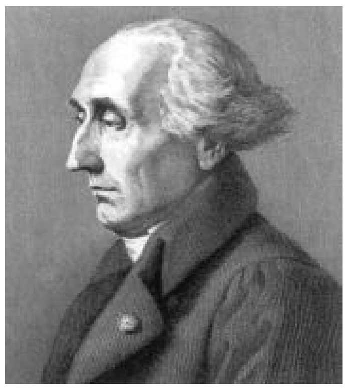
POVIJESNA RUBRIKA

Joseph-Louis Lagrange

FRANKA MIRIAM BRÜCKLER*



Jedan od najvažnijih matematičara i fizičara iz razdoblja prijelaza iz 18. u 19. stoljeće, Joseph-Louis Lagrange, rođen je 25. siječnja 1736. u Torinu (Italija), koji je u to doba bio glavni grad kraljevstva Sardinije. Lagrangea se uglavnom spominje kao francuskog matematičara, no on je porijeklom većim dijelom Talijan - ne samo da je rođen u Italiji, već mu je i krsno ime Giuseppe Lodovico Lagrangia. Imao je još desetero mlađe braće i sestara, no od njih je samo jedno preživjelo djetinjstvo. Iako Talijan, Lagrange je uvijek bio skloniji francuskom dijelu svog porijekla: pradjed s očeve strane bio je francuski konjički kapetan. Lagrangeova obitelj nije bila bogata jer je otac, zaposlen na relativno visokom činovničkom mjestu, neuspješnim financijskim spekulacijama izgubio velike iznose novca. Prema želji oca, Lagrange se počeo školovati za pravnika. Interes za matematiku pokazao je relativno kasno, potaknut knjigama iz fizike, te se predomislio i odlučio školovati za matematičara. Puno godina kasnije rekao je: *Da sam bio bogat, vjerojatno se ne bih posvetio matematici.* Napredovanje u matematici bilo je vrlo brzo, iako je bio više-manje samouk. Prvi matematički rad objavio je 1754., a potpisao ga je kao Luigi De la Grange Tournier. Taj rad nije bio ništa posebno i odražavao je Lagrangeovu samoukost. Nakon tog se počeo baviti **tautokronom**, krivuljom koja ima svojstvo da materijalna točka koja po njoj klizi do zadane pozicije uvijek dolazi u istom vremenu, neovisno o početnoj poziciji. Vezano za tautokronu dobio je nekoliko važnih rezultata koji će biti važni za razvoj nove matematičke discipline, varijacijskog računa. Svoje rezultate je poslao Euleru, koji je bio vrlo impresioniran. Iako samouk i samo 19 godina star, Lagrange je nakon toga 1755. dobio mjesto profesora matematike u Kraljevskoj artiljerijskoj školi u Torinu.

Nakon početnog uspjeha, Lagrangeov interes se dalje usmjerio prema primje-

*Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, HR-10000 Zagreb, e-mail: bruckler@math.hr

nama diferencijalnog i integralnog računa u mehanici. Godine 1756. imenovan je članom berlinske Akademije znanosti, a godinu poslije bio je suosnivač jedne znanstvene udruge u Torinu, koja je objavljivala znanstveni časopis *Mélanges de Turin*. U tom je časopisu Lagrange objavio više svojih radova. Jedan od najvažnijih među njima je studija o širenju zvuka, kojom je ostvario važan doprinos u teoriji vibracija. Matematički dio njegova modela sastojao se u sustavu diferencijalnih jednadžbi. Kasnije je objavio i niz drugih primjena diferencijalnih jednadžbi, primjerice u mehanici fluida i proučavanju orbita Jupitera i Saturna. Karakteristično je da je Lagrange za rješavanje diferencijalnih jednadžbi razvio vlastite metode. U idućih par godina odbio je punude elitnijeg berlinskog sveučilišta jer mu je rad u Torinu omogućavao da se u miru posveti znanosti. Ipak, u jednom trenutku, 1766., dobio je toliko velikodušnu ponudu da je nije mogao odbiti te je 6. studenog 1766. naslijedio Eulera kao direktor matematike na berlinskoj Akademiji znanosti. Iduće godine oženio se rođakinjom, Vittoriom Conti. Nisu imali djece, a u jednom pismu d'Alembertu je naveo da ih nije želio imati. U Berlinu je Lagrange proveo 20 godina i za to vrijeme osvojio više nagrada pariške Akademije znanosti. U kasnijem razdoblju boravka u Berlinu Lagrangeovo je zdravlje, a i zdravlje njegove supruge, bilo slabo. Supruga mu je umrla 1783., a tri godine kasnije umro je i njegov veliki zaštitnik, car Friedrich II. Pozicija u Berlinu za Lagrangea tako nije više bila idealna, a i klima mu nije odgovarala, te je od niza ponuda, većinom za povratak u Italiju, odabrao odlazak u Pariz na mjesto člana Akademije znanosti. U Pariz odlazi 18. svibnja 1787. i tu je ostao do kraja svoje karijere. Tu je 1788. objavio i svoje najznamenitije djelo, napisano u Berlinu: *Mécanique analytique*. U tom je djelu sažeo svu mehaniku nakon Newtona i potpuno je matematički reformulirao koristeći diferencijalne jednadžbe. Time je klasična Newtonova mehanika transformirana u više matematičku Lagrangeovu mehaniku.

Poznato je da je Lagrange bez većih nevolja preživio razdoblje francuske revolucije, vjerojatno zahvaljujući svojoj filozofiji koju je izrazio rečenicom: *Vjerujem da je, općenito, jedan od glavnih principa svakog mudrog čovjeka da se strogo podvrgne zakonima države u kojoj živi, čak i ako su nerazumni.* U tom je razdoblju bio član odbora Akademije znanosti za standardizaciju mjera (1790.), koji se zalagao za metrički sustav i decimalni brojevni sustav. U toj komisiji bilo je zahtjeva za korištenjem baze 12, na što je Lagrange ironično zastupao korištenje baze 11.

Godine 1792. Lagrange se ponovno oženio, ovaj put s kćeri jednog od kolega s Akademije. Zanimljivo je, bar se tako prenosi u većini izvora, da je ta mlada i lijepa djevojka bila još *teenager* i zaljubila se u njega, vjerojatno potaknuta njegovom povučenom i pomalo tužnom osobnošću, te da je upravo ona bila ta koja je inzistirala na vjenčanju. Ovaj Lagrangeov brak bio je vrlo sretan, no ni u njemu nije imao djece.

U doba jakobinskog terora, 1793., ukinuta je Akademija, a odbor za standardizaciju mjera bio je jedino tijelo Akademije koje je smjelo nastaviti s radom. Lagrange je postao predsjednik tog odbora, dok su iz istog izbačeni mnogi drugi istaknuti znanstvenici, primjerice Lavoisier i Coulomb. Kemičar Lavoisier je ujesen iste godine intervenirao u korist Lagrangea, kad je vlada zahtijevala hapšenje svih stranaca rođenih u neprijateljskim zemljama i konfiskaciju njihove imovine. Za Lagrangea je napravljen izuzetak, ali je pol godine kasnije, u svibnju 1794., Lavoisiera nakon niti jednodnevnog suđenja revolucionarni sud osudio na smrt. Lagrange mu nije mogao pomoći, a prilikom giljotiniranja Lavoisiera rekao je: *Trebao je samo trenutak da ova glava padne, a neće biti dovoljno ni sto godina da se stvori njoj slična.*

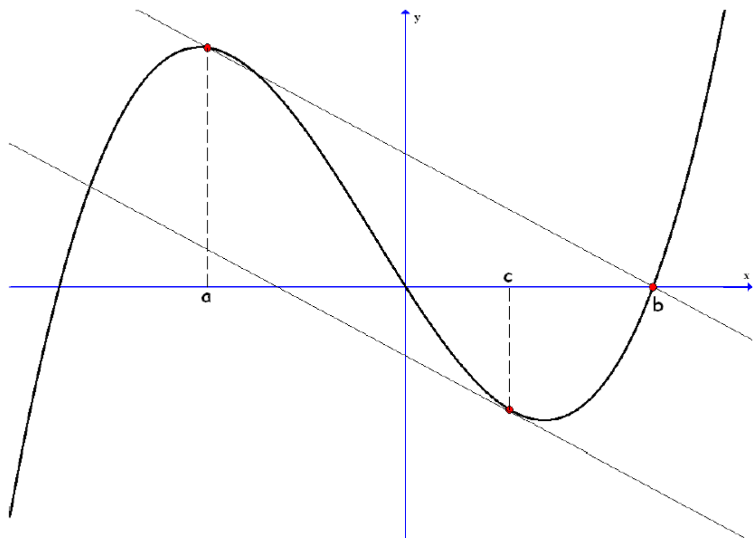
Kad je u prosincu 1794. osnovana znamenita škola *École Polytechnique*, Lagrange je postao prvi profesor matematičke analize na njoj. Iduće godine osnovana je i *École Normale* s ciljem obrazovanja učitelja, a Lagrange je i na njoj predavao. Zanimljivo je da je Lagrange pri prijelazu u Pariz u potpisanom ugovoru imao klauzulu o tome da neće predavati, no revolucionarne vlasti su to izmijenile i zahtijevale da drži nastavu. Njegova predavanja na navedenim školama pohađali su neki kasnije znameniti matematičari, primjerice Fourier, iz čijih zapisa saznajemo da Lagrange nije bio dobar predavač. U ovom kasnijem razdoblju svog života Lagrange je objavio nekoliko djela iz matematičke analize. Napoleon ga je 1808. imenovao u Legiju časti i dao mu titulu grofa Carstva. Lagrange je umro u Parizu, 10. travnja 1813. Pokopan je u pariškom Panthéonu.

Lagrange je ostao najpoznatiji po rezultatima iz matematičke fizike, osobito mehanike i astronomije, a u čistoj matematici posebno se istakao u algebri, teoriji brojeva i utemeljenju infinitezimalnog računa.

O posljednjem je zgodno reći par riječi. Naime, kad su Newton i von Leibniz utemeljili infinitezimalni račun, jedna od temeljnih ideja bila je da je koeficijent smjera tangente u nekoj točki krivulje kvocijent prirasta vrijednosti u smjeru y-osi i prirasta vrijednosti u smjeru x-osi kad su ti prirasti vrlo blizu nule, ali različiti od nule. Kvocijent je bio definiran jer je prirast u nazivniku ipak različit od nule, no u izvodima se često taj infinitezimalno mali prirast (kad nije dolazilo do dijeljenja s njime) izjednačavao s nulom. Stoga su suvremenici Newtona i von Leibniza prigovorili da taj očigledno koristan i primjenjiv račun nije dobro utemeljen, a ostalo je otvoreno pitanje kako ga formalizirati i precizirati. Pitanje je ostalo dugo vremena otvoreno, sve do preciznog uvođenja pojma limesa sredinom 19. stoljeća. Jedan od matematičara koji su se bavili ovim pitanjem bio je Lagrange. Njegova ideja je bila izbjeći dijeljenje infinitezimalnih veličina. Lagrange je tako dao iduću jednakost koja opisuje vezu između funkcije f i njene derivacije f':

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + hV,$$

gdje je broj V to bliži nuli što je h bliži nuli. Njegova interpretacija bila je da ta jednakost znači da za svaki zadani broj $D > 0$ postoji dovoljno mali $h > 0$ takav da je V između $-D$ i D. Ovakva definicija je gotovo ista kao moderna, koju je nešto kasnije dao Cauchy. Lagrange je do takve definicije došao pretpostavivši da se svaka funkcija može razviti u red potencija tj. zapisati (na jedinstven način) u obliku konačne ili beskonačne sume (po n) članova oblika $a_n(x-c)^n$, gdje je c konstanta. Taj pristup je bio posljedica uvjerenja da postoji „algebra beskonačnih suma”, te je htio infinitezimalni račun svesti na algebru. Naravno, nije istina da se svaka funkcija može razviti u red potencija, a postoje i neki drugi matematički problemi s Lagrangeovom definicijom. Ipak, ona je bila bitan napredak pri preciziranju diferencijalnog računa i zapravo je točna, ukoliko se preciziraju potrebne pretpostavke i tehnike. Koristeći ovu definiciju, Lagrange je - uglavnom točno - dokazao niz teorema matematičke analize, među inim i znameniti **Lagrangeov teorem srednje vrijednosti**, koji je vjerojatno njegov najpoznatiji matematički rezultat. Taj teorem je jedan od osnovnih teorema u matematičkoj analizi, no moguće ga je (poluprecizno) izreći i bez korištenja pojma derivacije: ukoliko imamo graf neke glatke funkcije (dakle, graf je u jednom komadu i nema nikakvih „šiljaka”), onda ukoliko uzmemo bilo koje dvije točke na tom grafu i spojimo ih pravcem postoji točka između njih u kojoj je tangenta na graf paralelna tom pravcu:



Danas po Lagrangeu puno matematičkih pojmova nosi ime. Spomenimo samo neke. **Lagrangeov operator** je funkcija koja opisuje stanje dinamičkog sustava i radi se o razlici operatorâ kinetičke i potencijalne energije. Ako je poznat Lagrangeov operator za sustav, mogu se odrediti jednadžbe gibanja čestica u sustavu. **Lagrangeovi interpolacijski polinomi** su jedan od oblika polinoma najmanjeg stupnja $(n-1)$ kojemu su zadane vrijednosti u n različitih vrijednosti varijable. Primjerice, za tri zadane vrijednosti $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ i $f(4) = 5$ postoji točno jedan polinom f stupnja dva, dakle kvadratna funkcija, s tim svojstvom (zovemo je interpolacijskim polinomom). Ta kvadratna funkcija u Lagrangeovom obliku dobije se kao zbroj 3 (općenito: n) članova oblika konstanta puta Lagrangeov bazni polinom. Svaki od tih članova je pridružen po jednoj od zadanih vrijednosti $f(x_i) = y_i$. Konstanta u opisanom članu jednaka je vrijednosti y_i, a Lagrangeov bazni polinom je produkt svih mogućih članova oblika $\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ za $j \neq i$. Primijetimo da je svojstvo Lagrangeovih baznih polinoma da imaju vrijednost nula u pripadnom x_i-u. Tako za naš primjer imamo:

$$x_1 = 0: \qquad 2 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(0-1)(0-4)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-4) \tag{1}$$

$$x_2 = 1: \qquad 1 \cdot \frac{(x-0)(x-4)}{(1-0)(1-4)} = -\frac{1}{3}x(x-4) \tag{2}$$

$$x_3 = 4: \qquad 5 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(4-0)(4-1)} = \frac{5}{12}x(x-1) \tag{3}$$

Ukupni Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma sad je

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-4) - \frac{1}{3}x(x-4) + \frac{5}{12}x(x-1).$$

Uvrštavanjem $x = 0, 1, 4$ lako se provjeri da f stvarno postiže zadane vrijednosti.

Po Lagrangeu osim već spomenutog teorema srednje vrijednosti ime nosi još nekoliko teorema. U algebri je poznat **Lagrangeov teorem** koji kaže da u konačnoj grupi G broj elemenata svake njene podgrupe dijeli broj elemenata od G. Pritom, grupa je skup opskrbljen nekom operacijom koja iz dva elementa grupe „stvara” neki element iz tog istog skupa, pri čemu trebaju vrijediti neka lijepa svojstva operacije[1]. Primjerice, gledamo li sva preslikavanja koja kvadrat preslikavaju na njega samog tako da rezultat ne možemo razlikovati od početnog oblika (tzv. simetrije kvadrata), onda ta preslikavanja (npr. rotacija oko središta kvadrata za 90°, zrcaljenje obzirom na dijagonalu . . .) uz operaciju „uzastopnog izvođenja” čine grupu (ako uzastopno izvedemo takva dva preslikavanja onda i ukupni rezultat ne možemo razlikovati od originala) i ta grupa se zove grupa simetrija kvadrata. Podgrupa je podskup grupe koji je i sam grupa obzirom na istu operaciju. Tako recimo u gornjem primjeru, ako gledamo samo rotacije oko središta, imamo 4 neekvivalentne (rotacije za $0°, 90°, 180°, 270°$) i one čine podgrupu grupe simetrija.

Lagrangeov teorem u teoriji brojeva kaže da postoji najviše n prirodnih brojeva između 0 i p takvih da je $f(x)$ djeljiv s p, gdje je p prost broj, a f polinom stupnja n s cjelobrojnim koeficijentima. U teoriji brojeva poznat je i **Lagrangeov teorem o četiri kvadrata** (1770.) koji kaže da svaki prirodan broj možemo zapisati kao zbroj najviše četiri kvadrata prirodnih brojeva. Lagrange je prvi dokazao (1771.) i teorem poznat kao **Wilsonov teorem**: prirodan broj n je prost točno ako je $(n-1)! + 1$ djeljiv s n.

Literatura

[1] W. W. Rouse Ball, *A Short Account of the History of Mathematics*, 1908., http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Lagrange/RouseBall/RB_Lagrange.html

[2] J. V. Grabiner, *Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus*, Amer. Math. Monthly **90** (3) 1983, 185-194.

[3] Mac Tutor History of Mathematics Archives: Joseph-Louis Lagrange, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Lagrange.html

[4] NNDB: Joseph-Louis Lagrange, http://www.nndb.com/people/380/000087119/

[5] Wikipedia: Joseph Louis Lagrange, http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Louis_Lagrange

[1] Operacija koja definira grupu treba biti asocijativna, mora postojati neutralni element i svaki element mora imati inverz.