 \cdot n \geq n$, $2 \cdot (n-1) \geq n$, $3 \cdot (n-2) \geq n$, \dots , $n \cdot 1 \geq n$, a odatle $(n!)^2 \geq n \cdot n \cdot n \cdots n = n^n$.

Zadatak 6. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$n^n \geq 2^{n-1} \cdot n!.$$

Rješenje. Dana nejednakost ekvivalentna je sa

$$n^{n-1} \geq 2^{n-1} \cdot (n-1)!, \quad \text{tj. sa} \quad (n-1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}.$$

Dokažimo posljednju nejednakost. Za $n = 1$ i $n = 2$ vrijedi jednakost. Za svaki prirodni broj $n \geq 3$ je, prema AG-nejednakosti,

$$\begin{aligned} (n-1)! &= 1 \cdot 2 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \\ &< \left(\frac{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)}{n-1} \right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n-1} \right)^{n-1} = \left(\frac{n}{2} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Zadatak 7. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Rješenje. Nejednakost ćemo dokazati metodom matematičke indukcije. Za $n = 1$ nejednakost vrijedi jer je $1 \geq 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n i dokažimo da vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n+1$, tj. da je $(n+1)! \geq 2^n$. Kako je $n+1 \geq 2$, to je

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \geq 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n .

Zadatak 8. Dokažite da za svaki prirodni broj $n \geq 6$ vrijedi nejednakost

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Rješenje. Za $n = 6$ tvrdnja vrijedi jer je $6! = 720 < 729 = \left(\frac{6}{2}\right)^6$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj $n \geq 6$ i dokažimo da vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n+1$ tj. da je

$$(n+1)! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}. \quad (1)$$

Nejednakost (1) ćemo dokazati ako dokažemo da vrijedi

$$(n+1) \left(\frac{n}{2}\right)^n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}, \quad (2)$$

jer iz induktivne pretpostavke $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ i nejednakosti (2) slijedi (1).

Pretpostavimo da nejednakost (2) nije točna, tj. da za neki prirodni broj $n \geq 6$ vrijedi

$$(n+1) \left(\frac{n}{2}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}. \quad (3)$$

Imamo

$$\begin{aligned} (3) &\iff \frac{n^n}{2^n} \cdot (n+1) \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \iff 2n^n \geq (n+1)^n \\ &\iff 2n^n \geq n^n + \binom{n}{1}n^{n-1} + \binom{n}{2}n^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}n + 1 \\ &\iff 0 \geq \binom{n}{2}n^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}n + 1. \end{aligned}$$

Kako posljednja nejednakost ne vrijedi ni za jedan prirodni broj $n \geq 6$, to je (2) dokazano, a s tim i (1).

Zadatak 9. Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi nejednakost

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Rješenje. Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi jer je $\frac{4^2}{3} = \frac{16}{3} < 6 = \frac{4!}{(2!)^2}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj $n \geq 2$ i dokažimo da vrijedi i za sljedeći prirodan broj $n+1$ tj. da je

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} < \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} \frac{4^{n+1}}{n+2} &= \frac{4^n \cdot 4(n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{4^n}{n+1} \cdot \frac{(2n+2) \cdot 2}{n+2} \\ &< \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+2) \cdot 2}{n+2} = \frac{(2n)! \cdot (2n+2) \cdot 2 \cdot (2n+1)}{(n!)^2 \cdot (n+2) \cdot (2n+1)} \\ &= \frac{(2n+2)! \cdot 2}{(n!)^2 \cdot (2n^2 + 5n + 2)} < \frac{(2n+2)! \cdot 2}{(n!)^2 \cdot (2n^2 + 4n + 2)} \\ &= \frac{(2n+2)! \cdot 2}{(n!)^2 \cdot 2 \cdot (n+1)^2} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}. \end{aligned}$$

Zadatak 10. Dokažite da za sve nenegativne cijele brojeve p i q vrijedi nejednakost

$$p! \cdot (2q)! \leq 2^{2q} \cdot q! \cdot (p+q)!.$$

Rješenje. Nejednakost ćemo dokazati matematičkom indukcijom po q .

Za $q = 0$ tvrdnja vrijedi jer je $p! \leq p!$.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $q \in \mathbb{N}_0$ i dokažimo da vrijedi i za $q + 1$, tj. da je

$$p! \cdot (2(q+1))! \leq 2^{2(q+1)} \cdot (q+1)! \cdot (p+q+1)!.$$

Kako je

$$\begin{aligned} p! \cdot (2(q+1))! &= p! \cdot (2q)! \cdot (2q+1) \cdot (2q+2) \\ &\leq 2^{2q} \cdot q! \cdot (p+q)! \cdot (2q+1) \cdot (2q+2) \\ &\leq 2^{2q} \cdot q! \cdot (p+q)! \cdot (2q+2p+2) \cdot (2q+2) \\ &= 2^{2q+2} \cdot q! \cdot (p+q)! \cdot (p+q+1) \cdot (q+1) \\ &= 2^{2q+2} \cdot (q+1)! \cdot (p+q+1)!, \end{aligned}$$

to nejednakost vrijedi i za $q + 1$ (i za proizvoljan $p \in \mathbb{N}_0$). Prema tome, dokazali smo da tvrdnja vrijedi za bilo koje brojeve $p, q \in \mathbb{N}_0$.

Zadatak 11. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Rješenje. Označimo li lijevu stranu nejednakosti sa x , imamo

$$x = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n},$$

pa je

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} \\ &< \frac{1^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{4^2-1} \cdot \frac{5^2}{6^2-1} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2-1} \\ &= \frac{1^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5^2}{5 \cdot 7} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$x < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Zadaci za vježbu

1. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2.$$

2. Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 4$ vrijedi nejednakost

$$n! \geq 2^n.$$

3. Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 3$ vrijedi nejednakost

$$n! < n^{n-1}.$$

4. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$n^n \geq 2^{n-1} \cdot n!.$$

5. Dokažite da za svaki prirodan broj $n > 1$ vrijedi nejednakost

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! > ((n+1)!)^n.$$

6. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!.$$

7. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$(3n)! > n^{3n}.$$

Literatura

- [1] I. BUŠEK, *Rešene maturitni ułohy z matematiky*, Statni pedagogicke nakladatelstvi, Praha, 1985.
- [2] B. STOJANOVIĆ, *Zbirka zadataka iz matematike*, Svjetlost, Sarajevo, 1985.
- [3] M. P. VASIĆ, R. R. JANIĆ, O. MITRINOVIĆ, Đ. D. TOŠIĆ, *Matematički priručnik za takmičenja srednjoškoolaca i prijemne ispite na fakultetima*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.
- [4] M. ŽELJKO, *Rešene naloge iz matematike z državnih in izbirnih tekmovanj - IV.del*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1996.

