

# Matematička igra RasTpad

Marija Bliznac Trebješanin, Joško Mandić, Aljoša Šubašić

---

## Sažetak

U ovom radu predstaviti će se igra RasTpad, autora Krune Matića, te dati njena matematička analiza koja opisuje strategiju pronalaska rješenja igre i osnovni pristup analizi broja rješenja s obzirom na zadano početno stanje tablice igre.

*Ključni pojmovi: enigmatika, matematičke igre, digrafovi*

---

## 1 Uvod

Postoje različite matematičke igre i zagonetke koje su vezane za popunjavanje tablica, najčešće oblika kvadrata. Neki od njih sežu u daleku prošlost<sup>1</sup>, a neke su u svom znanstvenom radu proučavali veliki matematičari — Leonhard Euler<sup>2</sup> je proučavao ortogonalne latinske kvadrate i time se smatra „ocem Sudokua”. Igra Sudoku je iznimno popularna u enigmatiskim krugovima i čitatelj lako može pronaći njena pravila i samu igru u različitim izvorima. U ovom ćemo radu prikazati matematičku analizu igre RasTpad, autora Krune Matića, koja sa Sudokuom ima neke sličnosti. Međutim, ima i mnoge razlike koje je čine zanimljivom i za postavljanje i za rješavanje.

---

<sup>1</sup>Magični kvadrati se spominju u kineskim knjigama iz 2. st. pr. Kr.

<sup>2</sup>švicarski matematičar, fizičar i astronom, 1707. – 1783.

## 2 Pravila igre

	2		4
	7		5
7	8	5	6
	1		8

Slika 1: Primjer triju monotonih nizova

Igra se sastoji od tablice oblika  $n \times n$  u čije ćelije upisujemo brojeve od 1 do 9 u rastućem nizu, po retku udesno i stupcu put dolje, s tim da je početak niza označen linijom na stranici neke od ćelija, a samim time osiguravamo da se niz nastavlja i „preko ruba” tj. ciklički prelazi s kraja retka ili stupca na njegov početak kako je ilustrirano na Slici 1 za drugi stupac. Napomenimo da u igri možemo tražiti upisivanje brojeva od 0 do 9 ili u bilo kojem većem rasponu, što povećava kompleksnost igre i mogući broj rješenja, no, zbog jednostavnosti, za početak analize promotrimo upisivanje brojeva u rasponu od 1 do 9.

Lako je uočiti da igra neće imati rješenja za  $n$  veći od broja brojeva koje upisujemo, u našem slučaju, za  $n$  veći od broja 9. Čitatelju prepuštamo da prouči što se događa za tablice dimenzija  $n = 9$  ili manje  $n = 7, 8$ . U ovom radu ćemo detaljno analizirati igru u slučaju  $n = 4$ , to jest, kvadrat dimenzije  $4 \times 4$ , a za ostale izbore  $n$  bi se analiza provela analogno.

Nadalje, svaki redak i stupac moraju imati naznačeno gdje je početak niza, što ćemo mi naglasiti duplom linijom. Na Slici 2 je zadan kvadrat jedne igre i jedno njegovo rješenje.


9	2	3	4
6	7	4	5
7	8	5	6
8	1	6	7

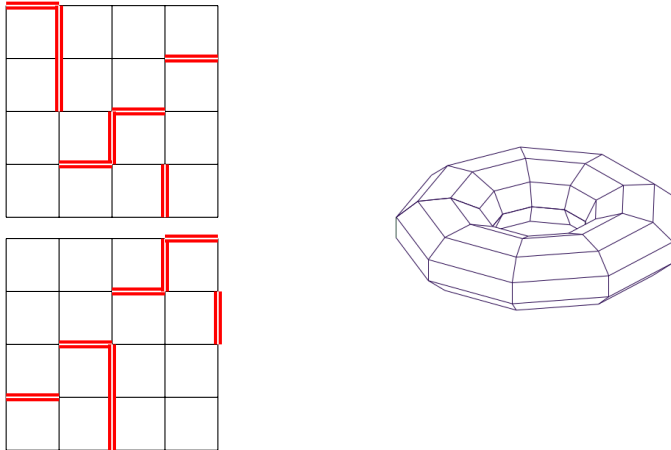
Slika 2: Zadana igra i jedno rješenje

U postavljanju igre možemo razlikovati više početnih stanja. Najosnovnije je ono u kojem je zadana samo tablica s linijama početaka nizova. Osim njega, možemo u početnom stanju igre zadati i jedan ili više fiksnih brojeva na nekim pozicijama unutar tablice. U zadavanju takvih stanja potrebno je biti pažljiv — dodavanje brojeva u početno stanje igre može smanjiti broj mogućih rješenja igre, ali i stvoriti igru koja nema rješenja. Igra sa Slike 1 nema rješenje ako je tablica s te slike njeno početno stanje (pokušajte staviti odgovarajuće brojeve u prvi stupac tablice).

### 3 Matematička analiza igre

Matematički pojmovi koje ćemo navesti u ovome radu prate definicije iz [1].

Digraf  $\Gamma$  je uređeni par  $(V, E)$  pri čemu je  $V$  konačan skup čije elemente nazivamo vrhovima, a  $E$  podskup od  $V^2$  čije elemente nazivamo lukovima. Ako je  $(x, y) \in E$  onda  $x$  nazivamo početak luka, a  $y$  kraj luka. Na Slici 3 je prikazano jedno početno stanje u RasTpadu. S obzirom na to da poistovjećujemo gornji (lijevi) i donji (desni) rub tablice zanimljivo je da grafički možemo zamisliti da je naša tablica trodimenzionalni objekt — torus s mrežom naše igre. Iz toga je jasno, da je ovo početno stanje ekvivalentno početnim stanjima u kojima se sve oznake početka nizova pomiču ulijevo, udesno, gore ili dolje, to jest, sva takva početna stanja igre će imati ista rješenja.

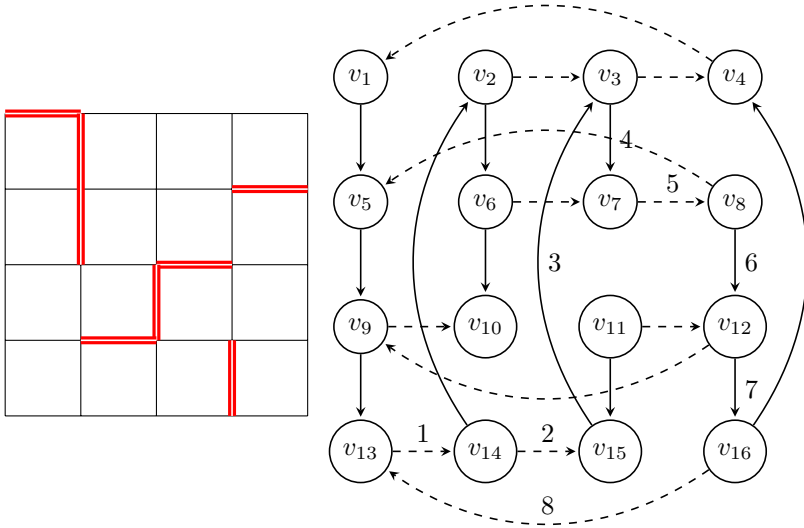


Slika 3: Ekvivalentna početna stanja igre i torus s mrežom  $9 \times 9$

Bilo koju poziciju u RasTpadu možemo shvatiti kao digraf kojemu su ćelije vrhovi, a lukovi su između ćelija koje imaju zajednički brid koji

nije dupla linija, pri čemu je ćelija koja je lijevo (gore) početak luka, a desno (dolje) kraj luka ili je početak u zadnjem stupcu (zadnjem retku), a kraj u prvom stupcu (prvom retku).

Da bismo uveli oznake i ilustrirali jedan takav digraf, promotrimo Sliku 4. S lijeve strane smo stavili početno stanje igre koju želimo riješiti. Svaka ćelija nam predstavlja vrh u digrafu, to jest, s ovako uvedenim oznakama, skup vrhova je  $V = \{v_i : i \in \{1, 2, 3, \dots, 16\}\}$ . Skup vrhova  $V$  i skup bridova  $E$  su ilustrirani s desne strane te  $E$  sadrži, na primjer, parove  $(v_2, v_3)$  i  $(v_{12}, v_9)$ , ali ne sadrži par  $(v_5, v_6)$  jer je na tom bridu bila oznaka početka niza. Na digrafu smo označili sve bridove, s tim da smo bridove stupaca označili punom, a redaka isprekidanom linijom samo radi preglednosti same slike, iako među njima ne pravimo razliku.



Slika 4: Početno stanje igre i digraf koji ga opisuje

Osim bridova i vrhova, na grafu smo označili i brojevima jedan „put” od osam vrhova međusobno povezanih bridovima.

Za niz vrhova  $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$  kažemo da je *diciklus* ako vrijedi da je  $(v_{i_k}, v_{i_{(k+1)}}) \in E$  za sve  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  i  $(v_{i_n}, v_{i_1}) \in E$ . Dakle, na Slici 4 je istaknut diciklus  $(v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_3, v_7, v_8, v_{12}, v_{16})$ . Vrijedi sljedeće:

*Ako digraf početnog stanja igre ima diciklus, igra nema rješenje.*

Naime, u bilo kojem nizu vrhova koji su međusobno povezani bridovima treba vrijediti da je na prethodnom vrhu upisan manji broj nego na

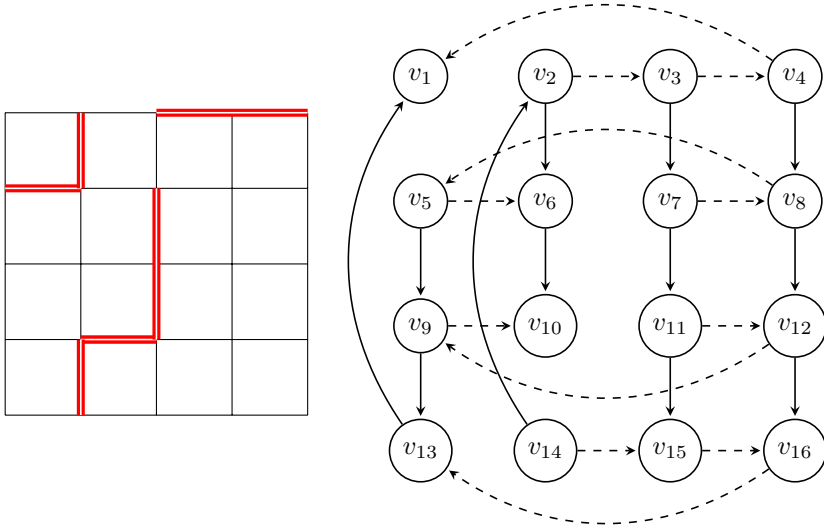
sljedećem. U diciklusu to očito ne možemo postići jer bi trebalo vrijediti

$$v_{i_1} < v_{i_2} < \dots < v_{i_n} < v_{i_1} \Rightarrow v_{i_1} < v_{i_1}$$

što je očita kontradikcija. Dakle, ovakvo početno stanje igre nema rješenje.

### 3.1 Analiza igre preko maksimalnog diputa

Za nastavak analize promotrimo igru s početnim stanjem sa Slike 2 za koje znamo da ima rješenje i napravimo njen digraf na Slici 5. Ovo početno stanje igre očito nema diciklusa, pa možemo tražiti neke druge specifičnosti koje nam mogu pomoći u rješavanju igre. Uvedimo sada neke pojmove koji su nam potrebni za analizu igre.



Slika 5: Zadana igra i njen digraf

*Ulazni stupanj* vrha  $x$  je broj vrhova skupa  $\Gamma^-(x) = \{y \in V : (y, x) \in E\}$ , to jest broj bridova koji završavaju u vrhu  $x$ . Slično, *izlazni stupanj* vrha  $x$  je broj vrhova skupa  $\Gamma^+(x) = \{y \in V : (x, y) \in E\}$ , to jest broj bridova koji započinju u vrhu  $x$ .

Za niz vrhova  $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$  kažemo da je *diput* ako je  $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in E$  za sve  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Broj  $n-1$  nazivamo *duljina diputa*, vrh  $v_{i_1}$  *početkom diputa*, a vrh  $v_{i_n}$  *krajem diputa*. Svaki diput je dio diputa maksimalne duljine kojeg ćemo nazivati *maksimalni diput*. Lako se može uočiti da u maksimalnom diputu početak diputa nema nijedan brid koji

završava u njemu, to jest, ima ulazni stupanj 0, a kraj diputa nema nijedan brid koji iz njega započinje, to jest, ima izlazni stupanj 0.

Želimo pronaći maksimalne diputove u našoj zadanoj igri. Jedini kandidat za početak maksimalnih diputova je  $v_{14}$ , a za krajeve maksimalnih diputova imamo 2 kandidata  $\{v_1, v_{10}\}$ . Nije teško uočiti da nam diput određuje jedan uzlazni niz brojeva pa vrijedi sljedeće:

*Ako u digrafu početnog stanja igre postoji diput duljine veće od 9, igra nema rješenje.*

Promotrimo maksimalni diput  $(v_{14}, v_2, v_3, v_7, v_8, v_{12}, v_{16}, v_{13}, v_1)$ . On je duljine 9, pa na ovaj put moramo postaviti redom brojeve od 1 do 9 kako je naglašeno u lijevoj tablici Slike 6.

9	2	3	
		4	5
			6
8	1		7

9	2	3	4
6		4	5
7		5	6
8	1	6	7

Slika 6: Popunjavanje tablice koristeći maksimalni diput

Nadalje možemo uočiti diput  $(v_3, v_4, v_8)$  koji nam s ovim brojevima daje jedinstveni izbor za broj u vrhu  $v_4$ , te diput  $(v_8, v_5, v_9, v_{13})$  duljine 4 koji jedinstveno određuje brojeve u vrhovima  $v_5$  i  $v_9$ . Slično je i s diputom  $(v_7, v_{11}, v_{15}, v_{16})$  koji jedinstveno određuje brojeve u vrhovima  $v_{11}$  i  $v_{15}$ . Time smo dobili igru popunjenu kao u desnoj tablici Slike 6.

Preostale su dvije ćelije za popuniti, i nije teško primijetiti da imamo više mogućnosti. Konkretno

$$(v_6, v_{10}) \in \{(7, 8), (7, 9), (8, 9)\}.$$

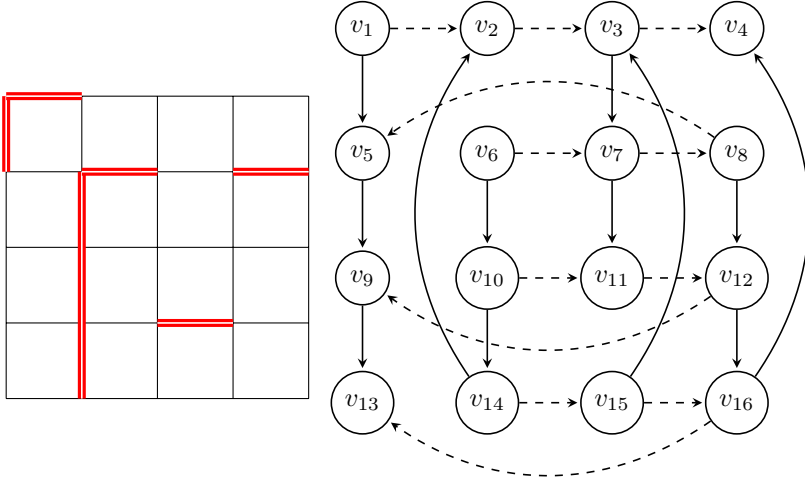
Dakle, ovo početno stanje igre ima 3 moguća rješenja.

Ako bismo željeli zadati igru koja ima jedinstveno rješenje, moramo očito napisati vrijednost u ćeliji  $v_6$  ili  $v_{10}$  i to broj 8 u ćeliji  $v_6$  ili broj 9 u ćeliji  $v_{10}$ . Analognom analizom bi takva početna stanja dala jedinstveno rješenje igre.

### 3.2 Jedno poopćenje igre

Promotrimo novu igru zadanu početnim stanjem na Slici 7.

Uvedimo nove pojmove i oznake.



Slika 7: Zadana igra i njen digraf

Ako je  $\Gamma$  digraf i  $S \subseteq V$  onda s  $\Gamma_S$  označavamo digraf kojem je skup vrhova  $V \setminus S$ , a skup bridova  $E \cap (V \setminus S)^2$ . To jest, novi digraf dobijemo tako da „izbacimo” sve vrhove skupa  $S$  iz početnog grafa i „izbacimo” sve bridove koji počinju ili završavaju u vrhovima iz skupa  $S$ .

Definirajmo skupove  $V_i$  i digrafove  $\Gamma(i)$  indukcijom. Neka je  $\Gamma(0) = \Gamma$  naš početni graf i  $V_0$  skup svih vrhova u  $\Gamma(0)$  kojima je ulazni stupanj nula, to jest, broj bridova koji završavaju u tom vrhu je jednak 0. Nadalje,  $\Gamma(1) = \Gamma_{V_0}$  i  $V_1$  skup svih vrhova u  $\Gamma(1)$  kojima je ulazni stupanj nula. To jest, općenito za broj  $i \in \mathbb{N}$  definiramo  $\Gamma(i) = \Gamma(i-1)_{V_{i-1}}$  i  $V_i$  skup svih vrhova u  $\Gamma(i)$  kojima je ulazni stupanj nula. Kada je svaki vrh u nekom skupu  $V_i$  proces se zaustavlja.

Za naše početno stanje igre sa Slike 7 imamo sljedeće skupove

$$\begin{aligned} V_0 &= \{v_1, v_6\}, V_1 = \{v_{10}\}, V_2 = \{v_{14}\}, V_3 = \{v_2, v_{15}\}, V_4 = \{v_3\}, \\ V_5 &= \{v_7\}, V_6 = \{v_8, v_{11}\}, V_7 = \{v_5, v_{12}\}, V_8 = \{v_9, v_{16}\}, V_9 = \{v_4, v_{13}\}. \end{aligned}$$

Time je proces završen. Vrhovi iz skupa  $V_0$  su početni vrhovi maksimalnog diputa, vrhovi iz  $V_9$  su završni vrhovi maksimalnog diputa, a ostale vrhove za konstrukciju maksimalnog diputa uzimamo redom iz skupova  $V_i$ , tako da je niz  $i$ -ova uzlazan i da su međusobno povezani bridovima. Vidimo da je maksimalan diput u ovom grafu duljine 10 što znači da igra s ovim početnim stanjem nema rješenje.

No, ovo početno stanje možemo iskoristi za jedno poopćenje igre – dopustimo da se ćelije popunjavaju brojevima od 0 do 9 umjesto od 1 do

9. Sada možemo imati maksimalni diput duljine 10 koji ćemo popuniti brojevima od 0 do 9 uzlazno.

	3	4	
	0	5	6
8	1		7
9	2		

	3	4	9
7	0	5	6
8	1	6	7
9	2	7	8

Slika 8: Poopćena igra s brojevima od 0 do 9

U prvoj tablici Slike 8 smo označili ćelije popunjene po maksimalnom diputu ( $v_6, v_{10}, v_{14}, v_2, v_3, v_7, v_8, v_{12}, v_9, v_{13}$ ). Kao i prije možemo uočiti da se, po ostalim diputovima i do sada unesenim vrijednostima, jedinstveno mogu popuniti još neke vrijednosti, što je prikazano u drugoj tablici Slike 8.

Vidimo da je samo ćelija kojoj odgovara vrh  $v_1$  ostala nepopunjena te da za nju imamo mogućnosti  $v_1 \in \{0, 1, 2\}$ .

Zaključujemo da ovo početno stanje ima 3 moguća rješenja ako upisujemo u ćelije brojeve od 0 do 9, a nema rješenja ako upisujemo brojeve od 1 do 9.

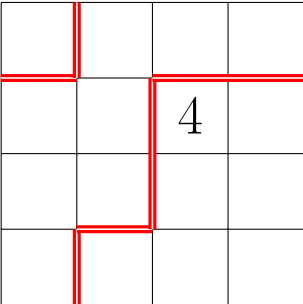
### 3.3 Minimalno i maksimalno rješenje

Prirodno se nameće pitanje kako prebrojati rješenja kada se javljaju diputovi u kojima na više različitih načina možemo postaviti vrijednosti ćelija. Analizirajmo i takav slučaj koji se javlja u igri sa Slike 9. Zbog jednostavnosti postupka, kako bismo smanjili broj mogućih rješenja, postavili smo jedan broj kao uvjet u početno stanje, konkretno  $v_7 = 4$  te ćemo tablicu popunjavati brojevima od 1 do 9.

Osim ulaznih stupnjeva, možemo promatrati i izlazne stupnjeve svakog od vrhova i definirati minimalno i maksimalno rješenje igre.

Definirajmo skupove  $V^i$  i digrafove  $\Gamma'(i)$  indukcijom. Neka je  $\Gamma'(0) = \Gamma$  naš početni graf i  $V^0$  skup svih vrhova u  $\Gamma'(0)$  kojima je izlazni stupanj nula, to jest, broj bridova koji započinju u tom vrhu je jednak 0. Analogno kao i prije,  $\Gamma'(1) = \Gamma_{V^0}$  i  $V^1$  skup svih vrhova u  $\Gamma'(1)$  kojima je izlazni stupanj nula. Također, općenito za broj  $i \in \mathbb{N}$  definiramo  $\Gamma'(i) = \Gamma(i-1)_{V^{i-1}}$  i  $V^i$  kao skup svih vrhova u  $\Gamma'(i)$  kojima je izlazni stupanj nula. Kada je svaki vrh u nekom skupu  $V^i$  proces se zaustavlja.





Slika 9: Zadana igra i njen digraf

Igra sa Slike 9 ima više različitih rješenja. Kako bismo olakšali i sistematizirali njihovo traženje pokazat ćemo postupak traženja *minimalnog* i *maksimalnog* rješenja igre, te za sva ostala rješenja vrijedi da se brojevi uneseni u ćelije nalaze u rasponu između brojeva u ćelijama u minimalnom i maksimalnom rješenju.

Da bismo pronašli minimalno rješenje, potrebno je promatrati vrhove s obzirom na ulazni stupanj. Imamo

$$V_0 = \{v_7, v_{14}\}, V_1 = \{v_2, v_8, v_{11}\}, V_2 = \{v_5, v_{12}, v_{15}\}, \\ V_3 = \{v_3, v_6, v_9, v_{16}\}, V_4 = \{v_4, v_{10}, v_{13}\}, V_5 = \{v_1\}.$$

Vidimo da će maksimalni diput biti duljine 6 te da ćemo imati više različitih rješenja. Kako bismo olakšali analizu i smanjili broj rješenja, zadali smo uvjet  $v_7 = 4$ .

Promotrimo maksimalni diput  $(v_7, v_{11}, v_{15}, v_{16}, v_{13}, v_1)$ . Kako je  $v_7 = 4$ , očito ovaj diput možemo popuniti na jedinstven način brojevima  $(4, 5, 6, 7, 8, 9)$ . Nakon unosa tih brojeva u ćelije, promatrajući ostale diputove, vidimo da su jedinstvene vrijednosti i u ćelijama  $v_3 = 7$ ,  $v_4 = 8$ ,  $v_5 = 6$ ,  $v_8 = 5$ ,  $v_9 = 7$ ,  $v_{12} = 6$ . Time dobijemo situaciju kao u lijevoj tablici Slike 12. Preostale prazne ćelije imaju više načina popunjavanja. Minimalno rješenje dobijemo tako da u ćelije koje nisu popunjene na jedinstven način stavljamo najmanje moguće brojeve idući redom od skupa  $V_0$  do  $V_5$ . U našem slučaju to znači da postavljamo  $v_{14} = 1$ , jer se on nalazi u skupu  $V_0$  i to je najmanja vrijednost koju ta ćelija može

poprimiti. Dalje, imamo  $v_2 = 2$ ,  $v_6 = 7$  i  $v_{10} = 8$ .

9		7	8
6		4	5
7		5	6
8		6	7

9	2	7	8
6	7	4	5
7	8	5	6
8	1	6	7

Slika 10: Jedinstveno popunjene ćelije i minimalno rješenje

Maksimalno rješenje pronalazimo promatrajući izlazne stupnjeve, to jest, trebamo odrediti skupove  $V^i$ . Nije teško vidjeti da imamo

$$V^0 = \{v_1, v_{10}\}, V^1 = \{v_4, v_6, v_{13}\}, V^2 = \{v_3, v_9, v_{16}\}, \\ V^3 = \{v_2, v_5, v_{12}, v_{15}\}, V^4 = \{v_8, v_{11}, v_{14}\}, V^5 = \{v_7\}.$$

Sada maksimalno rješenje odredimo tako da stavljamo najveće moguće brojeve u nepopunjene ćelije, idući redom od skupa  $V^0$  do  $V^5$ . To znači da je  $v_{10} = 9$ ,  $v_6 = 8$ ,  $v_2 = 6$  i  $v_{14} = 5$ . Na Slici 11 je prikazano minimalno i maksimalno rješenje. Sva ostala rješenja ove igre imaju u ćelijama brojeve između onih koji se nalaze u minimalnom i maksimalnom rješenju.

9	2	7	8
6	7	4	5
7	8	5	6
8	1	6	7

9	6	7	8
6	8	4	5
7	9	5	6
8	5	6	7

Slika 11: Minimalno rješenje i maksimalno rješenje

Dakle, za ćelije koje nisu jedinstvene imamo izbor  $v_{10} \in \{8, 9\}$ ,  $v_6 \in \{7, 8\}$ ,  $v_2 \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$  i  $v_{14} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Možemo primijetiti da vrijednosti ćelija  $v_{10}$  i  $v_6$  ovise jedna o drugoj, a ne ovise o vrijednosti u ćeliji  $v_2$ , ali vrijednosti ćelija  $v_2$  i  $v_{14}$  također ovise jedna o drugoj. Imamo kombinacije  $(v_{10}, v_6) \in \{(9, 8), (9, 7), (8, 7)\}$  za prvi par brojeva. Za par  $(v_2, v_{14})$  prikazimo vrijednosti u Tablici 1.

$v_2$	$v_{14}$
2	1
3	1 2
4	1 2 3
5	1 2 3 4
6	1 2 3 4 5

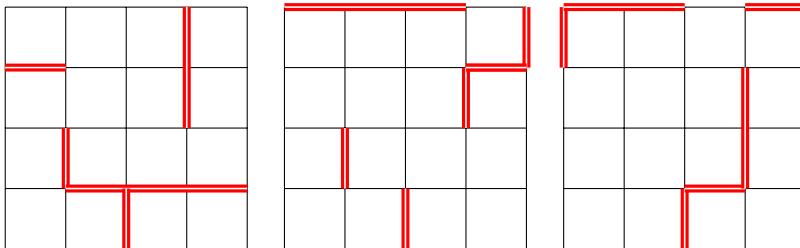
Tablica 1: Moguće vrijednosti u ćelijama  $v_2$  i  $v_{14}$

Lako vidimo da je broj rješenja ove igre  $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 45$ .

Postavljanjem više uvjeta u ćelije dobili bismo manji broj rješenja, a jasno je i da početno stanje ove igre bez uvjeta stvara mnogo više rješenja i povećava kompleksnost njihove analize.

## 4 Zadatak za čitatelja

Na Slici 12 su 3 tablice u koje je potrebno upisati brojeve od 1 do 9 po pravilima igre RasTpad. Jedna od ponuđenih igara nema rješenja, jedna ima jedinstveno rješenje, a jedna ima 2 moguća rješenja. Možete li odgonetnuti koja je koja koristeći prethodno opisane postupke?



Slika 12: Unesite brojeve od 1 do 9

## 5 Zaključak i poopćenja igre

Povećavanjem raspona brojeva koji se upisuju povećavamo broj mogućih rješenja. Povećavamo li veličinu tablice na neki veći  $n \times n$  očito smanjujemo broj rješenja, to jest, veća je vjerojatnost da ćemo nasumičnim izborom početnog stanja odabrati ono koje nema rješenje.

Igra se može dalje poopćiti i na druge načine. Može se na oznaku početka niza (dupla linija) staviti strelica u kojem smjeru želimo da niz raste. Naime, u našoj analizi smo se ograničili da niz uvijek raste „udesno” i „put dolje” od oznake početka niza. Ako bismo zadali igru s tablicom u kojoj smo strelicama naznačili na svakoj oznaci početka kako niz treba rasti, možemo joj pridružiti digraf kao u analizi koju smo ovdje predstavili i na potpuno analogan način izvoditi zaključke.

Najkompleksnije poopćenje igre bi bilo da tablica igre izgleda kao i do sada, ali ne ograničavamo igrača da rast mora biti u nekom unaprijed zadanom smjeru. To jest, potrebno je naći rješenja za sve kombinacije rasta i pada po stupcima i retcima. U analizi takve igre bi se trebao koristiti graf umjesto digrafa i takva matematička analiza nadilazi mogućnosti ovoga članka.

## Literatura

- [1] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb 2001.

Marija Bliznac Trebješanin  
Prirodoslovno-matematički fakultet, Ruđera Boškovića 33, Split  
*E-mail adresa:* marbli@pmfst.hr

Joško Mandić  
Prirodoslovno-matematički fakultet, Ruđera Boškovića 33, Split  
*E-mail adresa:* majo@pmfst.hr

Aljoša Šubašić  
Prirodoslovno-matematički fakultet, Ruđera Boškovića 33, Split  
*E-mail adresa:* aljsub@pmfst.hr

*Zaprimljen:* 13. veljače 2020.

*Prihvaćen:* 9. ožujka 2020.