STUDENTSKA RUBRIKA

Hornerov algoritam i primjene

ZORAN TOMLJANOVIĆ*

Sažetak. *U ovom članku obrađuje se Hornerov algoritam za efikasno računanje vrijednosti polinoma u točki. Hornerov algoritam može se lako proširiti do algoritma koji daje Taylorov razvoj polinoma u okolini dane točke. Također, dani su i ilustrativni primjeri i primjene ovog algoritma.*

Ključne riječi: *Hornerov algoritam, potpuni Hornerov algoritam, polinom*

Horner's algorithm and applications

Abstract. *In this paper we study Horner's algorithm which is efficient for calculating value of a polynom at a given point. Horner's algorithm we can easily expand to the algorithm with which we can obtain Taylor's expansion around given point. Also, this paper includes illustrative examples and applications of this algorithm.*

Key words: *Horner's algorithm, complete Horner's algorithm, polynom*

1. Hornerov algoritam

Problemi vezani uz polinome česti su u matematici pa je vrlo važno imati metode kojima možemo efikasno manipulirati polinomima. Hornerov algoritam omogućava nam dijeljenje polinoma s polinomom prvog stupnja, što se može iskoristiti kod drugih problema poput efikasnog izračunavanja vrijednosti polinoma u točki. Također, vrlo se često koristi u numeričkoj matematici.

Neka je dan polinom n-tog stupnja ($n \in \mathbb{N}$)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{1}$$

nad skupom realnih brojeva $\mathbb{R}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

*Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, `ztomljan@mathos.hr`

Najprije ćemo razmotriti problem dijeljenja polinoma $P_n(x)$ s polinomom $g(x) = x - \alpha$. Prema teoremu o dijeljenju polinoma s ostatkom postoji polinom $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ i konstanta $r \in \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$P_n(x) = (x - \alpha)\, q(x) + r. \tag{2}$$

U cilju određivanja koeficijenata polinoma q i ostatka r uvrstimo (1) u (2). Tada imamo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x-\alpha)\,(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + r.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobivamo jednostavan sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}
a_n &= b_{n-1}, \\
a_{n-1} &= b_{n-2} - \alpha\, b_{n-1}, \\
a_{n-2} &= b_{n-3} - \alpha\, b_{n-2}, \\
&\cdots \\
a_1 &= b_0 - \alpha\, b_1, \\
a_0 &= r - \alpha\, b_0,
\end{aligned}$$

iz kojih sukcesivno računamo koeficijente polinoma q i koeficijent r. To su formule na kojima se temelji Hornerov[1] algoritam (Hornerova shema):

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n, \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + \alpha\, b_{n-1}, \\
b_{n-3} &= a_{n-2} + \alpha\, b_{n-2}, \\
&\cdots \\
b_0 &= a_1 + \alpha\, b_1, \\
r &= a_0 + \alpha\, b_0.
\end{aligned}$$

Algoritam 1. (Hornerov algoritam)

Ulaz: n stupanj polinoma, α
$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ koeficijenti polinoma P_n
Izlaz: $(b_{n-2}, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0)$ koeficijenti polinoma q i konstanta r.
$b_{n-1} = a_n$
for $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ **do**
  $b_{i-1} = a_i + \alpha b_{i+1}$
end for
$r = a_0 + \alpha\, b_0.$

Hornerov algoritam možemo zapisati kao u Tablici 1.. U prvi stupac upišemo α, a u prvi redak upišemo koeficijente polinoma P_n. Koeficijente polinoma q i ostatak r dobijemo iz Hornerovog algoritma.

[1] William George Horner (1786.-1837), engleski matematičar

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
α	$\underbrace{a_n}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{a_{n-1}+\alpha\, b_{n-1}}_{b_{n-2}}$	$\underbrace{a_{n-2}+\alpha\, b_{n-2}}_{b_{n-3}}$	$\cdots$	$\underbrace{a_1+\alpha\, b_1}_{b_0}$	$\underbrace{a_0+\alpha\, b_0}_{r}$

Tablica 1: Hornerov algoritam

Primjer 1. *Hornerovim algoritmom treba podijeliti polinom* $P_6(x) = 2x^6 + 7x^5 + 3x^4 + 2x^2 - 2x + 1$ *polinomom* $g(x) = x + 3$. Primijenit ćemo Hornerov algoritam koristeći tablicu.

	2	7	3	0	2	-2	1
-3	$2=$ 2	$7-3\cdot 2=$ 1	$3-3\cdot 1=$ 0	$0-3\cdot 0=$ 0	$2-3\cdot 0=$ 2	$-2-3\cdot 2=$ -8	$1+3\cdot 8=$ 25

Dobivamo kvocijent $q(x) = 2x^5 + x^4 + 2x - 8$ i ostatak pri dijeljenju $r = 25$. Tu činjenicu možemo zapisati u obliku

$$\frac{P_n(x)}{x+3} = 2x^5 + x^4 + 2x - 8 + \frac{25}{x+3}.$$

Hornerov algoritam jednostavno se može modificirati za izračunavanje vrijednosti $P_n(\alpha)$ polinoma P_n u točki α. Iz jednakosti $P_n(x) = (x-\alpha)\,q(x) + r$ za $x = \alpha$ dobivamo $P_n(\alpha) = r$, što znači da je ostatak pri dijeljenju polinoma P_n sa polinomom $(x-\alpha)$ jednak $P_n(\alpha)$. Dakle, ako primjenimo Hornerov algoritam za djeljenje s $(x-\alpha)$, onda nam ostatak pri dijeljenju daje vrijednost $P_n(\alpha)$.

Jedna od prednosti ovog načina računanja vrijednosti polinoma P_n u točki α je manji broj operacija. Ako bi vrijednost polinoma $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ računali standardno, to jest $P_n(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0$, trebalo bi nam n zbrajanja i $n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ množenja, dok za Hornerov algoritam trebamo n zbrajanja i samo n množenja. Velika razlika u broju operacija ovaj pristup čini vrlo važnim kod algoritama koji zahtijevaju često računanje funkcije u točki.

Primjedba 1. U numeričkoj matematici često je potrebno efikasno izračunati $P_n(A)$ gdje je P_n polinom dan sa (1), a A je kvadratna matrica. Ovaj pristup može se i tada jednostavno primijeniti, a na taj način bit će značajno smanjen broj matričnog množenja.

Primjer 2. *Koristeći Hornerov algoritam izračunajte* $P_5(5)$ *ako je* $P_5(x) = 2x^5 - 9x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 2x + 5$ Primijenit ćemo Hornerov algoritam za dijeljenje polinoma P_5 s polinomom $(x-5)$.

	2	-9	3	-15	-2	5
5	$2=$ 2	$-9+5\cdot 2=$ 1	$3+5\cdot 1=$ 8	$-15+5\cdot 8=$ 25	$-2+5\cdot 25=$ 123	$5+5\cdot 123=$ 620

Dakle, $P_5(5) = r = 620$.

Hornerov algoritam primjenjuje se u različitim situacijama. Primjerice, možemo ga jednostavno primijeniti ako realni broj zapisan u bazi b želimo zapisati u dekadskoj bazi.
Ako je broj $(a_n a_{n-1} \dots a_0)_b$ zapisan u bazi b tada je broj u dekadskoj bazi jednak $b^n a_n + b^{n-1} a_{n-1} + \cdots + b a_1 + a_0$ što je jednako $P_n(b)$ za $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Primjer 3. *Broj* $(34517)_8$ *zapišimo u dekadskom sustavu.* Da bismo broj $(34517)_8$ zapisali u dekadskom sustavu potrebno je izračunati $3 \cdot 8^4 + 4 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 7$, izračunat ćemo izraz koristeći Hornerov algoritam.

	3	4	5	1	7
8	$3 =$ 3	$4 + 8 \cdot 3 =$ 28	$5 + 8 \cdot 28 =$ 229	$1 + 8 \cdot 229 =$ 1833	$7 + 8 \cdot 1833 =$ 14671

Broj zapisan u dekadskom sustavu iznosi 14671.

2. Potpuni Hornerov algoritam

Hornerov algoritam može se primijeniti za Taylorov razvoj polinoma u okolini točke α. Ako je P_n polinom stupnja n tada je Taylorov razvoj polinoma u okolini točke $\alpha \in \mathbb{R}$ (razvoj polinoma po potencijama $(x - \alpha)$) dan s

$$P_n(x) = t_n(x-\alpha)^n + t_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + t_2(x-\alpha)^2 + t_1(x-\alpha) + t_0,$$

gdje su $t_n, t_{n-1}, \dots, t_1, t_0 \in \mathbb{R}$ koeficijenti Taylorovog razvoja.

Iz prethodne jednakosti vidimo da je koeficijent $t_0 = P_n(\alpha)$, što dobivamo jednom primjenom Hornerovog algoritma i tada slijedi

$$\frac{P_n(x)}{x-\alpha} = t_n(x-\alpha)^{n-1} + t_{n-1}(x-\alpha)^{n-2} + \cdots + t_2(x-\alpha) + t_1 + \frac{t_0}{x-\alpha}. \qquad (3)$$

Time smo dobili t_0 i koeficijente $a'_n, a'_{n-1}, \dots, a'_1, a'_0$ polinoma $P_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a'_1 x + a'_0$ koji je nepotpuni kvocijent pri dijeljenju polinoma P_n s $(x - \alpha)$. S druge strane iz jednakosti (3) polinom $P_{n-1}(x)$ jednak je $t_n(x-\alpha)^{n-1} + t_{n-1}(x-\alpha)^{n-2} + \cdots + t_2(x-\alpha) + t_1$. Analogno vidimo da je $t_1 = P_{n-1}(\alpha)$, stoga da bismo dobili t_1 ponovo moramo primijeniti Hornerov algoritam na polinom $P_{n-1}(x)$. Tako ćemo uzastopnom primjenom Hornerovog algoritma u svakom koraku izračunati sljedeći koeficijent Taylorovg razvoja.

Upravo opisan postupak uzastopne primjene Hornerovog algoritma zapisan je u slijedećem algoritmu.

Algoritam 2. (Potpuni Hornerov algoritam)
Ulaz: n stupanj polinoma, α točka u kojoj računamo razvoj
$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ koeficijenti polinoma P_n
Izlaz: $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ koeficijenti Taylorovog razvoja polinoma P_n i konstanta r.
for $k = 0, 1, \dots, n-1$ **do**
for $i = n-1, n-2, \dots, k$ **do**

$a_i = a_i + \alpha\, a_{i+1}$
end for
end for

Algoritam je implementiran tako da koristi samo jedno polje koeficijenata a_0, a_1, …, a_n. Znači u početnom koraku algoritam primijenimo na koeficijente a_0, a_1, …, a_n i izračunamo t_0. Budući da nam a_0 više ne treba, spremimo t_0 na mjesto a_0, a zatim algoritam primijenimo na $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nakon toga se ista ideja primjenjuje uzastopno.

Potpuni Hornerov algoritam također možemo zapisati u obliku *Tablice 2.* U

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
α	$\underbrace{a_n}_{a'_{n-1}}$	$\underbrace{a_{n-1} + \alpha\, b_{n-1}}_{a'_{n-2}}$	$\underbrace{a_{n-2} + \alpha\, b_{n-2}}_{a'_{n-3}}$	$\cdots$	$\underbrace{a_1 + \alpha\, b_1}_{a'_0}$	$\underbrace{a_0 + \alpha\, b_0}_{t_0}$
α	$\underbrace{a'_{n-1}}_{a''_{n-2}}$	$\underbrace{a'_{n-2} + \alpha\, a'_{n-1}}_{a''_{n-3}}$	$\underbrace{a_{n-2} + \alpha\, a'_{n-2}}_{a''_{n-4}}$	$\cdots$	$\underbrace{a'_0 + \alpha\, a'_0}_{t_1}$	
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$			
α	$\underbrace{a_1^{(n-1)}}_{a_0^{(n)}}$	$\underbrace{a_1^{(n-1)} + \alpha\, a_1^{(n-1)}}_{t_{n-1}}$				
α	$a_0^n = t_n$					

Tablica 2: Potpuni Hornerov algoritam

prvom stupcu upisujemo točku oko koje razvijamo polinom. U prvi redak upisani su koeficijenti funkcije koju razvijamo u Taylorov red, a svaki sljedeći redak u tablici računa se iz prethodnog retka prema Hornerovom algoritmu. Posljednji koeficijent u svakom retku (osim prvog) je koeficijent Taylorovog razvoja.

Znajući koeficijente razvoja polinoma $P_n(x)$ po potencijama $(x - \alpha)$ možemo jednostavno doći do vrijednosti $P'_n(\alpha), P''_n(\alpha), \ldots, P_n^{(n)}(\alpha)$ derivacija polinoma u točki α. Pretpostavimo da je $P_n(x)$ razvijen po potencijama $(x - \alpha)$

$$P_n(x) = t_n(x-\alpha)^n + t_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + t_2(x-\alpha)^2 + t_1(x-\alpha) + t_0.$$

Direktnim računom dobivamo

$$\begin{aligned} P'_n(\alpha) &= 1! \cdot t_1, \\ &\cdots \\ P_n^{(n-1)}(\alpha) &= (n-1)! \cdot t_{n-1}, \\ P_n^{(n)}(\alpha) &= n! \cdot t_n, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$t_k = \frac{P_n^{(k)}(\alpha)}{k!}, \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Potpuni Hornerov algoritam može se sada jednostavno modificirati za izračun derivacije polinoma u danoj točki.

Primjer 4. *Koristeći potpuni Hornerov algoritam treba razviti polinom* $P_5(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x - 1$ *po potencijama* $(x-2)$. Radi lakšeg zapisa koristit ćemo zapis opisan u *Tablici 2.*.

	3	-5	2	-7	1	-1
2	3 3	$-5+2\cdot 3=$ 1	$2+2\cdot 1=$ 4	$-7+2\cdot 4=$ 1	$1+2\cdot 1=$ 3	$-1+2\cdot 3=$ 5
2	3 3	$1+2\cdot 3=$ 7	$4+2\cdot 7=$ 18	$1+2\cdot 18=$ 37	$3+2\cdot 37=$ 77	
2	3 3	$7+2\cdot 3=$ 13	$18+2\cdot 13=$ 44	$37+2\cdot 44=$ 125		
2	3 3	$13+2\cdot 3=$ 19	$44+2\cdot 19=$ 82			
2	3 3	$19+2\cdot 3=$ 25				
2	3					

Kada pogledamo zadnje koeficijente u redcima, dobit ćemo $P_5(x) = 3(x-2)^5 + 25(x-2)^4 + 82(x-2)^3 + 125(x-2)^2 + 77(x-2) + 5$.

Pokažimo još primjenu Hornerovog algoritma za određivanje kratnosti nultočke polinoma. Kažemo da je x_0 nultočka kratnosti k polinoma P_n ako se on može prikazati u obliku $P_n(x) = (x-x_0)^k q(x)$ gdje je q polinom sa svojstvom $q(x_0) \neq 0$. To znači da je polinom P_n djeljiv sa $(x-x_0)^k$, a nije djeljiv sa $(x-x_0)^{k+1}$.

Do kratnosti nultočke možemo doći tako da uzastopno primijenimo Hornerov algoritam na polinom P_n. Kod prve primjene algoritma, ako je ostatak pri dijeljenju 0, imamo $P_n(x) = (x-x_0)\, q_1(x)$. Nakon toga primjenjujemo Hornerov algoritam na $q_1(x)$, ako je ostatak 0, imamo $q_1(x) = (x-x_0)\, q_2(x)$, odnosno $P_n(x) = (x-x_0)^2\, q_2(x)$ itd. Ako je nultočka kratnosti k to znači da ćemo u k-tom koraku imati $P_n(x) = (x-x_0)^k\, q_k(x)$, pri čemu $q_k(x)$ nije djeljiv sa $(x-x_0)$, odnosno ostatak pri dijeljenju je različit od 0. Ovakva uzastopna primjena Hornerovog algoritma odgovara upravo potpunom Hornerovom algoritmu. Stoga, kako bismo odredili kratnost nultočke potrebno je primijeniti Hornerov algoritam na polinom P_n i odrediti koliko je prvih koeficijenata t_k različito od 0.

Primjedba 2. Iz jednakosti (4) slijedi da je $t_k = 0$ ako i samo ako $P_n^{(k)}(\alpha) = 0$. Zato kratnost nultočke možemo odrediti i ako znamo vrijednosti derivacija polinoma u danoj točki.

Primjer 5. *Pokažimo da je* $x = 4$ *nultočka polinoma* $P_5(x) = 2x^5 - 22x^4 + 60x^3 + 112x^2 - 704x + 768$ *i odredite njenu kratnost.* Da provjerimo je li $x = 4$ nultočka polinoma i da provjerimo kratnost nultočke, potrebno je na P_5 primijeniti potpuni Hornerov algoritam za $\alpha = 4$ sve dok su koeficijenti $t_k = 0$.

	2	-22	60	112	-704	768
4	2 2	$-22+4\cdot 2=$ -14	$60-4\cdot 14=$ 4	$112+4\cdot 4=$ 128	$-704+4\cdot 128=$ -192	$768-4\cdot 192=$ 0
4	2 2	$-14+4\cdot 2=$ -6	$4-4\cdot 6=$ -20	$128-4\cdot 20=$ 48	$-192+4\cdot 48=$ 0	
4	2 2	$-6+4\cdot 2=$ 2	$-20+4\cdot 2=$ -12	$48-4\cdot 12=$ 0		
4	2 2	$2+4\cdot 2=$ 10	$-12+4\cdot 10=$ $28\neq 0$			

Iz tablice vidimo da je $t_0 = t_1 = t_2 = 0$ i $t_3 \neq 0$ što znači da je $x = 4$ nultočka kratnosti 3. Štoviše, iz četvrtog retka možemo očitati da je polinom $P_5(x)$ djeljiv sa $(x-4)^3$ i da vrijedi $P_5(x) = (x-4)^3(2x^2+2x-12)$.

U nekim slučajevima nultočke polinoma možemo odrediti koristeći Hornerov algoritam i slijedeći teorem.

Teorem 1. *Ako normirani polinom s cijelim koeficijentima ima racionalnih nultočaka, one su djeljitelji slobodnog koeficijenta.*

U slučaju kada polinom nije normiran možemo ga supstitucijom svesti na normirani polinom, tj. na polinom sa vodećim koeficijentom 1.

Primjer 6. *Odredimo nultočke polinoma $P_4(x) = x^4+x^3-8x^2-2x+12$.* Prema *Osnovnom teoremu algebre* ovaj polinom ima 4 nultočke. Potražimo prvo racionalne nultočke, budući da je polinom normiran nultočke tražimo među djeljiteljima broja 12, a to su brojevi: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12.

Izračunajmo Hornerovim algoritmom vrijednost $P_4(2)$.

	1	1	-8	-2	12
2	$1=$ 1	$1+2\cdot 1=$ 3	$-8+2\cdot 3=$ -2	$-2-2\cdot 2=$ -6	$12-2\cdot 6=$ 0

Dakle, $P_4(2) = 0$ i $P_4(x) = (x-2)(x^3+3x^2-2x-6)$. Neka je $P_3(x) = x^3+3x^2-2x-6$. Po prethodnom teoremu racionalne nultočke polinoma $P_3(x)$ se nalaze među brojevima ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Odredimo vrijednost $P_3(-3)$.

	1	3	-2	-6
-3	$1=$ 1	$3-3\cdot 1=$ 0	$-2-3\cdot 0=$ -2	$-6+3\cdot 2=$ 0

Dakle, $P_3(-3) = 0$ i $P_3(x) = (x+3)(x^2-2)$, a nultočke od (x^2-2) su $\pm\sqrt{2}$. Stoga imamo nultočke polinoma $P_4(x)$ i odgovarajuću faktorizaciju $P_4(x) = (x-2)(x+3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

Literatura

[1] N. Elezović, *Matematika 2,* Element, Zagreb, 1999.

[2] N. J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms,* SIAM, Manchester, 1996.

[3] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika 1,* Prehrambeno tehnološki fakultet, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1998.

[4] B. Pavković, D. Veljan,

[5] B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN, *Elementarna matematika 1,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[6] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika,* Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2004.

[7] http://web.math.hr/nastava/ppm1/ppm_rfu.pdf